MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

57. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

57. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952/53

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 57. Bandes.

ACKERMANN, W., Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II 155

BUCHHOLZ, H., Die Lösungen einer besonderen Whittakerschen inhomogenen Differentialgleichung 167

DAVIES, E. T., On the Invariant Theory of Contact Transformations 415

DÜRBAUM, H., Über die Ganzheitsbereiche bewerteter Körper 86

FISCHER, W., Über die Zetafunktion des reell-quadratischen Zahlkörpers 94

FORSTER, H., Über eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = r^2 k \frac{\partial f}{\partial t}$$ 428

GAIER, D., Schlichte Potenzreihen, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren 349

HAACKE, W., Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. II 34

JURKAT, W., Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen 353

KNESER, M., Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten 238

KÖTHE, G., Die Randverteilungen analytischer Funktionen 13

KREISEL, G., Some concepts concerning formal systems of number theory 1

LEICHTWEISS, K., Natürliche Gleichungen einer Fläche 244

LENZ, H., Über Orthogonaltrajektorien 46

LORENZEN, P., Eine Bemerkung über die Abzählbarkeitsvoraussetzung in der Algebra 241

MEYER-KÖNIG, W., Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt 351

PEYERIMHOFF, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit 265

PICKERT, G., Direkte Zerlegungen von algebraischen Strukturen mit Relationen 395

PRASAD, B. N., and U. N. SINGH, Corrigenda and Addenda 481

RAJAGOPAL, C. T., A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants 405

REICHEL, G., Zur Transformationstheorie der Matrizen über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen 75

RUND, H., The Theory of Subspaces of a Finsler Space. II 193

SCHEIBE, E., Über einen verallgemeinerten affinen Zusammenhang 65

SPECHT, W., Zur Zahlentheorie der Polynome. IV 291

STOLL, W., Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten 116

STOLL, W., Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen 211

THIMM, W., Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung 456

THOSAR, Y. V., Two Theorems on Operational Calculus 336

KREISEL, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 1—12 (1952)

Some concepts concerning formal systems of number theory.

By

GEORG KREISEL

Introduction.

1. In the present paper we consider relations between the concepts of (finitist) interpretation [1], [2], external consistency [3], and ω-consistency [4].

The principal new result is that, under suitable conditions, the first two are equivalent, the last one stronger (more restrictive).

The first part of the paper develops the finitist no-counter-example-interpretation of number theory practically from scratch, proving the relevant results in a rather sharper form and more simply than was done in [1]. The sharpened form is used in the equivalence proof mentioned above.

2. The concepts considered were introduced in order to state conditions under which a formal system may "properly" be called a system of number theory. More precisely, they were introduced in the course of attempts to formulate precisely (and interestingly!) a number of vague questions which it is natural to ask about classical number theory ("meaning", "truth" and "proof" of propositions in arithmetic, etc).

A formal system which satisfies any one of these conditions has several properties which are useful in applications of number theory. This fact makes the conditions considered, interesting characterizations of "number theory". — We do not attempt to give "an analysis of the ideas which ... are implied in the common employment of the term" [5]. For, first, it is doubtful whether a natural meaning can be given to this phrase; but more important still, much better concepts are often invented for the very purposes which a particular concept in common use has served: thus concentration on a concept merely because it happens to be in common use, seems rather pedantic.

However, all three concepts have considerable similarity to the vague notion of "number theory". This gives them the additional advantage of having familiar features so that one can argue fairly freely with them.

3. Below, part I sets out the definitions to be used in the text, part II develops finitist interpretations, part III establishes the equivalence between external consistency and the no-counter example-interpretation, part IV shows that an ω-consistent system is externally consistent, and gives an example of a system which is externally consistent (w.r.t. quasi-recursive functions), but not ω-consistent. Also a question of MOSTOWSKI's [6] concerning ω-consistency is answered.

I. Definitions.

4. All the formal systems considered below include the formulae of primitive recursive arithmetic, and numerical formulae can be decided in them. The formulae of the systems used are recursively enumerable.

5. Let $\mathfrak{F}$ and F be two such systems, let $\mathfrak{A}$ denote a formula of $\mathfrak{F}$, A one of F.

An *interpretation* of $\mathfrak{F}$ by F is a quasi recursive function $g(n, a)$ such that $g(n, a)$ is the number of a formula A_n when a is the number of the formula $\mathfrak{A}$, suitable numberings of $\mathfrak{F}$ and F being assumed. The following further conditions are imposed:

(a) in a *disjunctive* interpretation,

(i) if $\mathfrak{A}$ is proved in $\mathfrak{F}$, some A_n can be proved in F,

(ii) if $\mathfrak{A}$ is disproved in $\mathfrak{F}$, each A_n can be disproved in F;

(In systems containing the rules of the predicate calculus, $\mathfrak{A}$ is said to be disproved when $\neg\mathfrak{A}$ is proved, all variables in $\mathfrak{A}$ being bound; in free variable systems, when a substitution for the variables in $\mathfrak{A}$ has been found which reduces $\mathfrak{A}$ to a false formula.)

(b) in a *conjunctive* interpretation the conditions a(i), a(ii) hold when the words "each" and "some" are interchanged;

(c) in a *complete disjunctive* interpretation, $\mathfrak{A}$ can be proved in $\mathfrak{F}$ if and only if some A_n can be proved in F;

(d) in *a complete conjunctive* interpretation, (c) holds when the word "some" is replaced by "each".

6. A system $\mathfrak{F}$ is *externally consistent* with respect to the class $\mathfrak{M}$ of functions $f_1(a_1)$, $f_n(a_1, \ldots, a_n)$, if $\mathfrak{F}$ remains consistent when the formula

$$(x_1)\,(E\,y_1)\ldots(x_n)\,(E\,y_n)\,A\,(x_1, \ldots, x_n\,y_1, \ldots, y_n) \tag{6.1}$$

is added as an axiom, provided

$$\text{(i)} \qquad A\,(a_1, \ldots, a_n\,b_1, \ldots, b_n)$$

is primitive recursive,

$$\text{(ii)} \qquad A\,[a_1, \ldots, a_n\,f_1(a_1)\ldots f_n(a_1, \ldots, a_n)] \tag{6.2}$$

is verifiable, the functions f are constants belonging to $\mathfrak{M}$.

More directly: if $(E\,x_1)\,(y_1)\ldots(E\,x_n)\,(y_n)\,A\,(x_1, \ldots, x_n\,y_1, \ldots, y_n)$, hence

$$(E\,x_1)\ldots E\,x_n)\,A\,[x_1, \ldots, x_n\,f_1(x_1)\ldots f_n(x_1, \ldots, x_n)]$$

has been proved in $\mathfrak{F}$, for functions f of $\mathfrak{M}$ there are *numerals* $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n$ such that

$$A\,[\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n\,f_1(\mathfrak{n}_1)\ldots f_n(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)]$$

is true.

7. $\mathfrak{F}$ is *ω-consistent* in the *strong sense* if there is a numeral $\mathfrak{n}$ (0, 1, 2, ...) such that $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ can be proved in $\mathfrak{F}$ when $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$ has been proved in $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ is *ω-consistent* in the *weak sense* if given a proof of $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$ in $\mathfrak{F}$, and a function $p(n)$, one can find a number $\mathfrak{n}$ such that $p(\mathfrak{n})$ is not the number of a proof in $\mathfrak{F}$ of the formula $\neg\,\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$.

II. Finitist Interpretations.

8. By a finitist interpretation of $\mathfrak{F}$ by F we mean one where all the formulae A_n are free variable formulae, and where there are effective methods of finding the verifiable $A_{\mathfrak{n}}$ (and the substitutions for the variables in A_m which make A_m false) when a proof (disproof) of $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{F}$ is at hand.

The systems considered below are:

$\mathfrak{F}_0$, the predicate calculus of first order to which verifiable free variable formulae of number theory have been added as axioms,

F_0, the elementary calculus with free variables to which the same axioms have been added,

$\mathfrak{F}_1$, the system Z_μ of [3], to which any verifiable free variable formula is added as axiom,

F_1, the system of ordinal recursive formulae ([1], para. 35) of finite order, and A is proved in F_1 if it is verifiable.

9. A *functional* of the *predicate calculus* containing the variable a, and the function symbol f is any free variable term of the predicate calculus which contains these symbols. (The definition for several variables is obvious.)

A functional of number theory Z_μ (with induction) containing the variable a, and the function symbol f is a term

$$\mu_y\,A\,[a\,f(y_1)\,y_1\,y_2]\,, \qquad y_1 = \eta_1^2(y)\,, \qquad y_2 = \eta_2^2(y)\,,$$

provided

$$(x_1)\,(E\,y_1)\,(x_2)\,(E\,y_2)\,A\,(x_1\,x_2\,y_1\,y_2)$$

has been proved in Z_μ. ($<\eta_1^2(y)\,\eta_2^2(y)>$ being the y^{th} pair in the ordering of pairs given in [3], II, 235.) $A\,(a\,b\,c\,d)$ is assumed to be primitive recursive. (The definition for function symbols $f_1(a_1), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n)$ is:

$$\mu_y\,A\,[f_1(y_1) \ldots f_n(y_1, \ldots, y_n)\,y_1, \ldots, y_n], \qquad y_i = \eta_i^{(n)}(y)$$

provided

$$(E\,y_1)\,(x_1) \ldots (E\,y_n)\,(x_n)\,A\,(x_1, \ldots, x_n\,y_1, \ldots y_n)$$

has been proved in Z_μ.)

Functionals of a number theory $\mathfrak{F}$ (containing Z_μ) are defined analogously.

10. The proofs below are carried out for formulae $\mathfrak{A}$ of the form

$$(x)\,(E\,y)\,(z)\,A\,(x, y, z)\,.$$

The (rather complicated) general definitions are given in [1]; the necessary modifications of the proofs for the special case considered are plain.

11. Theorem I. *Suppose* $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *are functionals of the predicate calculus containing* a *and* g *such that*

$$A[a, \mathfrak{y}_1, g(\mathfrak{y}_1)] \vee \ldots \vee A[a, \mathfrak{y}_n, g(\mathfrak{y}_n)] \tag{11.1}$$

is verifiable (for each a*, and for functions* g *which differ from zero for a finite number of arguments only).*

If $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{z}_i$, $1 \leq i \leq p$ *are functionals of the predicate calculus containing the function symbol* f*, then we can find free variable terms* $\underset{\sim}{f}^j$, $1 \leq j \leq q$ *such that the disjunction of the formulae*

$$A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j, \underset{\sim}{f}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_1^j] \,\&\, \ldots \,\&\, A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j, \underset{\sim}{f}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_p^j] \tag{11.2}$$

for $1 \leq j \leq q$ *is true.*

(j is a name of the function symbol, not an exponent.)

Write $\mathfrak{A}$ for $(x)\,(E\,y)\,(z)\,A(x, y, z)$, $\mathfrak{t}(a)$ for $\varepsilon_y(z)\,A(a, y, z)$, $\mathfrak{e}$ for $\varepsilon_x(y)\,(E\,z) \rightarrow A(x, y, z)$, and $\mathfrak{e}_1(b)$ for $\varepsilon_z \rightarrow A(\mathfrak{e}, b, z)$. Further let $\bar{\mathfrak{x}}$ and $\bar{\mathfrak{z}}$ denote the terms obtained by substituting $\mathfrak{t}$ for f in $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{z}$, and let $\bar{\mathfrak{y}}$ denote the term obtained by substituting $\mathfrak{e}_1$ for g in $\mathfrak{y}$.

$$A[\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{y}}_r, \mathfrak{e}_1(\bar{\mathfrak{y}}_r)] \rightarrow \mathfrak{A} \tag{11.3}$$

and

$$\mathfrak{A} \rightarrow A[\bar{\mathfrak{x}}_i, \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{x}}_i), \bar{\mathfrak{z}}_i] \tag{11.4}$$

can be proved in $\mathfrak{F}_0$ for $1 \leq r \leq n$, $1 \leq i \leq p$, and hence also

$$\begin{cases} \{A[\bar{\mathfrak{x}}_1, \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{x}}_1), \bar{\mathfrak{z}}_1] \,\&\, \ldots \,\&\, A[\bar{\mathfrak{x}}_p, \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{x}}_p), \bar{\mathfrak{z}}_p]\} \vee \\ \rightarrow \{A[\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{y}}_1, \mathfrak{e}_1(\bar{\mathfrak{y}}_1)] \vee \ldots \vee A[\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{y}}_n, \mathfrak{e}_1(\bar{\mathfrak{y}}_n)]\}. \end{cases} \tag{11.5}$$

The only ε-matrices (= Grundtypen) occurring in (11.5) are $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1(a)$, $\mathfrak{t}(a)$. When HILBERT's first ε-theorem is applied to the proof of (11.5), one gets free variable terms $\underset{\sim}{f}^j(a)$, $\underset{\sim}{g}^j(b)$, $\underset{\sim}{e}^j$, $1 \leq j \leq q$, such that the disjunction of the formulae got by substituting in (11.5) $\underset{\sim}{f}^j$ for $\mathfrak{t}$, $\underset{\sim}{g}^j$ for $\mathfrak{e}_1$, and $\underset{\sim}{e}^j$ for $\mathfrak{e}$, is verifiable. But for each j the formula

$$A[\underset{\sim}{e}^j, \underset{\sim}{\mathfrak{y}}_1^j, \underset{\sim}{g}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{y}}_1^j)] \vee \ldots \vee A[\underset{\sim}{e}^j, \underset{\sim}{\mathfrak{y}}_n^j, \underset{\sim}{g}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{y}}_n^j)]$$

is verifiable, so the disjunction of formulae

$$A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j, \underset{\sim}{f}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_1^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_1^j] \,\&\, \ldots \,\&\, A[\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j, \underset{\sim}{f}^j(\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_p^j), \underset{\sim}{\mathfrak{z}}_p^j]$$

must be true.

This proves the theorem.

12. It follows that we get a disjunctive interpretation of $\mathfrak{F}_0$ by F_0 if we associate with

$$(E\,x)\,(y)\,(E\,z) \rightarrow A(x, y, z) \tag{12.1}$$

the sequence of disjunctions

$$(12.2) \qquad \neg A[\mathfrak{x}_1, f(\mathfrak{x}_1), \mathfrak{z}_1] \vee \ldots \vee \neg A[\mathfrak{x}_p, f(\mathfrak{x}_p), \mathfrak{z}_p]$$

for all possible sets of functionals $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ containing f.

(Since Theorem I was proved for a special type of formula, we again define the interpretation for the special class of formulae (12.1). The general case is given in [1].)

Condition a(i) is checked by HERBRAND's theorem, see, e.g., [3], II.

To check condition a(ii) observe that if (12.1) is disproved in $\mathfrak{F}_0$, i.e. $(x)(E\,y)(z)\,A(x, y, z)$ is proved, by Theorem I there is a substitution of free variable terms for f which makes (12.2) false.

13. The interpretation is actually complete, since if (12.1) is provable in $\mathfrak{F}_0$, some disjunction of the form (12.2) is not only verifiable, but also provable in F_0, and, conversely, by (11.3) if (12.2) is provable in F_0 we get a proof of (12.1) in $\mathfrak{F}_0$.

Note that under our conditions a *complete interpretation is an interpretation*. For, if $\mathfrak{A}$ is proved (and $\mathfrak{F}$ is consistent), $\neg\mathfrak{A}$ cannot be proved (in any consistent extension of $\mathfrak{F}$), and hence no A_n can be proved in F. But the sequences A_n constitute an interpretation of $\mathfrak{A}$ whatever verifiable axioms may be added to $\mathfrak{F}$, provided no new symbols are added to $\mathfrak{F}$. Now by adding all verifiable formulae of $\mathfrak{F}$ to F we get, in our case, a system in which every formula of F can either be proved or disproved. Thus if no A_n can be proved in these extensions of F, each A_n must have a counter example.

14. We may observe that condition (δ) of para. 20 in [1] is easily checked. Recall that (δ) requires that some B_m should be verifiable if $\mathfrak{B}$ has been proved from $\mathfrak{A}$ (in $\mathfrak{F}$), and A_n is verifiable. Now, since by (11.3) $\mathfrak{A}$ can be proved from A_n, $\mathfrak{B}$ can also be proved from A_n, i.e. from a verifiable free variable formula of $\mathfrak{F}$. HILBERT's first ε-theorem can then be applied to provide a verifiable B_m.

15. We now turn to the analogous interpretation of Z_μ. We recall from [1] that the functionals considered are ordinal recursive of finite order.—The new point to be considered (over and above Theorem I) is the representation of functionals.

Theorem II. *Suppose $\mathfrak{y}$ is a functional of Z_μ containing the variable a, and the function symbol g, such that*

$$A[a, \mathfrak{y}, g(\mathfrak{y})]$$

is verifiable.

If $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{z}$ are also functionals of Z_μ containing the function symbol f, then we can find a function f, zero except for a finite number of arguments, such that

$$A[\mathfrak{x}, f(\mathfrak{x}), \mathfrak{z}]$$

is true.

Let $\mathfrak{y}$ be the term $\mu_y B[a, g(y_1), y_1, y_2]$, $\mathfrak{x}$ be $\mu_y B_1[f(y_1), y_1, y_2]$, $\mathfrak{z}$ be $\mu_y B_2[f(y_1), y_1, y_2]$. Let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1(b)$, $\mathfrak{t}(a)$ and bars have the same meaning as in Theorem I.

(i) Observe first that for any terms $\mathfrak{u}(a)$, $\mathfrak{v}$ of Z_μ, there is a term $\mathfrak{p}^*$ of Z_μ such that

(15.1) $$(x)\,[x \leq \mathfrak{v} \to \mathfrak{u}(x) = \nu(\mathfrak{p}^*, x)]$$

can be proved in Z_μ. Here $\nu(m, k)$ denotes the primitive recursive function whose value is 0, if $m = 0$, and is equal to the exponent of the highest power of the k^{th} prime which divides m (see [3], II, 211). — $\nu(m, k)$ is an enumeration of functions of k which are zero except for a finite number of arguments.

For $\mathfrak{p}^*$ we may take

$$\mu_y(x)\,[x \leq \mathfrak{v} \to \mathfrak{u}(x) = \nu(y, x)]\,.$$

One proves (15.1) by induction. Let $\mathfrak{C}(n)$ denote

$$(E\,y)(x)\,[x \leq n \to \mathfrak{u}(x) = \nu(y, x)].$$

$\mathfrak{C}(0)$ can be proved since we need merely take $\mathfrak{p}^* = 2^{\mathfrak{u}(0)}$.

Next we prove $\mathfrak{C}(n) \to \mathfrak{C}(n+1)$ (in Z_μ).

(15.2) $$(x)\,[x \leq n \to \mathfrak{u}(x) = \nu(a, x)] \to (x)\,\{x \leq n+1 \to \mathfrak{u}(x) = \nu[a_1 \mathfrak{p}_{n+1}^{\mathfrak{u}(n+1)}, x]\},$$

where a_1 is got from a by suppressing powers of the m^{th} prime (p_m) for $m > n$. (Proof clear.)

Now, from (15.2), eliminating $a_1 \mathfrak{p}_{n+1}^{\mathfrak{u}(n+1)}$ by an existential quantifier we get

$$(x)\,[x \leq n \to \mathfrak{u}(x) = \nu(a, x)] \to (E\,y)\,(x)\,[x \leq n+1 \to \mathfrak{u}(x) = \nu(y, x)];$$

on binding the variable a, $\mathfrak{C}(n) \to \mathfrak{C}(n+1)$ is proved.

(This argument can be extended to terms with several variables. It replaces the absurdly complicated work of para. 33 in [1].)

(ii) For any term $\mathfrak{u}(a)$ of Z_μ we can write down a term $\mathfrak{p}^*$ such that if $\mathfrak{y}^*$ denotes $\mu_y B[a, \mathfrak{u}(y_1), y_1, y_2]$, and $\lambda(a, r, s)$ denotes the *primitive recursive function* which is represented by

$$\mu_y\{B[a, \nu(r, y_1), y_1, y_2] \,\&\, y \leq s\},$$

and $\mathfrak{p}^*$ denotes the term of (i) such that

$$(x)\,[x \leq \mathfrak{y}^* \to \nu(\mathfrak{p}^*, x) = \mathfrak{u}(x)] \text{ is provable in } Z_\mu:$$

then also

$$B[a, \mathfrak{u}(\mathfrak{y}_1^*), \mathfrak{y}_1^*, \mathfrak{y}_2^*],\ \mathfrak{y}^* = \lambda(a, \mathfrak{p}^*, \mathfrak{y}^*),\ \mathfrak{u}(\mathfrak{y}_1^*) = \nu(\mathfrak{p}^*, \mathfrak{y}_1^*)$$

can be proved in Z_μ. The first follows from the hypothesis that

$$(x_1)\,(E\,y_1)\,(x_2)\,(E\,y_2)\,B(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

can be proved in Z_μ, the second and third from the definition of $\mathfrak{p}^*$.

In particular, we have:

(15.3) $$B[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1(\overline{\mathfrak{y}}_1), \overline{\mathfrak{y}}_1, \overline{\mathfrak{y}}_2],\quad \overline{\mathfrak{y}} = \lambda(\mathfrak{e}, \mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{y}}),\quad \mathfrak{e}_1(\overline{\mathfrak{y}}_1) = \nu(\mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{y}}_1),$$

where

$$(x)\,[x \leq \overline{\mathfrak{y}} \to \mathfrak{e}_1(x) = \nu(\mathfrak{p}, x)];$$

and if $\lambda_i(r, s)$ denotes

$$\mu_y\{B_i[\nu(r, y_1), y_1, y_2] \,\&\, y \leq s\},$$

$$i = 1, 2,\ (x)\,[x \leq \max(\overline{\mathfrak{x}}, \overline{\mathfrak{z}}) \to \mathfrak{t}(x) = \nu(\mathfrak{p}_1, x)],$$

then

$$B_1[\mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}_1), \overline{\mathfrak{x}}_1, \overline{\mathfrak{x}}_2],\quad B_2[\mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{z}}_1), \overline{\mathfrak{z}}_1, \overline{\mathfrak{z}}_2],$$

and

$$\overline{\mathfrak{x}} = \lambda_1(\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{x}}),\quad \overline{\mathfrak{z}} = \lambda_2(\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{z}}),\quad \mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}_1) = \nu(\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{x}}_1) \tag{15.4}$$

can also be proved in Z_μ.

Note that *if* $B\{a, \nu\{r, \eta_1^2[\lambda(a, r, s)]\}, \eta_1^2[\lambda(a, r, s)], \eta_2^2[\lambda(a, r, s)]\}$ holds, then $\lambda(a, r, s)$ is the *value* of the functional $\mathfrak{y}$ for the arguments a and $\nu(r, b)$ (with the free variable b).

(iii) Recall from Theorem I that the formulae

$$A[\mathfrak{e}, \overline{\mathfrak{y}}, \mathfrak{e}_1(\overline{\mathfrak{y}})] \to \mathfrak{A}, \tag{15.5}$$

and

$$\mathfrak{A} \to A[\overline{\mathfrak{x}}, \mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}), \overline{\mathfrak{z}}] \tag{15.6}$$

can be proved in Z_μ.

Now, apply ACKERMANN's substitution method to the proofs of (15.3), (15.4), (15.5) and (15.6). It yields numbers e, p, p_1 (for $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{p}$, and $\mathfrak{p}_1$), and also numerical substitutions for the terms $\overline{\mathfrak{x}}$, $\overline{\mathfrak{y}}$, and $\overline{\mathfrak{z}}$, which reduce all formulae of the proofs considered to correct numerical formulae. In particular, from (15.3), the number substituted for $\lambda(\mathfrak{e}, \mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{y}}_1)$ is the value of the functional $\mathfrak{y}$ when a is replaced by e, and the function $g(b)$ by $\nu(p, b)$. Since $A[a, \mathfrak{y}, g(\mathfrak{y})]$ is assumed to be verifiable, $A[e, \mathfrak{y}, \nu(p, \mathfrak{y})]$ is true where $\mathfrak{y}$ denotes the number substituted for λ. By (15.5), $\mathfrak{A}$ is replaced by a correct numerical formula, and hence, by (15.6), also $A[\overline{\mathfrak{x}}, \mathfrak{t}(\overline{\mathfrak{x}}), \overline{\mathfrak{z}}]$. But, as above, the numbers substituted for $\overline{\mathfrak{x}}$ and $\overline{\mathfrak{z}}$ are the values of the functionals $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{z}$ with the argument $\nu(p_1, b)$. Thus $\nu(p_1, b)$ is the function $f(b)$ required.

This proves the theorem, and the construction of a complete disjunctive interpretation follows the pattern of para. 12.

16. Note that the proof does not need the ε-symbol. We could replace (15.3)—(15.6) by the formula

$$\begin{aligned}
&(E\,e)\,(E\,p)\,(E\,p_1)\,(E\,x)\,(E\,y)\,(E\,z)\\
&\{A\{\lambda_1(p_1, x),\ \nu[p_1, \lambda_1(p_1, x)],\ \lambda_2(p_1, z)\} \vee\\
&\to A\{e,\ \lambda(e, p, y),\ \nu[p, \lambda(e, p, y)]\} \cdot \&\\
&B\{e,\ \nu[p, \eta_1^2(\lambda)],\ \eta_2^2(\lambda),\ \eta_2^2(\lambda)\} \,\&\, B_1[\nu(p_1, \lambda_{11}),\ \lambda_{11},\ \lambda_{12}] \,\&\\
&B_2[\nu(p_1, \lambda_{21}),\ \lambda_{21},\ \lambda_{22}]\},
\end{aligned} \tag{15.7}$$

λ_{ij} denoting $\eta_j^2(\lambda_i)$,

where the expression following the quantifiers is primitive recursive. Now Theorem II will follow if we can find numerals $e, p; p_1, x, y, z$ which satisfy (15.7). Hence Theorem II will be true of any formal system $\mathfrak{F}$ in which the formula (15.1) can be proved, and if a formula $(E\,x)\,A(x)$ with primitive recursive A has been proved there is a numeral $\mathfrak{n}$ such that $A(\mathfrak{n})$ is true.

17. Note further that the proof of Theorem II also applies if by a *verifiable* formula $A[a, \mathfrak{y}, g(\mathfrak{y})]$ we understand one which is verifiable for functions which are zero except for a finite number of arguments. If $\mathfrak{y}(a, p)$ denotes the term $\mu_y B[a, r(p, y_1), y_1, y_2]$ we get a *disjunctive interpretation* of Z_μ by *formulae without function symbols* if we associate with $(x)\,(E\,y)\,(z)\,A(x, y, z)$ the sequence $A\{a, \mathfrak{v}_n(a, p), r[p, \mathfrak{v}_n(a, p)]\}$ where $\mathfrak{v}_n$ is an enumeration of functionals of Z_μ with one individual variable, and one function variable.

18. The result of para. 17 may, roughly, be expressed by saying: if a formula contains none but our functionals, i.e. those of the predicate calculus, and those of Z_μ, and is verifiable for the functions $r(p, b)$, $p = 0, 1, \ldots$, it will be verifiable for "all" functions. For this it is necessary to impose some restriction on functionals; consider, e.g., as in footnote 9 of [1], the functional $\mathfrak{z}_c[f(c)]$

$$\mu_z\{\neg\,\mathrm{Prov}\,[f(z_1), s(z_1, z_1)]\ \&\ \mathrm{Prov}\,[z_2, s(z_1, z_1)]\} \tag{18.1}$$

where Prov (a, b) holds if and only if a is the number of a proof in Z_μ of the formula with number b, and $s(a, b)$ is GÖDEL's substitution function. If $f(b)$ is quasi recursive we can always find numbers $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{y}$ such that

$$\neg\,\mathrm{Prov}\,[f(\mathfrak{y}), s(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})] \quad \text{and} \quad \mathrm{Prov}\,(\mathfrak{x}, s(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})] \tag{18.2}$$

(by a diagonal argument, see appendix I of [1]). Going through the pairs of numbers preceding $\langle \mathfrak{y}, x\rangle$ in the ordering $\langle \eta_1^2(z), \eta_2^2(z)\rangle$ we find the value of (18.1).—The formula

$$\neg\,\mathrm{Prov}\,[f(\mathfrak{z}_1), s(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)]\ \&\ \mathrm{Prov}\,[\mathfrak{z}_2, s(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)]$$

is verifiable for quasi recursive functions $f(b)$, but not for functions computable in informal systems (cf. [6]).

Another point which is illustrated by the term (18.1) is that an ε-substitution method cannot generally be modified so as to replace a term $\mathfrak{z}_c[\mathfrak{e}(c)]$ with an ε-matrix $\mathfrak{e}(c)$ by the value of $\mathfrak{z}_c[e(c)]$ when $\mathfrak{e}(c)$ is replaced by the function $e(c)$. This was the crucial point (ii) in the proof of Theorem II.

19. It would be very interesting to have a definition of "computable functional" without reference to a particular formal system. Para. 18 shows that the most natural modification of the usual idea of "computable functions" is inappropriate.

III. External Consistency.

20. We take $\mathfrak{M}$ to be the class of quasi recursive functions. We use the representation of [3], II, 410, in the form $\nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}(l, n, x) = 0]\}$; sometimes we use instead of $\mathfrak{h}(l, n, x)$ the function $\mathfrak{h}_1(l, n, x)$ which is defined by the

conditions: $\mathfrak{h}_1(l, n, x) = \mathfrak{h}(l, n, x)$ if $\mathfrak{h}(l, n, y) \neq 0$ for all $y < x$, and $\mathfrak{h}_1(l, n, x) = 1$ otherwise. $\mathfrak{h}_1(l, n, x)$ is also primitive recursive.

If a_i denotes $\eta_i^{(n)}(a)$, α_i denotes $\eta^{(i)}(a_1, \ldots, a_i)$, $f_i(a_1, \ldots, a_i)$ may be represented by $\nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}_1(l_i, \alpha_i, x) = 0]\}$, and the $2n$-tuple

$$\langle \cdots a_i \ldots, \ldots \nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}_1(l_i, \alpha_i, x) = 0]\} \cdots \rangle$$

$1 \leq i \leq n$, has the number $\nu_0\{\mu_x[\mathfrak{h}_1(l, a, x) = 0]\}$ (for suitable l).

Then $(E\,x_1) \ldots (E\,x_n)\, A[x_1, \ldots, x_n\, f_1(x_1) \ldots f_n(x_1, \ldots, x_n)]$ is equivalent in Z_μ to

$$(E\,x)(E\,y)\{\mathfrak{h}_1(l, x, y) = 0 \,\&\, A\{\eta_1^{2n}[\nu_0(y)] \ldots, \ldots \eta_{2n}^{2n}[\nu_0(y)]\}\}.$$

Note that the expression following the quantifiers is primitive recursive. (This is the standard reduction of variables which applies to Z_μ.)

21. From the second definition of external consistency (with respect to quasi recursive functions) and the preceding paragraph it follows that $\mathfrak{F}$ is externally consistent if there is a numeral $\mathfrak{n}$ such that $A(\mathfrak{n})$ holds whenever $(E\,x)\,A(x)$ has been proved in $\mathfrak{F}$ for *primitive recursive* A.

(In the next section it will be seen that this result does not hold if $\mathfrak{M}$ includes certain functions which are computable in informal systems.)

22. If $\mathfrak{F}$ has the no-counter example-interpretation the condition of para. 21 is satisfied. Hence if there is such an interpretation, $\mathfrak{F}$ is externally consistent with respect to $\mathfrak{M}$.

23. Conversely, by para. 16, if $\mathfrak{F}$ is externally consistent [and if the proofs of (i) and (ii) of Theorem II are valid in $\mathfrak{F}$, e.g. if $\mathfrak{F}$ contains Z_μ], $\mathfrak{F}$ has the no-counter example-interpretation.

24. General Remark. The no-counter-example-interpretation, and the condition of external consistency of $\mathfrak{F}$ both ensure that proved formulae (6.1) of $\mathfrak{F}$ do not conflict too sharply with the *naive reading* of (6.1) as:

For any (recursive integer) x, there is a y_1 such that ...

$$A(x_1, \ldots, x_n\, y_1, \ldots, y_n)$$

holds. (A "recursive integer" is a term which can be proved equal to a numeral, in the system considered.)

[This naive reading almost falls under the concept of disjunctive interpretation if with (6.1) of $\mathfrak{F}$ is associated the class of formulae (6.2): such an association is in any case no interpretation in the sense of para. 5 because the class of formulae (6.2) is not recursively enumerable.]

The naive reading is false if $\mathfrak{F}$ includes the predicate calculus and primitive recursive formulae, since

$$(x)(E\,y)(z)\{\mathrm{Prov}[y, s(x, x)] \vee \neg\, \mathrm{Prov}[z, s(x, x)]\}$$

can be proved in $\mathfrak{F}$, but is not satisfied by any quasi recursive $y(x)$ (see para. 18, and appendix I of [1]).

Now, external consistency requires that if a formula (6.2) is verifiable, (6.1) cannot be disproved in $\mathfrak{F}$.

The no-counter example-interpretation ensures that if (6.1) has been disproved, no formula (6.2) can be verifiable, i.e. given any set of functions $f_1(a_1), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n)$ we can find counter examples to (6.2); these depend in a simple manner on the functions f.—This is condition a(i) of para. 5.

Further, if (6.1) has been proved, and counter examples to (6.2) in the form of functionals $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ of $\mathfrak{F}$ with the arguments $f_1, \ldots, f_n$ are proposed (such that $A[\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n f_1(\mathfrak{x}_1) \ldots f_n(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)]$ is to be false), we can counter with functions $\tilde{f}$ which make $A[\tilde{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}_n \tilde{f}_1(\tilde{\mathfrak{x}}_1) \ldots \tilde{f}_n(\tilde{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}_n)$ true.—This is condition a(ii) of para. 5.

IV. Ω-Consistency.

25. Z_μ is not ω-consistent in the strong sense, see, e.g., para. 13 of [8]. Below we consider only ω-consistency in the weak sense.

26. As usual we call a function $f(n)$ representable in $\mathfrak{F}$ if there is a term $t(a)$ of $\mathfrak{F}$ with the free variable a such that $t(n) = m$ with recursive integers n and m can be proved in $\mathfrak{F}$ if and only if the value of $f(n)$ is m.

Theorem III. *If the functions f of $\mathfrak{M}$ are representable in $\mathfrak{F}$, and if $\mathfrak{F}$ is ω-consistent, $\mathfrak{F}$ is also externally consistent with respect to $\mathfrak{M}$.*

Lemma. *If $\mathfrak{A}(n)$ is decidable in $\mathfrak{F}$ for each recursive integer n, $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$ has been proved in $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{F}$ is ω-consistent, there must be a recursive integer n such that $\mathfrak{A}(n)$ can be proved in $\mathfrak{F}$.*

$\mathfrak{A}(n)$ can either be proved or disproved in $\mathfrak{F}$. If the lemma were false, $\neg\mathfrak{A}(n)$ could be proved for each recursive n, contrary to the assumption of ω-consistency.

[Keeping more closely to the definition of para. 7, we define $p(n)$ to be the number of the shortest proof of either $\mathfrak{A}(n)$ or of $\neg\mathfrak{A}(n)$: by the condition of decidability, $p(n)$ is computable, and quasi recursive if, e.g., proofs of $\mathfrak{F}$ are recursively enumerable. Then we find an n such that $p(n)$ is not number of a proof of $\neg\mathfrak{A}(n)$ i.e. $\mathfrak{A}(n)$ can be proved in $\mathfrak{F}$.]

Now, take for $\mathfrak{A}(m)$ the formula $A[m_1, \ldots, m_n\, t_1(m_1) \ldots t_n(m_1, \ldots, m_n)]$ where m_i denotes $\eta_i^{(n)}(m)$.

27. The converse is not true.

Theorem IV. *There is a formula $\mathfrak{Q}$ of Z_μ of the form $(E\,x)\,(y)\,(E\,z)\,Q(x, y, z)$, Q primitive recursive such that the system $\mathfrak{F}$ consisting of Z_μ to which $\mathfrak{Q}$ has been added as an axiom, is externally consistent with respect to quasi recursive functions but not ω-consistent.*

Actually, for each recursive n, $(E\,y)\,(z)\neg Q(n, y, z)$ can be proved in Z_μ. Consider the formula

$$(27.1)\quad (E\,p)\,(E\,l)\,(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1(l, n, m) = 0\ \&\ \nu_0(m) \neq 0\ \&\ \mathrm{Prov}[s(b, b), p, N(l)]\}\,,$$

where b is a free variable, Prov (a, b, c) holds if and only if b is the number of a proof in Z_μ of the formula with number c from the formula with number a, $N(l)$ is the number of the formula

$$(E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(0^l, y, z) = 0\ \&\ \nu_0(z) = 0]$$

with the standard integer $0', = l$, and $\mathfrak{h}_1$, r, s are primitive recursive functions already defined in the text.

If $\mathfrak{p}$ is the number of the formula (27.1), and $\mathfrak{q}$ denotes $s(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$, $\mathfrak{Q}$ is the formula

$$(E\,\mathfrak{p})\,(E\,l)\,(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1(l, n, m) = 0\ \&\ r_0(m) \neq 0\ \&\ \mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, N(l)]\}.$$

Now, $\mathfrak{F}$ is externally consistent. If not, by para. 20 there would be a formula

$$(E\,m)\,(E\,x).\,[\mathfrak{h}_1(l_0, x, m) = 0\ \&\ r_0(m) = 0]$$

for a certain l_0, which can be proved in $\mathfrak{F}$ by a proof with number $\mathfrak{p}_0$, and

$$r_0\{\mu_x\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, x) = 0]\}$$

would be computable, i.e. for each recursive n there would be a recursive m such that $\mathfrak{h}_1(l_0, n, m) = 0$, yet for all n

$$r_0\{\mu_x\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, x) = 0]\} \neq 0.$$

In other words, $\mathfrak{Q}$ would be satisfied by the numbers $\mathfrak{p}_0$, l_0, and the function $\mu_x\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, x) = 0]$ for m. This is impossible, since by [7] and [I] Z_μ remains externally consistent if a formula with a quasi recursive *Erfüllung* is added to it as an axiom.

However, $\mathfrak{F}$ is not ω-consistent. Take any two numbers $\mathfrak{p}_0$ and l_0:

If $\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]$ is false [it can be decided systematically, since $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}_0, N(l_0)$, are recursive integers], the formula

$$(n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1\,(l_0, n, m) = 0\,\&\,r_0(m) \neq 0\,\&\,\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]\}$$

can be disproved (already by the propositional calculus).

If $\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]$ is correct, one can prove

$$(27.2) \qquad (n)\,(E\,m)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, n, m) = 0\,\&\,r_0(m) \neq 0] \to \mathfrak{Q}$$

in Z_μ. But since $\mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]$ holds, $\mathfrak{p}_0$ is the number of a proof in Z_μ of the formula

$$(27.3) \qquad \mathfrak{Q} \to (E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\ \&\ r_0(z) = 0].$$

From (27.2) and (27.3)

$$(E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\,\&\,r_0(z) = 0] \vee \to (y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\,\&\,r_0(z) \neq 0].$$

But by the "uniqueness" condition on $\mathfrak{h}_1$

$$(E\,y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\ \&\ r_0(z) = 0] \to (E\,y)\,(z)\,[r_0(z) = 0 \vee \mathfrak{h}_1(l_0, y, z) \neq 0]$$

i.e. $$\to (y)\,(E\,z)\,[\mathfrak{h}_1(l_0, y, z) = 0\ \&\ r_0(z) \neq 0].$$

Hence again we get a proof in Z_μ of

$$\to (n)\,(E\,m)\,\{\mathfrak{h}_1(l_0, n, m) = 0\ \&\ r_0(m) \neq 0\ \&\ \mathrm{Prov}\,[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_0, N(l_0)]\}.$$

This proves the theorem.

28. It should be observed that if Z_μ is ω-consistent (in the weak sense), Theorem IV is best possible; that is, a system $\mathfrak{F}$ consisting of Z_μ with $\mathfrak{Q}_1$ as an axiom where $\mathfrak{Q}_1$ contains only *two* quantifiers, is ω-consistent if it is externally consistent with respect to quasi recursive functions. For the addition of a formula $(x)\,(E\,y)\,Q_1(x, y)$ to Z_μ leaves Z_μ externally consistent only if there is a quasi recursive $f(a)$ such that $Q[a, f(a)]$ is verifiable (trivial).

29. Remark. In [6], p. 100, 4.34, MOSTOWSKI raises the question whether there are systems where there is no case of an ω-inconsistency with decidable formulae $\mathfrak{A}(n)$, but there are such cases with general $\mathfrak{A}(n)$.

(i) If we consider strong ω-consistency, Z_μ is a case in point.

(ii) If we consider weak ω-consistency, and mean by "decidable" decidable in the system, there can be no such case: for an instance of ω-inconsistency would be a formula $\mathfrak{A}(n)$ such that in the system we can prove $(E\,y)\,\mathfrak{A}(y)$, and, for each recursive n, also $\neg\,\mathfrak{A}(n)$ i.e. $\mathfrak{A}(n)$ would be decidable (and false).

(iii) If by "decidable" we mean quasi recursive, and $\mathfrak{A}(n)$ is of the form $A[n, f(n)]$, the system $Z_\mu + \mathfrak{Q}$ of Theorem IV is an example.

30. Final Note. The question "whether there are true formulae of arithmetic which are unprovable" might be formulated by the use of the concepts of external consistency and ω-consistency as follows: by "formulae of arithmetic" we mean formulae of Z_μ, by "true" we mean, e.g., true in TARSKI's sense [9], and by "provable" we mean provable in an externally consistent (or ω-consistent) extension of Z_μ. This however makes the question totally uninteresting: if $\mathfrak{A}$ is true, the system Z_μ with $\mathfrak{A}$ as an axiom is ω-consistent (according to [9]), and in this system $\mathfrak{A}$ is proved trivially, since it is an axiom.

References.

[1] KREISEL, G.: On the interpretation of non finitist proofs. J. Symb. Logic **16**, 4 (1951); **17**, 1 (1952). — [2] KREISEL, G.: On the concepts of completeness and interpretation of formal systems. Fundamenta mathematicae **39** (1952). — [3] HILBERT, D. and P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik. Vol. I, Berlin 1934; vol. II, Berlin 1939. — [4] GÖDEL, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Pfincipia Mathematica und verwandter Systeme. I. Mh. Math. Phys. **38**, 173—198 (1931). — [5] RUSSELL, B.: The Principles of Mathematics, p. 3. London 1937. — [6] MOSTOWSKI, A.: On definable sets of positive integers. Fundamenta mathematicae **34**, 81—112 (1947). — [7] ACKERMANN, W.: Zur Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **117**, 162—194 (1940). — [8] KREISEL, G.: Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. Fundamenta mathematicae **37**, 265—285 (1950). — [9] TARSKI, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philosophica **1**, 261—405 (1936).

The University, Reading (England).

(Eingegangen am 17. Januar 1952.)

KÖTHE, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 13—33 (1952)

Die Randverteilungen analytischer Funktionen.

Von
GOTTFRIED KÖTHE

Die vorliegende Arbeit setzt frühere Untersuchungen [5][1]) fort, die an Arbeiten von J. S. e SILVA [7] und O. TOEPLITZ [9] anschließen. Die hier verwendeten Resultate aus [5] wurden auch unabhängig von C. DIAS [2] und A. GROTHENDIECK [3] erhalten.

Ist C eine analytische geschlossene Kurve auf der RIEMANNschen Zahlenkugel Ω, so bilden die auf C analytischen Funktionen einen lokalkonvexen linearen Raum $\mathfrak{A}(C)$. Der duale Raum $\mathfrak{A}'(C)$ wurde in [5] dargestellt als der Raum $P(\Omega - C)$ der in $\Omega - C$ lokalanalytischen Funktionen. Es werden hier in einem gewissen Gegensatz dazu die Elemente u von $\mathfrak{A}'(C)$ als auf C selbst erklärte mathematische Größen aufgefaßt, die wir als die Randverteilungen auf C bezeichnen. Dies entspricht ganz dem Vorgehen von L. SCHWARTZ [6] im Fall der Distributionen. Es zeigt sich, daß die einer Randverteilung u entsprechende lokalanalytische Funktion $\tilde{u} \in P(\Omega - C)$ bei Annäherung an den Rand C gegen diese Randverteilung konvergiert und umgekehrt $\tilde{u}$ durch seine Randverteilung auf C bestimmt ist. In diesem Sinn besitzt jede innerhalb C, ebenso jede außerhalb C analytische Funktion eine Randverteilung auf C. Diese Randverteilungen sind also die allgemeinsten „Randwerte", die bei analytischen Funktionen auftreten.

Die Konvergenz von $\tilde{u}$ gegen seine Randverteilung u ist eine sehr schwache im allgemeinen Fall, schränkt man die Randverteilungen jedoch ein, so wird die Konvergenz stärker. Es wird hier vor allem der in diesem Zusammenhang besonders interessierende Fall untersucht, daß als Randverteilungen die Distributionen auf C zugelassen sind. Es gilt, daß alle Distributionen Randverteilungen auf C sind, die Randverteilungen auf C stellen also eine Verallgemeinerung des Distributionsbegriffs dar. Es zeigt sich ferner, daß jede Distribution auf C eindeutig in die Summe zweier Distributionen zerfällt, deren eine die Randverteilung einer innerhalb C analytischen Funktion ist, die andere die einer außerhalb C analytischen Funktion, und die Konvergenz gegen den Rand ist die Konvergenz der Distributionentheorie. Die analytischen Funktionen mit Distributionen als Randverteilungen lassen sich funktionentheoretisch in einfacher Weise als die langsam gegen den Rand wachsenden Funktionen charakterisieren.

Damit ist umgekehrt für die Distributionen auf C eine sehr anschauliche Deutung gewonnen, man kann sie sogar mit den Paaren analytischer Funktionen, deren Randverteilung sie sind, identifizieren.

[1]) Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Doch sei ausdrücklich betont, daß stets vorausgesetzt wird, daß C nicht durch den Punkt ∞ geht, unsere Resultate beziehen sich also nicht auf den Fall der reellen Geraden G. Auch in diesem Fall kommen wir zu Randverteilungen auf G, die jedoch nicht alle Distributionen auf G als Spezialfälle umfassen, sondern eine andere Art von Größen auf G sind, auf die ich an anderer Stelle zurückzukommen hoffe.

Wir benützen die Theorie der (F)-Räume, wie sie in allgemeiner Form in [1] entwickelt wurde, ziehen aber auch vielfach die speziellere Theorie der vollkommenen Räume aus [4] heran, die im Fall des Einheitskreises besonders einfach zum Ziel führt. Aus der Theorie der Distributionen wird nichts benützt.

1. *Die Räume* $\mathfrak{A}(C)$. Ω bezeichne die RIEMANNsche Zahlenkugel, K den Einheitskreis, $\mathfrak{K}$ das Innere, $\Omega - \overline{\mathfrak{K}}$ das Äußere von K. C sei im folgenden eine einfach geschlossene rektifizierbare Jordankurve, die meist als analytisch vorausgesetzt wird, C geht also nicht durch den Punkt ∞; $\mathfrak{C}$ sei das Innere von C.

Die Gesamtheit der auf C analytischen Funktionen $x(z)$ bildet einen linearen Raum $\mathfrak{A}(C)$, in dem nach [5] folgendermaßen eine Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ eingeführt wird: C_n', C_n'' seien analytische einfach geschlossene Kurven in $\mathfrak{C}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, zwischen denen C liegt; die von C_n' und C_n'' begrenzte abgeschlossene Menge, die C enthält, sei mit $\mathfrak{R}_n$ bezeichnet. Es sei $\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n = C$.

Mit $B(\mathfrak{R}_n)$ wird der Banachraum aller im Innern von $\mathfrak{R}_n$ analytischen und auf dem Rande noch stetigen Funktionen $x(z)$ bezeichnet mit der Norm

$$||x(z)||_n = \sup_{z \in \mathfrak{R}_n} |x(z)|. \tag{1}$$

$\mathfrak{A}(C)$ ist die Vereinigungsmenge aller $B(\mathfrak{R}_n)$, wenn man Funktionen aus verschiedenen $B(\mathfrak{R}_n)$ identifiziert, die auf C übereinstimmen. Die Topologie von $\mathfrak{A}(C)$ ist nun die der lokalkonvexen Hülle der $B(\mathfrak{R}_n)$, d.h. die Nullumgebungen in $\mathfrak{A}(C)$ sind die Mengen

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U^{(n)}, \tag{2}$$

$U^{(n)}$ eine Nullumgebung $||x(z)||_n \leq \varepsilon_n$ aus $B(\mathfrak{R}_n)$, U die absolutkonvexe Hülle der $U^{(n)}$, d.h. die Menge aller Funktionen

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k, \qquad x_i \in U^{(i)}, \qquad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leq 1, \qquad k \text{ beliebig.}$$

Eine Folge $x^{(n)} \in \mathfrak{A}(C)$ ist genau dann konvergent im Sinn von $\mathfrak{T}^{(0)}$ gegen ein $x^{(0)} \in \mathfrak{A}(C)$, wenn alle $x^{(n)}$ und $x^{(0)}$ auf einem geeigneten $\mathfrak{R}_k$ analytisch sind und die $x^{(n)}$ auf $\mathfrak{R}_k$ gleichmäßig gegen $x^{(0)}$ konvergieren.

Es ist klar, daß die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ zwar die Werte der $x(z)$ außerhalb von C benützt, sie ist aber durch die Werte auf C eindeutig bestimmt. Es ist für das Folgende wichtig, sich vor Augen zu halten, daß die Elemente von $\mathfrak{A}(C)$ streng genommen nur Funktionen $x(t)$ von t auf C sind.

Die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge $\mathfrak{R}_n$ ab[2]).

2. *Die Randverteilungen auf C.* Als linearer lokalkonvexer Raum hat $\mathfrak{A}(C)$ einen dualen Raum $\mathfrak{A}'(C)$. Dessen Elemente sind also komplexwertige Linearfunktionen $u[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$, die im Sinn von $\mathfrak{T}^{(0)}$ auf $\mathfrak{A}(C)$ stetig sind, d.h. es gibt zu jedem $u \in \mathfrak{A}'(C)$ ein U der Form (2) mit

$$\sup_{x \in U} |u[x]| \leq 1. \tag{3}$$

Nach der Bemerkung vor Nr. 5 in [5] kann man eine stetige Linearfunktion u auf $\mathfrak{A}(C)$ aber auch schon durch die schwächere Forderung erklären, daß für jede Folge $x^{(n)} \in \mathfrak{A}(C)$, die auf einem der $\mathfrak{R}_k$ gleichmäßig gegen ein $x^{(0)} \in \mathfrak{A}(C)$ konvergiert, stets $u[x^{(n)}]$ den Grenzwert $u[x^{(0)}]$ besitzt. Diese auf SILVA [7] zurückgehende Formulierung ist für die Anwendungen natürlich besonders bequem.

Ist $h(t)$ eine auf C integrable Funktion, so wird durch

$$h[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_C h(t)\, x(t)\, dt, \qquad x(t) \in \mathfrak{A}(C), \tag{4}$$

offenbar eine solche stetige Linearfunktion erzeugt, gewissen Elementen u von $\mathfrak{A}'(C)$ wird man also durch einen Ausdruck der Form (4) Funktionen auf C zuordnen können, doch nicht allen.

Es ist daher naheliegend nach dem Vorbild von L. SCHWARTZ [6] die Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$ als verallgemeinerte Funktionen auf C anzusehen, also als auf C erklärte mathematische Größen, die zwar nicht jedem Punkt auf C eine komplexe Zahl als Funktionswert zuordnen, wohl aber jeder auf C analytischen Funktion. Als Größen auf C mögen die Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$ aus einem später ersichtlichen Grund als *Randverteilungen auf C* bezeichnet werden.

Diese Randverteilungen auf C sind eine Verallgemeinerung der SCHWARTZschen Distributionen auf C, wie wir nun zeigen.

Wir setzen jetzt voraus, daß C analytisch ist, d.h. eine Darstellung $t = t(s)$ mit analytischen $t(s)$ und $s(t)$, $s \in K$, $t \in C$, besitzt. Es bezeichne $\mathfrak{E}(C)$ den linearen Raum aller auf C erklärten unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f(t)$. Auf ihm werde nach [6] durch die Folge der Normen

$$|||f|||_p = \sup_{t \in C} \left| \frac{d^p f}{dt^p} \right|, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

eine Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ eingeführt. $\mathfrak{E}(C)$ ist ein (F)-Raum bezüglich $\mathfrak{T}^{(1)}$.

Durch die Zuordnung

$$f(t) \to g(s) = f\big(t(s)\big) \tag{6}$$

ist dann $\mathfrak{E}(C)$ topologisch isomorph auf $\mathfrak{E}(K)$ abgebildet, wie sich sofort aus der beliebigen Differenzierbarkeit von $t(s)$ und $s(t)$ ergibt.

[2]) Diese Topologie wurde auch unabhängig von L. VAN HOVE eingeführt, vgl. seine in den Mémoires de l'Acad. royale de Belgique erscheinende Arbeit „Topologie des espaces fonctionnels analytiques et des groupes infinis de transformations".

(6) ordnet auch die Teilräume $\mathfrak{A}(C)$ und $\mathfrak{A}(K)$ isomorph bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ einander zu.

Satz 1. *Ist C analytisch, so ist $\mathfrak{A}(C)$ ein in $\mathfrak{E}(C)$ im Sinn von $\mathfrak{T}^{(1)}$ dichter linearer Teilraum. $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist auf $\mathfrak{A}(C)$ gröber als $\mathfrak{T}^{(0)}$.*

Beweis. $\mathfrak{A}(C)$ ist offenbar linearer Teilraum von $\mathfrak{E}(C)$ und jede $\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung, die aus allen $x(t) \in \mathfrak{A}(C)$ mit $|||x|||_p \leq \varepsilon$, $p = 1, \ldots, n$, besteht, umfaßt, wie leicht zu sehen, eine geeignete Umgebung (2), die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist auf $\mathfrak{A}(C)$ also gröber als die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$. Bleibt zu zeigen, daß jedes $f(t) \in \mathfrak{E}(C)$ durch Elemente $x(t)$ aus $\mathfrak{A}(C)$ im Sinn von $\mathfrak{T}^{(1)}$ beliebig genau angenähert werden kann. Nach der Bemerkung vor Satz 1 genügt es, dies für $\mathfrak{E}(K)$ zu zeigen.

Wir können die Elemente $f(s) \in \mathfrak{E}(K)$ auch als periodische Funktionen $\hat{f}(\varphi) = f(e^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, schreiben, dann ist die durch die Normen

$$(\hat{f})_p = \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left| \frac{d^p \hat{f}}{d\varphi^p} \right| \tag{7}$$

in $\mathfrak{E}(K)$ eingeführte Topologie wieder $\mathfrak{T}^{(1)}$. Ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{in\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n s^n \tag{8}$$

die FOURIER-Reihe von $\hat{f}(\varphi)$, so ist die FOURIER-Reihe von $\frac{d^p \hat{f}}{d\varphi^p}$ gleich

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' i^p n^p \xi_n e^{in\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' i^p n^p \xi_n s^n \text{ [3]} \tag{9}$$

und alle diese Reihen sind gleichmäßig konvergent gegen die zugehörigen $\frac{d^p \hat{f}}{d\varphi^p}$. Die Folge $\hat{f}^N(\varphi) = \sum_{-N}^{+N} \xi_n e^{in\varphi}$, deren Glieder als p-te Ableitung den N-ten Abschnitt von (9) haben, konvergiert also im Sinn der Normen (7) gegen $\hat{f}(\varphi)$, d.h. die in $\mathfrak{A}(K)$ liegende Folge $f^N(s) = \sum_{-N}^{+N} \xi_n s^n$ konvergiert im Sinn von $\mathfrak{T}^{(1)}$ gegen $f(s)$, $\mathfrak{A}(K)$ ist in $\mathfrak{E}(K)$ dicht.

Satz 2. *Ist C analytisch, so ist der Raum $\mathfrak{E}'(C)$ der Distributionen auf C ein Teilraum des Raumes $\mathfrak{A}'(C)$ der Randverteilungen auf C.*

Beweis. Nach Satz 1 ist jede Distribution als $\mathfrak{T}^{(1)}$-stetige Linearfunktion auf $\mathfrak{E}(C)$ erst recht $\mathfrak{T}^{(0)}$-stetige Linearfunktion auf $\mathfrak{A}(C)$ und verschiedene Distributionen auf C erzeugen verschiedene Randverteilungen auf C, da $\mathfrak{A}(C)$ in $\mathfrak{E}(C)$ dicht ist. $\mathfrak{E}'(C)$ ist also Teilraum von $\mathfrak{A}'(C)$.

3. *Darstellung der Randverteilungen durch lokalanalytische Funktionen.* C braucht in dieser Nummer nur als einfach geschlossen und rektifizierbar vorausgesetzt zu werden. Ist λ eine beliebige, aber feste komplexe Zahl aus dem Innern $\mathfrak{C}$ von C, so liegt die Funktion $\frac{1}{z - \lambda}$ in $\mathfrak{A}(C)$, wir können also

[3]) Der Strich am Summenzeichen deutet das Fehlen des Gliedes $n = 0$ an.

den Wert eines $u \in \mathfrak{A}'(C)$ auf $\frac{1}{z-\lambda}$ bilden und erhalten so eine Funktion von λ,

$$\tilde{u}_1(\lambda) = u\left[\frac{1}{z-\lambda}\right], \qquad \lambda \in \mathfrak{C}. \tag{10}$$

Ebenso erklären wir für μ außerhalb C

$$\tilde{u}_2(\mu) = u\left[\frac{1}{\mu-z}\right], \qquad \mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}. \tag{11}$$

Es ist nun (vgl. [5]) $\tilde{u}_1(\lambda)$ eine in $\mathfrak{C}$ analytische Funktion, $\tilde{u}_2(\mu)$ eine in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ analytische und in ∞ verschwindende Funktion. Der lineare Raum aller in $\mathfrak{C}$ analytischen Funktionen werde mit $P(\mathfrak{C})$ bezeichnet, der aller in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ analytischen und in ∞ verschwindenden Funktionen mit $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$. Man kann das Paar $\big(\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu)\big)$ auch als eine auf $\Omega - C$ erklärte lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\nu)$ auffassen und bezeichnet den Raum aller dieser Funktionen mit $P(\Omega - C)$. Es ist also, wenn wir $\tilde{u}_1(\lambda)$ mit $\big(\tilde{u}_1(\lambda), 0\big)$ gleichsetzen, analog $\tilde{u}_2(\mu)$ mit $\big(0, \tilde{u}_2(\mu)\big)$,

$$P(\Omega - C) = P(\mathfrak{C}) \oplus P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}). \tag{12}$$

Die $u \in \mathfrak{A}'(C)$ zugeordnete lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\nu)$ heißt die FANTAPPIÈsche Indikatrix von u.

Wir betrachten zwei Beispiele.

a) Ist $x(t) \in \mathfrak{A}(C)$, so wird durch

$$x[y] = \frac{1}{2\pi i} \int_C x(t)\, y(t)\, dt, \qquad y(t) \in \mathfrak{A}(C), \tag{13}$$

ein $x \in \mathfrak{A}'(C)$ erzeugt, die nach (10) und (11) zugeordnete Indikatrix $\tilde{x}(\nu)$ ist ein Paar $\big(\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\mu)\big)$ von Funktionen, deren Randwerte $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ auf C noch analytisch sind und als Summe $x(t)$ ergeben. Wir bezeichnen den Raum aller dieser $\tilde{x}(\nu)$ mit $R(\Omega - C)$. Die FANTAPPIÈsche Indikatrix leistet in diesem Fall die Zerlegung von $x(t)$ in zwei Summanden, die gleichzeitig in $\mathfrak{C}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ hinein analytisch fortgesetzt werden.

Wir formulieren diese Tatsache noch etwas präziser.

$R(\overline{\mathfrak{C}})$ sei der lineare Raum aller auf $\overline{\mathfrak{C}}$ analytischen Funktionen, $R(\Omega - \mathfrak{C})$ entsprechend der Raum aller auf $\Omega - \mathfrak{C}$ analytischen, in ∞ verschwindenden Funktionen. Nach dem Muster von Nr. 1 läßt sich in ihnen eine wieder mit $\mathfrak{T}^{(0)}$ bezeichnete Topologie erklären, wenn man an Stelle der $\mathfrak{R}_n$ die Folgen $\mathfrak{C}_1'' > \mathfrak{C}_2'' > \ldots, \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n'' = \overline{\mathfrak{C}}$ bzw. $\mathfrak{C}_1' > \mathfrak{C}_2' > \ldots, \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n' = \Omega - \mathfrak{C}$ benützt, $\mathfrak{C}_n''$ das von C_n'' begrenzte, $\mathfrak{C}$ umschließende Gebiet, $\mathfrak{C}_n'$ entsprechend das von C_n' begrenzte, $\Omega - \mathfrak{C}$ umschließende Gebiet (vgl. auch [5], Nr. 4).

$R(\Omega - C) = R(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus R(\Omega - \mathfrak{C})$ erhält die Topologie des direkten Produkts, die ebenfalls mit $\mathfrak{T}^{(0)}$ bezeichnet wird. Es gilt dann

Satz 3. *Ordnet man jedem* $x(t) \in \mathfrak{A}(C)$ *durch* (13), (10), (11) *die Indikatrix* $\tilde{x}(\nu)$ *zu, so erhält man eine topologische Isomorphie*

$$\mathfrak{A}(C) \cong R(\Omega - C) = R(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus R(\Omega - \mathfrak{C}), \tag{14}$$

wobei in jedem der Räume die Topologie $\mathfrak{T}^{(0)}$ *zu nehmen ist.*

Dies ist in den Resultaten von [5] enthalten, ist aber auch leicht unmittelbar einzusehen.

Es sei bemerkt, daß $\tilde{x}(\nu)$ nach (10), (11) nicht auf C definiert ist, die Funktionen aus $R(\overline{\mathfrak{C}})$ sind also unmittelbar nur auf $\mathfrak{C}$ erklärt, ebenso die von $R(\Omega - \mathfrak{C})$ nur auf $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$. Durch die Isomorphie (14) wird nun $R(\overline{\mathfrak{C}})$ einem Teilraum $\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{C}})$ von $\mathfrak{A}(C)$ zugeordnet, der gerade aus den durch die Randfunktionen $x_1(t)$ der $\tilde{x}_1(\lambda) \in R(\overline{\mathfrak{C}})$ erzeugten Randverteilungen x_1 besteht. Ebenso entspricht $\tilde{x}_2(\mu)$ eine Randverteilung x_2 und es ist $x = x_1 + x_2$.

Wir notieren die (14) so entsprechende Zerlegung

$$\mathfrak{A}(C) = \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus \mathfrak{R}(\Omega - \mathfrak{C}). \tag{14'}$$

b) Als Beispiel für die Darstellung einer Distribution betrachten wir das DIRACsche Maß δ_{t_0}, das jeder stetigen Funktion $f(t)$ auf der Kurve C den Wert $\delta_{t_0}[f] = f(t_0)$ zuordnet. Offenbar ist $\delta_{t_0} \in \mathfrak{A}'(C)$, die zugeordnete lokalanalytische Funktion ist

$$\tilde{\delta}_{t_0}(\nu) = \left(\frac{1}{t_0 - \lambda}, \frac{1}{\mu - t_0}\right). \tag{15}$$

Der Grenzübergang von beiden Seiten zum Rand C und Addition der Randwerte wie im vorigen Beispiel ergibt für $t \neq t_0$ den Wert 0, für $t = t_0$ den Wert ∞. Also auch in diesem Fall ist die Linearfunktion δ_{t_0} anschaulich als Randfunktion einer lokalanalytischen Funktion aufzufassen. Dies wird noch exakt zu erfassen sein.

4. $\mathfrak{A}'(C)$ *als lokalkonvexer Raum.* Als Topologie in $\mathfrak{A}'(C)$ führt man nun die starke Topologie ein, also die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von $\mathfrak{A}(C)$. Wir brauchen sie nicht näher zu erläutern, da die Ergebnisse von [5] eine direkte Definition gestatten.

In $P(\mathfrak{C})$ erklären wir folgendermaßen eine Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$: Es sei wieder C_n' die C von innen her approximierende Kurvenfolge und $\mathfrak{D}_n'$ sei die von C_n' begrenzte abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{C}$. $P(\mathfrak{C})$ wird ein (F)-Raum, wenn man die Folge wachsender Normen

$$||\tilde{u}_1(\lambda)||_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{D}_n'} |\tilde{u}_1(\lambda)|, \qquad \tilde{u}_1 \in P(\mathfrak{C}), \tag{16}$$

einführt. Ist $\mathfrak{D}_n''$ das Äußere von C_n'' einschließlich C_n'' selbst, so gibt die entsprechende Definition

$$||\tilde{u}_2(\mu)||_n = \sup_{\mu \in \mathfrak{D}_n''} |\tilde{u}_2(\mu)|, \qquad \tilde{u}_2 \in P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}), \tag{17}$$

die Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ auf $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

$P(\Omega - C)$ erhält nach (12) die wieder mit $\mathfrak{T}^{(2)}$ bezeichnete Produkttopologie.

Die Konvergenz einer Folge $\tilde{u}^{(n)}(\nu) = \left(\tilde{u}_1^{(n)}(\lambda),\ \tilde{u}_2^{(n)}(\mu)\right)$ ist dann gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz von $\tilde{u}_1^{(n)}(\lambda)$ bzw. $\tilde{u}_2^{(n)}(\mu)$ auf einem geeigneten $\mathfrak{D}_n'$ bzw. $\mathfrak{D}_n''$.

Nach [5] gilt nun

Satz 4. *Die Zuordnung $u \to \tilde{u}(\nu)$ von $u \in \mathfrak{A}'(C)$ auf $\tilde{u}(\nu) \in P(\Omega - C)$ ist eine topologische Isomorphie*

$$\mathfrak{A}'(C) \cong P(\Omega - C), \tag{18}$$

die starke Topologie auf $\mathfrak{A}'(C)$ ist also nichts anderes als die durch diese Isomorphie auf $\mathfrak{A}'(C)$ übertragene Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$.

Der direkten topologischen Zerlegung (14') entspricht beim Übergang zum dualen Raum eine ebensolche Zerlegung

$$\mathfrak{A}'(C) = \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C}). \tag{19}$$

Nach [5] gilt ferner

Satz 5. *Der topologische Isomorphismus (18) setzt sich zusammen aus den beiden topologischen Isomorphismen*

$$\mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}}) \cong P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}), \tag{20}$$

$$\mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C}) \cong P(\mathfrak{C}). \tag{21}$$

Den Zuordnungen (14) und (18) entspricht nun folgende Berechnung des Wertes einer Randverteilung (Formel (13) aus [5]).

Satz 6. *Entspricht $x(t) = x_1(t) + x_2(t) \in \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus \mathfrak{R}(\Omega - \mathfrak{C})$ nach (14) die lokalanalytische Funktion $\left(\tilde{x}_1(\lambda),\ \tilde{x}_2(\mu)\right) \in R(\overline{\mathfrak{C}}) \oplus R(\Omega - \mathfrak{C})$ und $u = u_1 + u_2 \in \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C}) \oplus \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}})$ nach (19), (20), (21) die lokalanalytische Funktion $\left(\tilde{u}_1(\lambda),\ \tilde{u}_2(\mu)\right) \in P(\mathfrak{C}) \oplus P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, so gilt*

$$\begin{aligned} u[x(t)] &= u_1[x_2(t)] + u_2[x_1(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n'} \tilde{u}_1(\lambda)\, \tilde{x}_2(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}_2(\mu)\, \tilde{x}_1(\mu)\, d\mu, \end{aligned} \tag{22}$$

wobei n so groß zu wählen ist, daß $\tilde{x}_2(\lambda)$ noch auf C_n' und $\tilde{x}_1(\mu)$ noch auf C_n'' analytisch sind. Die Kurven sind stets im positiven Sinn zu durchlaufen.

Die Formel (22) erklärt auch umgekehrt die einem $\tilde{u}(\nu) \in P(\Omega - C)$ zugeordnete Randverteilung u.

Nach [5] Satz 17 gilt

Satz 7. *Die stark dualen Räume zu $\mathfrak{A}'(C)$, $P(\mathfrak{C})$, $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ sind $\mathfrak{A}(C)$, $R(\Omega - \mathfrak{C})$, $R(\overline{\mathfrak{C}})$.*

In den beiden letzten Fällen ist die duale Paarung durch je eines der Integrale aus (22) gegeben.

Satz 8. *Alle Räume $\mathfrak{A}(C)$, ebenso alle Räume $\mathfrak{A}'(C)$ sind topologisch isomorph, C irgendeine geschlossene rektifizierbare Jordankurve.*

Zeigen wir dies für die $\mathfrak{A}'(C)$, so ergibt sich die Behauptung für die $\mathfrak{A}(C)$ nach Satz 7 durch Dualität. Es genügt nach Satz 4 und 5 aber, die Behauptung für $P(\mathfrak{K})$ und $P(\mathfrak{C})$ zu zeigen. Ist aber $\lambda = \varphi(\xi)$ eine konforme Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{C}$, so ist die Zuordnung $\tilde{u}_1(\lambda) \to \tilde{v}_1(\xi) = \tilde{u}_1(\varphi(\xi))$ eine topologische Isomorphie, was sofort mit Hilfe der Normen (16) einzusehen ist. Analog für $P(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ und $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

Satz 9. *$\mathfrak{A}(C)$ ist ein im Sinn von $\mathfrak{T}^{(2)}$ dichter linearer Teilraum von $\mathfrak{A}'(C)$, ebenso $R(\overline{\mathfrak{C}})$ von $P(\mathfrak{C})$ und $R(\Omega - \mathfrak{C})$ von $P(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.*

Es genügt wiederum, dies für $R(\overline{\mathfrak{C}})$ und $P(\mathfrak{C})$ zu zeigen. $R(\overline{\mathfrak{C}})$ ist nach Satz 7 dicht in $P(\mathfrak{C})$, wenn der Orthogonalraum zu $R(\overline{\mathfrak{C}})$ in $R(\Omega - \mathfrak{C})$ verschwindet. Es ist für $\lambda_0 \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ aber $\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \in R(\overline{\mathfrak{C}})$, für ein dem Orthogonalraum angehöriges $\tilde{x}(\mu) \in R(\Omega - \mathfrak{C})$ ergibt sich nach (22) also $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^*} \frac{\tilde{x}(\mu)}{\lambda_0 - \mu} d\mu = \tilde{x}(\lambda_0) = 0$.

5. *Die Konvergenz gegen den Rand.* Es ergibt sich nun leicht die in der Bezeichnung „Randverteilung" angedeutete funktionentheoretische Bedeutung der Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$.

Sei zuerst C gleich dem Einheitskreis K und sei $u = u_1 + u_2$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}'(K)$, $\tilde{u}(\nu) = (\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$ seine Indikatrix. Den Funktionen $\tilde{u}_r(\nu) = (\tilde{u}_1(r\lambda), \tilde{u}_2(\mu/r))$, $0 < r < 1$, die wir als die *konzentrischen Näherungen* von $\tilde{u}(\nu)$ bezeichnen, entsprechen in $\mathfrak{A}'(K)$ die sogar zu $\mathfrak{A}(K)$ gehörenden $u_r(s) = u_1(rs) + u_2(s/r)$, $s \in K$. Diese Randverteilungen konvergieren nun im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ von $\mathfrak{A}'(K)$ gegen u, es gilt

Satz 10. *Ist $u \in \mathfrak{A}'(K)$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{K})$, $u_2 \in \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{K}})$, und sind $\tilde{u}_1(\lambda) \in P(\mathfrak{K})$, $\tilde{u}_2(\mu) \in P(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ die zugeordneten Funktionen, sind ferner $\tilde{u}_{1r}(\lambda) = \tilde{u}_1(r\lambda)$, $\tilde{u}_{2r}(\mu) = \tilde{u}_2(\mu/r)$ die konzentrischen Näherungen mit den analytischen Randverteilungen $u_{1r}(s)$ bzw. $u_{2r}(s)$, so gilt*

$$u_1 = \lim_{r \to 1-0} u_{1r}, \qquad u_2 = \lim_{r \to 1-0} u_{2r} \tag{23}$$

im Sinn der $\mathfrak{T}^{(2)}$-Konvergenz in $\mathfrak{A}'(K)$.

Der Beweis ist einfach: $u_{1r} \to u_1$ bedeutet nach Satz 4 ja nichts anderes als die gleichmäßige Konvergenz der zugeordneten Funktionen $\tilde{u}_1(r\lambda)$ gegen $\tilde{u}_1(\lambda)$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{K}$.

Die Konvergenz gegen die Randverteilung ist sogar monoton in bezug auf jede der zur Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ gehörenden Normen $||u_1||_\varrho = \sup_{|\lambda| \leq \varrho} |\tilde{u}_1(\lambda)|$, $0 < \varrho < 1$, denn $||u_{1r}||_\varrho$ ist eine monoton wachsende Funktion von r mit dem Limes $||u_1||_\varrho$ für $r \to 1$. Entsprechendes gilt für die u_{2r}.

Satz 10 ergibt nach den Sätzen 4 und 6 auch, daß *jede in $|z| > 1$ bzw. $|z| < 1$ analytische Funktion eine Randverteilung besitzt, gegen die die konzentrischen Näherungen im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ konvergieren.*

Ist C allgemeiner eine analytische Kurve $t(s)$, $s \in K$, so überträgt sich Satz 10 durch konforme Abbildung: Es sei $\lambda = \varphi(\xi)$ die konforme Abbildung

von $\overline{\mathfrak{K}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$, $\xi = \psi(\lambda)$ die Umkehrung. Ist $u_1 \in \mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{C})$, $\tilde{u}_1(\lambda)$ die Indikatrix in $P(\mathfrak{C})$, so ist $\tilde{v}_1(\xi) = \tilde{u}_1(\varphi(\xi)) \in P(\mathfrak{K})$ und seine Randverteilung v_1 ist in $\mathfrak{R}'(\Omega - \mathfrak{K})$ nach Satz 10 Limes der $v_1(r\,s) \in \mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{K}})$. Die Funktionen $\tilde{u}_{1,r}(\lambda) = \tilde{v}_1(r\,\psi(\lambda)) = \tilde{u}_1(\varphi(r\,\psi(\lambda))) \in R(\overline{\mathfrak{C}})$ haben dann auf C die Werte von $\tilde{u}_1(\lambda)$ auf den Bildkurven C_r der Kreise $|\xi| = r$, werden also wieder als konzentrische Näherungen von $\tilde{u}_1(\lambda)$ zu bezeichnen sein. Die Konvergenz der $u_{1,r}(\lambda)$ gegen $\tilde{u}_1(\lambda)$ ist wieder gleichmäßig auf allen abgeschlossenen Teilmengen innerhalb C, also sind die $u_{1,r}$ $\mathfrak{T}^{(2)}$-konvergent gegen u_1. Diese Konvergenz ist ferner monoton bezüglich der Normen $||u_1||_\varrho = \sup_{\lambda \in \mathfrak{C}_\varrho} |\tilde{u}_1(\lambda)|$, $\mathfrak{C}_\varrho$ das von C_ϱ umschlossene Gebiet. Analoges gilt für die $u_2 \in \mathfrak{R}'(\overline{\mathfrak{C}})$.

Die Konvergenz der konzentrischen Näherungen gegen die Randverteilung im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ ist sehr schwach, schärfere Aussagen kann man jedoch nur erwarten, wenn man die Singularitäten auf dem Rande irgendwie einschränkt. Im Sinne der hier entwickelten Auffassung wird dies zweckmäßig so zu geschehen haben, daß man nicht alle Elemente von $\mathfrak{A}'(C)$ als Randverteilungen der Funktionen zuläßt, sondern geeignete lineare Teilräume von $\mathfrak{A}'(C)$ auswählt. Als Spielraum hat man naturgemäß die zwischen $\mathfrak{A}(C)$, dem Raum der analytischen Funktionen, und $\mathfrak{A}'(C)$ gelegenen linearen Räume.

Als Beispiele bieten sich an für analytische C die Räume $L^p(C)$, der Raum der stetigen Funktionen auf C, der Raum der Maße auf C, die Räume $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}'(C)$ usw. Für die $L^p(K)$, $1 < p < \infty$, hat kürzlich A. E. Taylor [8] diese Probleme behandelt. Auch hier gilt der (19) entsprechende Zerlegungssatz, daß $L^p(K)$ in zwei topologisch komplementäre Teilräume zerfällt, die die Randfunktionen von in $\mathfrak{K}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{K}}$ analytischen Funktionen sind, ferner ist die Konvergenz der konzentrischen Näherungen gegen diese Randfunktion nichts anderes als die starke Konvergenz in $L^p(K)$.

Aber schon für $L^1(K)$ gilt ein solcher Zerlegungssatz nicht mehr, nach einem klassischen Beispiel der Theorie der Fourier-Reihen (vgl. [8] oder Titchmarsh, The theory of functions, 2. Aufl. S. 420) können die einer auf K integrablen Funktion $x(s)$ zugeordneten analytischen Funktionen $\tilde{x}_1(\lambda)$ und $\tilde{x}_2(\mu)$ Randverteilungen haben, die nicht mehr in $L^1(K)$ liegen.

Das Problem, für welche Teilräume von $\mathfrak{A}'(C)$ der Zerlegungssatz richtig ist, scheint ein recht schwieriges zu sein. Wir begnügen uns hier damit, die beiden aufgeworfenen Fragen für die Räume $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}'(C)$ zu beantworten, die ziemlich einfach zu behandeln sind, da im Fall K die Fourier-Entwicklung auf vollkommene Räume im Sinn von [4] führt.

6. $\mathfrak{E}(K)$ *und* $\mathfrak{E}'(K)$ *als vollkommene Räume.* L. Schwartz hat in [6] Bd. II, S. 80ff., eine Darstellung von $\mathfrak{E}(K)$ und $\mathfrak{E}'(K)$ durch vollkommene Räume gegeben, die wir in etwas anderer Form kurz wiedergeben.

Ist $x(s) \in \mathfrak{E}(K)$, $\hat{x}(\varphi) = x(e^{i\varphi})$ die entsprechende periodische Funktion, so werde $x(s)$ der Vektor $\mathfrak{x} = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ der Fourier-Koeffizienten von $\hat{x}(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{i n \varphi}$ zugeordnet. Es gilt in der Bezeichnung von [4]

Satz 11. *Der $\mathfrak{E}(K)$ durch $x(s) \to \mathfrak{x}$ zugeordnete Koordinatenraum ε ist ein gestufter Raum, der aus allen $\mathfrak{x}$ mit*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^k \xi_n| < \infty, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

besteht.

Dies ergibt sich sofort daraus, daß einerseits $\hat{x}^{(k)}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' i^k n^k \xi_n e^{inq}$ für jedes k beschränkte Koeffizienten hat, andererseits eine FOURIER-Reihe mit Koeffizienten ξ_n, die (24) erfüllen, eine unendlich oft differenzierbare Funktion darstellt.

ε wird von SCHWARTZ als Raum der rasch abnehmenden Folgen bezeichnet.

Die entsprechende Darstellung von $\mathfrak{E}'(K)$ findet man folgendermaßen: Die FOURIER-Reihe von $\hat{x}(q)$ konvergiert nach Nr. 2 im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ von $\mathfrak{E}(K)$ gegen $\hat{x}(q)$, also ist eine Distribution u durch ihre Werte $u[e^{inq}] = \nu_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, auf den e^{inq} bestimmt. Diese bilden wieder einen Vektor $\mathfrak{u}$ und es gilt

Satz 12. *Der $\mathfrak{E}'(K)$ durch $u \to \mathfrak{u}$ zugeordnete Koordinatenraum ε^* ist der zu ε duale Stufenraum aller $\mathfrak{u}$ mit*

$$|\nu_n| \leq M |n|^k, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{25}$$

für geeignetes M und k. Der Wert $u[x]$ der Distribution u auf $x \in \mathfrak{E}(K)$ ergibt sich durch

$$u[x] = \mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_n \xi_n \qquad \text{(Parseval)}. \tag{26}$$

Beweis. Die Gl. (26) folgt aus der Definition von $\mathfrak{u}$, die Summe ist absolut konvergent, da $\mathfrak{u}$ auch auf jedes $\mathfrak{y}$ mit $|\eta_n| = |\xi_n|$ anwendbar sein muß. Der zu ε im Sinn der vollkommenen Räume duale Stufenraum besteht nach [4] § 1 Satz 2 gerade aus allen $\mathfrak{u}$, die (25) erfüllen.

Bleibt noch zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{u}$ einer Distribution entspricht. Da jedes $\mathfrak{u}$ nach [4] § 4 Satz 1 eine stark stetige Linearfunktion auf ε ist, genügt es zu beweisen, daß bei der Zuordnung $x \to \mathfrak{x}$ die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ auf $\mathfrak{E}(K)$ in die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ auf ε übergeht.

Die beschränkten Mengen in ε^* sind nach [4] § 1 Satz 5 enthalten in den beschränkten Mengen $B_{M,k}$ aller $\mathfrak{u}$, die (25) für ein festes M und k erfüllen. Die starke Topologie in ε wird also durch die Umgebungen

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^k \xi_n| < \delta \tag{27}$$

für festes k und M gegeben. Sie stimmt mit $\mathfrak{T}^{(1)}$ überein: Für die $\hat{x}(\varphi)$ einer Umgebung $(\hat{x})_k < \delta$ [vgl. (7)] sind die Ausdrücke $\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} |x^{(k)}(q)|^2 dq = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' |n^k \xi_n|^2$ beschränkt, also nach der SCHWARZschen Ungleichung auch $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' |n^{k-1} \xi_n|$, eine

$\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung $(\hat{x})_{k+1} < \delta'$ liegt also in einer Umgebung (27), umgekehrt folgt aus (27), daß die ersten bis k-ten Ableitungen der $\hat{x}(\varphi)$ beschränkt sind, jede $\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung $(\hat{x})_k < \delta'$ umfaßt also eine Umgebung (27), $\mathfrak{E}(K)$ ist also topologisch isomorph dem zugeordneten vollkommenen Raum ε bezüglich der starken Topologie.

Die wesentlichen Eigenschaften von $\mathfrak{E}(K)$ und $\mathfrak{E}'(K)$ können somit der Theorie der Stufenräume [4] entnommen werden. Sie gelten nach (6) damit auch für $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}'(C)$ mit beliebigen analytischen C.

7. $\mathfrak{A}(K)$ *und* $\mathfrak{A}'(K)$ *als vollkommene Räume.* Auch für $\mathfrak{A}(K)$, $\mathfrak{A}'(K)$ ergeben sich Darstellungen durch vollkommene Räume. Sie sind in [9] und [4] ausführlich erörtert worden, wir fassen die uns hier interessierenden Ergebnisse zusammen in

Satz 13. *Ordnet man jedem* $\tilde{x}_1(\lambda) \in R(\overline{\mathfrak{K}})$ *den Vektor* $\mathfrak{x}_1 = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ *der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in* 0, *jedem* $\tilde{x}_2(\mu) \in R(\Omega - \mathfrak{K})$ *den Vektor* $\mathfrak{x}_2 = (\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1})$ *der Koeffizienten der Potenzreihe in* $1/\mu$ *zu, so erhält man die Stufenräume* ϱ_1 *bzw.* $\bar{\varrho}_1$, *die aus allen* $\mathfrak{x}_1$ *bzw.* $\mathfrak{x}_2$ *mit*

$$(28) \qquad |\xi_n| \leq M\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \qquad \text{bzw.} \qquad |\xi_{-n}| \leq M\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

für geeignetes M *und* k *bestehen,* k *eine der Zahlen* $2, 3, \ldots$.

Erklärt man in ϱ_1, *bzw.* $\bar{\varrho}_1$ *die starke Topologie, so ist die Zuordnung eine topologische Isomorphie.*

Die dualen gestuften Räume $\varrho_1^* = \pi_1$, $\bar{\varrho}_1^* = \bar{\pi}_1$ *sind dann zu* $P(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ *bzw.* $P(\mathfrak{K})$ *topologisch isomorph.* π_1 *bzw.* $\bar{\pi}_1$ *bestehen aus allen Vektoren* $\mathfrak{u}_2 = (v_0, v_1, \ldots)$ *bzw.* $\mathfrak{u}_1 = (\ldots, v_{-2}, v_{-1})$ *mit*

$$(29) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n |v_n| < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n |v_{-n}| < \infty, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Die Isomorphie ordnet den Vektoren $\mathfrak{u}_2$ *bzw.* $\mathfrak{u}_1$ *die Funktionen*

$$(30) \qquad \tilde{u}_2(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\mu^{n+1}} \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{u}_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{-n}\, \lambda^{n-1}$$

zu, man erhält somit

$$(31) \qquad u_2[\tilde{x}_1(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n''} \tilde{u}_2(\mu)\, \tilde{x}_1(\mu)\, d\mu = \mathfrak{u}_2 \mathfrak{x}_1 = \sum_{0}^{\infty} v_n \xi_n$$

$$(32) \qquad u_1[\tilde{x}_2(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n'} \tilde{u}_1(\lambda)\, \tilde{x}_2(\lambda)\, d\lambda = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{x}_2 = \sum_{1}^{\infty} v_{-n}\, \xi_{-n}.$$

Die Räume $\mathfrak{A}(K)$ *und* $\mathfrak{A}'(K)$ *werden dann durch die Räume* $\bar{\varrho}_1 \oplus \varrho_1$ *bzw.* $\bar{\pi}_1 \oplus \bar{\pi}_1$ *der Paare* $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1)$ *bzw.* $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$ *mit der Bilinearform*

$$(33) \qquad \mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1) = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{x}_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \xi_n$$

dargestellt.

Die Elemente von $\mathfrak{A}(K)$ lassen sich als Elemente von $\mathfrak{E}(K)$ auffassen, ebenso die Elemente von $\mathfrak{E}'(K)$ als Elemente von $\mathfrak{A}'(K)$, beide Male entspricht ihnen nach Nr. 6 und der Zuordnung von Satz 13 derselbe Vektor $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{u}$.

Durch Vergleich von (25) und (29) erhält man bereits einen gewissen Überblick über die Randverteilungen auf K, die keine Distributionen sind.

Schreiben wir die $x(s) \in \mathfrak{A}(K)$ wieder als $\hat{x}(\varphi) = x(e^{i\varphi})$, so erhalten wir den Raum der analytischen periodischen Funktionen. Die Elemente von $\mathfrak{A}'(K)$ können dann ebenfalls als die Summen der FOURIER-Reihen $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_n e^{in\varphi}$ angesehen werden, die (29) genügen. Damit können also noch mehr FOURIER-Reihen summiert werden als in der Distributionentheorie.

8. *Der Zerlegungs- und Approximationssatz für* $\mathfrak{E}(K)$. Ein $f(t) \in \mathfrak{E}(C)$ erzeugt nach (4) eine stetige Linearfunktion $f[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$, wir fassen in diesem Sinn $\mathfrak{E}(C)$ als Teilraum von $\mathfrak{A}'(C)$ auf. Die $f(t)$ zugeordnete Indikatrix wird also gegeben durch

$$(34) \qquad \tilde{f}(\nu) = \left(\tilde{f}_1(\lambda),\ \tilde{f}_2(\mu)\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-\lambda}\ ,\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{\mu - t}\right),\quad \lambda \in \mathfrak{C},\ \mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}.$$

Die $\tilde{f}_1(\lambda)$ bzw. $\tilde{f}_2(\mu)$ bilden Teilräume $E(\mathfrak{C})$ bzw. $E(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ von $P(\Omega - C)$ und erzeugen nach (22) stetige Linearfunktionen auf $\mathfrak{A}(C)$; die $E(\mathfrak{C})$ und $E(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ so entsprechenden Teilräume von $\mathfrak{A}'(C)$ werden mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ bzw. $\mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ bezeichnet.

Für $C = K$ beweisen wir nun den Zerlegungssatz

Satz 14. *Es ist* $\mathfrak{E}(K)$ *die direkte topologische Summe*

$$(35) \qquad \mathfrak{E}(K) = \mathfrak{E}(\mathfrak{K}) \oplus \mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{K}}).$$

Beweis. Ist $f(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n s^n \in \mathfrak{E}(K)$, so ist nach (34) $\tilde{f}_1(\lambda) = \sum_0^\infty \xi_n \lambda^n$, $\tilde{f}_2(\mu) = \sum_1^\infty \xi_{-n} \mu^{-n}$. Die ξ_n, ξ_{-n} erfüllen die Ungleichungen (24), die Funktionen $f_1(s) = \sum_0^\infty \xi_n s^n$ bzw. $f_2(s) = \sum_1^\infty \xi_{-n} s^{-n}$, $s \in K$, liegen nach Satz 11 also in $\mathfrak{E}(K)$.

Die durch $\tilde{f}_1(\lambda)$ nach (22) erzeugte Linearfunktion

$$f_1[x] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda| = r} \tilde{f}_1(\lambda)\,\tilde{x}_2(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_K \tilde{f}_1(r\,s)\,\tilde{x}_2(r\,s)\,r\,ds, \qquad \tilde{x}_2(\mu) \in R(\Omega - \mathfrak{K}),$$

ist aber gleich $\frac{1}{2\pi i}\int f_1(s)\,\tilde{x}_2(s)\,ds$, da $\tilde{f}_1(r\,s)$ mit $r \to 1$ gleichmäßig gegen $f_1(s)$ geht, was sich leicht aus (24) ergibt. Dasselbe gilt für $\tilde{f}_2(\mu)$ und $f_2(s)$.

Daß die Zerlegung $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$ direkt topologisch ist, ergibt sich sofort daraus, daß die entsprechende Zerlegung des vollkommenen Raumes ε, bei der jeder Vektor $\mathfrak{x} = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ in die beiden Vektoren $(\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, 0, 0, \ldots)$ und $(\ldots, 0, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$ zerlegt wird, topologisch direkt ist.

$E(\mathfrak{K})$ und $E(\Omega-\overline{\mathfrak{K}})$ lassen sich funktionentheoretisch einfach charakterisieren,

Satz 15. *$E(\mathfrak{K})$ ist der Raum aller in $\mathfrak{K}$ analytischen Funktionen, deren sämtliche Ableitungen in $\mathfrak{K}$ beschränkt sind, $E(\Omega-\overline{\mathfrak{K}})$ ist der Raum aller in $\Omega-\overline{\mathfrak{K}}$ analytischen und in ∞ verschwindenden Funktionen, deren sämtliche Ableitungen in $\Omega-\overline{\mathfrak{K}}$ beschränkt sind.*

Denn sind sämtliche Ableitungen von $\tilde{f}(\lambda)=\sum_0^\infty \xi_n \lambda^n$ in $\mathfrak{K}$ beschränkt, so folgt aus dem CAUCHYschen Koeffizientensatz für die k-te Ableitung $\binom{n}{k}|\xi_n|\leq M_k$, der Vektor der ξ_n erfüllt (24). Ebenso folgt aus (24), daß $\tilde{f}(\lambda)$ in $\mathfrak{K}$ nur beschränkte Ableitungen hat.

Da $E(\Omega-\overline{\mathfrak{K}})$ durch den Übergang von $\tilde{f}(\lambda)$ zu $\frac{1}{\mu}\tilde{f}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ aus $E(\mathfrak{K})$ entsteht, gilt die Behauptung auch für $E(\Omega-\overline{\mathfrak{K}})$.

Die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ von $\mathfrak{E}(K)$ ist durch die Folge der Normen (5) gegeben. Damit ist auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ als Teilraum von $\mathfrak{E}(K)$ ebenfalls die Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$ erklärt. Sie überträgt sich auf $E(\mathfrak{K})$ mit Hilfe der aus (24) folgenden gleichmäßigen Konvergenz der n-ten Ableitungen $\tilde{f}_1^{(n)}(r\,s)$ gegen die Randfunktion $f_1^{(n)}(s)$ und man erhält in $E(\mathfrak{K})$ die Normen

$$|||f_1|||_n=\sup_{|\lambda|<1}|\tilde{f}_1^{(n)}(\lambda)|=\sup_{|s|=1}|f_1^{(n)}(s)|=|||f_1|||_n. \tag{36}$$

Analoges gilt für $E(\Omega-\overline{\mathfrak{K}})$. Daraus ergibt sich sofort der in $\mathfrak{E}(K)$ zu erwartende Approximationssatz

Satz 16. *Die konzentrischen Näherungen $f_1(r\,s)+f_2(s/r)$ einer Randverteilung $f(s)\in\mathfrak{E}(K)$ streben monoton in r bezüglich jeder der $\mathfrak{T}^{(1)}$ definierenden Normen* (36) *gegen $f(s)$.*

Wir bemerken noch, daß $E(\mathfrak{K})$ und $E(\Omega-\overline{\mathfrak{K}})$ offenbar topologisch isomorph zu gestuften Räumen sind, die Ergebnisse von [1] und [4] lassen sich also wieder anwenden.

9. *Der allgemeine Fall einer analytischen Kurve C.* Zwar ist $\mathfrak{E}(C)$ nach (6) topologisch isomorph $\mathfrak{E}(K)$, dabei geht die Zerlegung (35) in eine direkte topologische Zerlegung von $\mathfrak{E}(C)$ über, doch ist dies nicht die des Zerlegungssatzes für $\mathfrak{E}(C)$. Der Beweis ist in diesem Fall etwas schwieriger.

Satz 17. *Ist C eine analytische geschlossene Jordankurve, so ist $\mathfrak{E}(C)$ die direkte topologische Summe*

$$\mathfrak{E}(C)=\mathfrak{E}(\mathfrak{C})\oplus\mathfrak{E}(\Omega-\overline{\mathfrak{C}}). \tag{37}$$

Beweis. a) Wir zeigen zuerst, daß $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ ein Teilraum von $\mathfrak{E}(C)$ ist, d.h. daß die durch ein $\tilde{f}_1(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-\lambda}\,dt$, $f(t)\in\mathfrak{E}(C)$, erzeugte Randverteilung f_1 in $\mathfrak{E}(C)$ liegt.

Wir formen dazu $\tilde{f}_1(\lambda)$ durch partielle Integration um. Es ist für festes $\lambda\in\mathfrak{C}$ $\ln(t-\lambda)$ nicht eindeutig auf C erklärbar. Wir denken uns C bei t_0 durchgeschnitten und erklären $\ln(t-\lambda)$ durch Vorgabe des Wertes in einem Punkt $t_1\neq t_0$ auf C eindeutig. Bedeutet das Integral über C^* das Integral von t_0

über C bis t_0, so erhalten wir durch zweimalige partielle Integration

$$(38)\qquad \begin{cases} \tilde{f}_1(\lambda) = f(t_0) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^*} f'(t)\ln(t-\lambda)\,dt \\ \qquad = f(t_0) - f'(t_0)(t_0-\lambda) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^*} f''(t)\{(t-\lambda)[\ln(t-\lambda)-1]\}\,dt. \end{cases}$$

Wir betrachten den Grenzwert von (38) für $\lambda \to t_1$. Der Durchschnitt $\mathfrak{M}$ einer genügend kleinen Umgebung von t_1 auf C^* mit $\mathfrak{C}$ ist ein Gebiet, für die $\lambda \in \mathfrak{M}$ können wir die Werte $\ln(t_1-\lambda)$ aus demselben Zweig nehmen, damit ist dann die Funktion $F(t,\lambda) = (t-\lambda)[\ln(t-\lambda)-1]$ in beiden Variablen gleichzeitig stetig auf $C^* \times \mathfrak{M}$ erklärt. Für $\lambda \in \mathfrak{M}$, $\lambda \to t_1$ erhalten wir für $t \neq t_0$ die stetige Grenzfunktion

$$F(t,t_1) = \begin{cases} (t-t_1)[\ln(t-t_1)-1] \\ 0 \text{ für } t = t_1. \end{cases}$$

Die Konvergenz $F(t,\lambda) \to F(t,t_1)$ mit $\lambda \to t_1$ in $\mathfrak{M}$ ist gleichmäßig in t, also ergibt (38)

$$(39)\qquad \lim_{\lambda \to t_1} \tilde{f}_1(\lambda) = f(t_0) - f'(t_0)(t_0-t_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} f''(t)\,F(t,t_1)\,dt = f_1(t_1).$$

Da $F(t,t_1)$ auf $C^* \times C^*$ in beiden Variablen gleichzeitig stetig ist, ist die Randfunktion $f_1(t_1)$ stetig und wird gleichmäßig angenommen (t_0 ist, da willkürlich wählbar, nur eine scheinbare Ausnahme).

Nun folgt aus $\tilde{f}_1^{(n)}(\lambda) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(t)\,dt}{(t-\lambda)^{n+1}}$ durch n-malige partielle Integration

$$(40)\qquad \tilde{f}_1^{(n)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{t-\lambda}.$$

Anwendung unserer Überlegung von vorhin ergibt also, daß auch die n-te Ableitung von $\tilde{f}_1(\lambda)$ stetige Randwerte auf C hat.

Wir zeigen jetzt, daß die Randfunktion $f_1^{(n)}(t)$ von $\tilde{f}_1^{(n)}(\lambda)$ die Ableitung der Randfunktion $f_1^{(n-1)}(t)$ ist, dann haben wir bewiesen, daß die Randfunktion $f_1(t)$ von $\tilde{f}_1(\lambda)$ beliebig oft differenzierbar ist.

Es ist aber $\dfrac{f_1^{(n-1)}(t_0) - f_1^{(n-1)}(t)}{t_0 - t}$ beliebig genau durch einen Ausdruck

$$\frac{\tilde{f}_1^{(n-1)}(\lambda_0) - \tilde{f}_1^{(n-1)}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\int_{\lambda}^{\lambda_0} \tilde{f}_1^{(n)}(\mu)\,d\mu, \qquad \lambda_0, \lambda \in \mathfrak{C},$$

approximierbar. Geht $t \to t_0$, so $\lambda, \lambda_0 \to t_0$ und das Integral rechts strebt gegen $f_1^{(n)}(t_0)$. Damit ergibt sich sofort

$$f_1[x] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \tilde{f}_1(\lambda)\,\tilde{x}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(t)\,x(t)\,dt.$$

b) $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ ist direkter stetiger Summand von $\mathfrak{E}(C)$. Dazu braucht nach einem bekannten Satz der Theorie der linearen Räume nur gezeigt zu werden,

daß die Abbildung $P_1 f(t) = f_1(t)$ von $\mathfrak{E}(C)$ in $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ eine Projektion ist. Die Abbildung ist stetig, denn sind für eine Menge von Funktionen $f(t)$ aus $\mathfrak{E}(C)$ die $\sup_{t \in C} |f^{(n)}(t)|$ beschränkt, so folgt aus (39) und den entsprechenden Formeln für die Ableitungen von $f_1(t)$ auch die Beschränktheit der $\sup_{t \in C} |f_1^{(n)}(t)|$, das besagt nach (5) aber die Stetigkeit von P_1 bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$. Ferner gilt $P_1^2 = P_1$, da bei der Bildung von $\tilde{f}_1(\lambda)$ aus einer Randfunktion $f(t) \in \mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ einer in $\mathfrak{C}$ analytischen Funktion gerade diese analytische Funktion entsteht.

c) Für $\tilde{f}_2(\mu)$ kann man wie unter a) schließen, die Überlegung ist hier sogar einfacher; da μ außerhalb C liegt, ist $\ln(t-\mu)$ eindeutig auf ganz C erklärbar, man braucht nicht mehr aufzuschneiden und erhält statt (38)

$$(41) \qquad -\tilde{f}_1(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f''(t)\,\{(t-\mu)\,[\ln(t-\mu)-1]\}\,dt,$$

die Grenzfunktion $F(t,\mu)$ ist auf $C \times \mathfrak{M}$ stetig.

Satz 15 gilt wörtlich auch für $E(\mathfrak{C})$ und $E(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$. Man beweist ihn so, daß man wie in Nr. 5 die konforme Abbildung $\lambda = \varphi(\xi)$ von $\mathfrak{K}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$ benützt, durch die $E(\mathfrak{K})$ und $E(\mathfrak{C})$ topologisch isomorph aufeinander abgebildet werden.

Wie in Nr. 5 überträgt sich auch die Konvergenz der konzentrischen Näherungen gegen die Randfunktion (Satz 16), doch gilt die Monotonie nur bezüglich der ersten Norm $|||f(t)|||_1 = \sup_{t \in C} |f(t)|$.

10. *Der Zerlegungssatz für die Distributionen auf C.* Mit $D(\Omega - C)$ bezeichnen wir den Raum der den $u \in \mathfrak{E}'(C)$ zugeordneten lokalanalytischen Funktionen $\tilde{u}(\nu) = (\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$. Die $\tilde{u}_1(\lambda)$ bilden einen Raum $D(\mathfrak{C})$, die $\tilde{u}_2(\mu)$ entsprechend $D(\Omega - \mathfrak{C})$, die ihnen zugeordneten Räume von Randverteilungen auf C seien $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ bzw. $\mathfrak{D}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$. Der Zerlegungssatz für Distributionen auf C lautet nun

Satz 18. *Ist C eine analytische geschlossene Jordankurve, so gilt die direkte topologische Zerlegung*

$$(42) \qquad \mathfrak{E}'(C) = \mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \oplus \mathfrak{D}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}}).$$

Es ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ der duale Raum zu $\mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, $\mathfrak{D}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ der duale Raum zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$.

Jede Distribution u auf C ist also eindeutig zerlegbar in zwei Distributionen, $u = u_1 + u_2$, wobei u_1 die Randverteilung einer in $\mathfrak{C}$ analytischen Funktion, u_2 die Randverteilung einer in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ analytischen und in ∞ verschwindenden Funktion ist.

Beweis. Der Zerlegung (37) entspricht nach einem allgemeinen Satz der Theorie der lokalkonvexen Räume eine topologisch direkte Zerlegung des dualen Raumes

$$(43) \qquad \mathfrak{E}'(C) = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2,$$

wobei $\mathfrak{E}_1$ aus allen $u^{(1)} \in \mathfrak{E}'(C)$ mit $u^{(1)}[f_1] = 0$, $f_1 \in \mathfrak{E}(\mathfrak{C})$, besteht, entsprechend $\mathfrak{E}_2$ aus allen $u^{(2)}$ mit $u^{(2)}[f_2] = 0$, $f_2 \in \mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$; ferner ist $\mathfrak{E}_1$ topologisch isomorph dem dualen Raum zu $\mathfrak{E}(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, $\mathfrak{E}_2$ entsprechend dem dualen Raum

zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$. Ist $u^{(1)} \in \mathfrak{E}_1$, so ist also $u^{(1)}\left[\frac{1}{t-\mu}\right] = 0$ für alle $\mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, d.h. es ist $\tilde{u}_2^{(1)}(\mu) \equiv 0$ in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, entsprechend ist $\tilde{u}_1^{(2)}(\lambda) \equiv 0$ in $\mathfrak{C}$. Die einer beliebigen Distribution $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ zugeordnete Funktion $\tilde{u}_1(\lambda) \in D(\mathfrak{C})$ stimmt also mit $\tilde{u}_1^{(1)}(\lambda)$ überein, hat als Randverteilung also die Distribution $u^{(1)}$, d.h. $\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{E}_1$. Da trivialerweise $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ gilt, haben wir $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$, ebenso $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{D}(\Omega - \mathfrak{C})$.

Wir werden für Satz 18 noch einen direkten Beweis geben, der den Zerlegungssatz für $\mathfrak{E}(C)$ nicht benützt.

Wir untersuchen die den Distributionen zugeordneten lokalanalytischen Funktionen näher. Eine in $\mathfrak{C}$ analytische Funktion $\tilde{u}(\lambda)$ heiße *langsam wachsend in* $\mathfrak{C}$, wenn es ein $N > 0$ und eine natürliche Zahl k gibt, so daß

$$|\tilde{u}(\lambda)| \leq \frac{N}{\delta(\lambda)^k} \tag{44}$$

für alle $\lambda \in \mathfrak{C}$ gilt, dabei bedeutet $\delta(\lambda)$ den Abstand von λ vom Rand C von $\mathfrak{C}$. Enthält $\mathfrak{C}$ den Punkt ∞, so wird (44) nur für alle $\lambda \in \mathfrak{C} - U(\infty)$ verlangt, $U(\infty)$ eine beliebige, aber feste Umgebung von ∞. Es gilt nun

Satz 19. *Ist u eine Distribution auf C, so gilt für die zugeordnete Indikatrix $\tilde{u} = (\tilde{u}_1(\lambda), \tilde{u}_2(\mu))$, daß $\tilde{u}_1(\lambda)$ und $\tilde{u}_2(\mu)$ langsam wachsende Funktionen in $\mathfrak{C}$ bzw. $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ sind. Umgekehrt erzeugt jedes Paar langsam wachsender (in ∞ verschwindender) Funktionen eine Distribution auf C.*

Beweis. a) Ist u eine Distribution, so ist u als stetige Linearfunktion auf $\mathfrak{E}(C)$ auf einer $\mathfrak{T}^{(l)}$-Umgebung von $\mathfrak{E}(C)$ beschränkt, es gibt also ein k und ein $M > 0$, so daß $|u[x]| \leq M \sup_{l \leq k} |||x|||_l$ ist für alle $x \in \mathfrak{E}(C)$, $|||x|||_l = \sup_{t \in C} |x^{(l)}(t)|$. Für $x(t) = \frac{1}{t-\lambda}$, $\lambda \in \mathfrak{C}$, ist $\left|\left|\left| \frac{1}{t-\lambda} \right|\right|\right|_l = \frac{l!}{\delta(\mu)^{l+1}}$, daraus folgt sofort $|\tilde{u}_1(\lambda)| \leq \frac{N_1}{\delta(\lambda)^{k+1}}$. Ebenso ergibt sich $|\tilde{u}_2(\mu)| \leq \frac{N_2}{\delta(\lambda)^{k+1}}$ für $\mu \in \Omega - (\overline{\mathfrak{C}} \cup U(\infty))$.

b) Es sei andererseits $\tilde{u}(\lambda)$ langsam wachsend in $\mathfrak{C}$, es gelte (44). Es sei $k > 1$. Bei geradliniger senkrechter Annäherung von einem genügend nahe am Rand gelegenen Punkt λ_0 an den Randpunkt t von $\mathfrak{C}$ gilt wegen (44) und $\lambda = \lambda_0 + r(t - \lambda_0)$, $0 < r < 1$, also $\delta(\lambda) = (1-r)\,|t - \lambda_0|$,

$$\left| \int_{\lambda_0}^{\lambda} \tilde{u}(\lambda)\, d\lambda \right| \leq \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{N}{\delta(\lambda)^k} |d\lambda| \leq \frac{Nk}{\delta(\lambda)^{k-1}}. \tag{45}$$

Legt man ein unbestimmtes Integral $\tilde{u}^{(-1)}(\lambda)$ von $\tilde{u}(\lambda)$ durch Wahl eines festen Ausgangspunktes a fest, so hat man von a bis zu einem λ_0 zu integrieren, alle diese $\int_a^{\lambda_0} \tilde{u}(\lambda)\, d\lambda$ bleiben aber unter einer festen Schranke, also folgt aus (45)

$$|\tilde{u}^{(-1)}(\lambda)| \leq \frac{N_1}{\delta(\lambda)^{k-1}} \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathfrak{C}. \tag{46}$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir $|\tilde{u}^{(-k+1)}(\lambda)| \leq \frac{N_{k-1}}{\delta(\lambda)}$, daraus

$$|\tilde{u}^{(-k)}(\lambda)| \leq N_k\, |\ln \delta(\lambda)|. \tag{47}$$

Aus (47) folgt schließlich, daß $\tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)$ stetige Randwerte auf C hat, denn es wird bei senkrechter Annäherung an den Randpunkt t

$$\left|\int_{\lambda}^{\lambda'} \tilde{u}^{(-k)}(\lambda)\, d\lambda\right| \leq -\int_{\lambda}^{\lambda'} N_k \ln \delta(\lambda)\, |d\lambda| < \varepsilon \tag{48}$$

für λ, λ' genügend nahe an t, also hat $\tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)$ einen Grenzwert bei Annäherung an den Rand. Da dieser Grenzwert offenbar gleichmäßig angestrebt wird, hat $\tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)$ eine stetige Grenzfunktion $u^{(-k-1)}(t)$ auf C. Es sei $M = \sup_{t \in C} |u^{(-k-1)}(t)|$.

Jetzt können wir zeigen, daß die durch $\tilde{u}(\lambda)$ erzeugte Linearfunktion

$$u[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \tilde{u}(\lambda)\, \tilde{x}(\lambda)\, d\lambda, \qquad \tilde{x}(\lambda) \in R(\Omega - C),$$

auf $R(\Omega - C)$ im Sinne von $\mathfrak{T}^{(1)}$ stetig ist, sich also nach Satz 1 und 3 auf ganz $\mathfrak{E}(C)$ stetig fortsetzen läßt, also eine Distribution ist.

Ist nämlich $|||\tilde{x}(\lambda)|||_{k+1} = \sup_{t \in C} |x^{(k+1)}(t)| \leq K$, so ergibt sich durch partielle Integration

$$\left\{\begin{aligned} |u[x]| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \tilde{u}^{(-k-1)}(\lambda)\, \tilde{x}^{(k+1)}(\lambda)\, d\lambda\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C} u^{(-k-1)}(t)\, x^{(k+1)}(t)\, dt\right| \leq \frac{MK|C}{2\pi}. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

c) Für $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$ hat man etwas anders vorzugehen: Das unbestimmte Integral einer in ∞ verschwindenden Funktion $\tilde{u}(\mu), \mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, ist im allgemeinen keine eindeutige Funktion in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, wohl aber $\tilde{u}^{[-1]}(\mu) = \int_{\infty}^{\mu} \frac{\tilde{u}(\mu)\, d\mu}{\mu}$, die ebenfalls in ∞ verschwindet. Gilt (44) für $\tilde{u}(\mu)$, so beweist man wieder, daß $\tilde{u}^{[-k-1]}(\mu)$ eine stetige Randfunktion $u^{[-k-1]}(t)$ auf C besitzt und wir erhalten mit der Bezeichnung $\tilde{x}^{[1]}(\mu) = (\mu\, \tilde{x}(\mu))'$ durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}(\mu)\, \tilde{x}(\mu)\, d\mu = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_n''} \tilde{u}^{[-1]}(\mu)\, x^{[1]}(\mu)\, d\mu$$

wie oben, daß $\tilde{u}$ eine Distribution erzeugt, denn auch die Menge aller $x(t) \in \mathfrak{E}(C)$ mit $\sup_{t \in C} |x^{[k+1]}(t)| \leq K$ bildet eine $\mathfrak{T}^{(1)}$-Umgebung in $\mathfrak{E}(C)$.

Satz 19 enthält unmittelbar die direkte Zerlegung (43) im algebraischen Sinn. Daß sie auch topologisch direkt ist, wird in Nr. 11 nochmals bewiesen werden.

Satz 19 und sein Beweis enthalten rein funktionentheoretische Charakterisierungen von $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

Satz 20. *$D(\mathfrak{C})$ besteht aus den langsam wachsenden Funktionen $\tilde{u}(\lambda)$ in $\mathfrak{C}$, die mit den Funktionen identisch sind, von denen ein geeignetes n-faches Integral $\tilde{u}^{(-n)}(\lambda)$ stetige Randwerte $u^{(-n)}(t)$ auf C besitzt.*

$D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ besteht aus den langsam wachsenden, in ∞ verschwindenden Funktionen in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, die mit den Funktionen $\tilde{u}(\mu)$ identisch sind, aus denen durch eine n-fache Operation der Form $\tilde{u}^{[-1]}(\mu) = \int_{\infty}^{\mu} \frac{\tilde{u}(\mu)\, d\mu}{\mu}$ eine Funktion mit stetigen Randwerten $u^{[-n]}(t)$ entsteht.

Die Bilinearform, die zu $D(\mathfrak{C})$ bzw. $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ gehört, ist gegeben durch

$$\tilde{u}[\tilde{x}] = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C u^{(-n)}(t)\, x^{(n)}(t)\, dt = u[x] \tag{50}$$

bzw.

$$\tilde{u}[\tilde{x}] = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C u^{[-n]}(t)\, x^{[n]}(t)\, dt = u[x] \tag{50'}$$

für genügend großes n.

Zu beweisen sind nur noch (50) und (50'). (50) ergibt sich aus (49), das nur für auf C analytische x bewiesen war, sofort durch Grenzübergang von den analytischen x zu den auf C stetigen x. (50) und (50') entsprechen th. XXVI von [6], Bd. I.

Artet C in einen Punkt aus, so zeigt Satz 20, daß dann die Distributionen in Pole übergehen, die Distributionen auf C stehen also in einer gewissen Analogie zu den Polen, während die Randverteilungen, die nicht Distributionen sind, den wesentlichen isolierten Singularitäten entsprechen.

11. *Die Topologie der Distributionenräume.* Führen wir den Ausdruck

$$\left(\tilde{u}(\lambda)\right)_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{C}} |\tilde{u}^{(-n)}(\lambda)|, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{51}$$

ein und bezeichnen wir den Teilraum aller $\tilde{u}(\lambda) \in D(\mathfrak{C})$, für die $\tilde{u}^{(-n)}(\lambda)$ stetige Randwerte besitzt, mit $D_n(\mathfrak{C})$, so ist $D_n(\mathfrak{C})$ ein Banachraum bezüglich der Norm (51) (die Vollständigkeit folgt sofort aus dem Satz von WEIERSTRASS) und es ist $D(\mathfrak{C})$ die Vereinigungsmenge aller $D_n(\mathfrak{C})$. Wie in Nr. 1 können wir daher auf $D(\mathfrak{C})$ auch die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ der lokalkonvexen Hülle der $D_n(\mathfrak{C})$ einführen.

In $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ haben wir analog

$$\left(\tilde{u}(\mu)\right)_n = \sup_{\mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}} |\tilde{u}^{[-n]}(\mu)|, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{51'}$$

einzuführen und erhalten damit wieder eine Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$.

$\mathfrak{T}^{(3)}$ ergibt sich sowohl in $D(\mathfrak{C})$ bzw. $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$, wenn wir an Stelle von (51) und (51') die Normen

$$[\tilde{u}(\lambda)]_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{C}} |\tilde{u}(\lambda)\, \delta(\lambda)^n| \quad \text{bzw.} = \sup_{\mu \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}\ (\infty)} |\tilde{u}(\mu)\, \delta(\mu)^n|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{52}$$

einführen.

Auf $D(\Omega - C)$ und damit auf $\mathfrak{E}'(C)$ erklären wir $\mathfrak{T}^{(3)}$ als die Topologie des topologischen Produkts von $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$.

Damit ist die Zerlegung (43) nach Definition eine direkte topologische Zerlegung bezüglich $\mathfrak{T}^{(3)}$. Satz 18 wird aus Satz 19 also folgen, wenn wir zeigen können, daß $\mathfrak{T}^{(3)}$ mit der durch $\mathfrak{E}(C)$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ erzeugten starken Topologie übereinstimmt.

Dies besagt

Satz 21. *Die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ ist identisch mit der starken Topologie $\mathfrak{T}_b$.*

Beweis. a) $\mathfrak{T}^{(3)}$ ist feiner als $\mathfrak{T}_b$.

Die starken Nullumgebungen in $D(\mathfrak{C})$ sind die Durchschnitte $B^0 \cap D(\mathfrak{C})$, B^0 die polare Menge einer beschränkten Menge B aus $E(\Omega - C)$. Eine Menge $B < E(\Omega - C)$ ist aber beschränkt, wenn für jedes n ein $M_n < \infty$ existiert mit $\sup_{\tilde{x} \in B,\, t \in C} |x^{(n)}(t)| \leq M_n$. Eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Nullumgebung U hat andererseits die Form $\bigcap_1^\infty U_n$, U_n die Menge aller $\tilde{u} \in D_n(\mathfrak{C})$ mit $(\tilde{u})_n \leq K_n$. Wählt man $K_n \leq \frac{2\pi}{M_n |C|}$, so wird wegen (50) $|\tilde{u}[\tilde{x}]| \leq 1$ für alle $\tilde{u} \in U$ und $\tilde{x} \in B$, also ist die durch die K_n bestimmte $\mathfrak{T}^{(3)}$-Umgebung U in B^0 enthalten, $\mathfrak{T}^{(3)}$ ist feiner als $\mathfrak{T}_b$.

Für $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ hat man entsprechend (50′) und (51′) zu benützen.

b) $\mathfrak{T}_b$ ist feiner als $\mathfrak{T}^{(3)}$.

Nach dem Satz von Mackey-Arens (zitiert in [1], S. 64) ist die starke Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ mit $\mathfrak{E}(C)$ als dualem Raum. Zeigen wir also, daß jede $\mathfrak{T}^{(3)}$-stetige Linearfunktion $x[u]$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ durch ein $x \in \mathfrak{E}(C)$ erzeugt wird, so ist $\mathfrak{T}_b$ feiner als $\mathfrak{T}^{(3)}$.

Nun ist $\mathfrak{T}^{(3)}$ auf $\mathfrak{A}(C)$ schwächer als $\mathfrak{T}^{(0)}$, $x[u]$ ist also $\mathfrak{T}^{(0)}$-stetig, wird daher durch ein $\tilde{x}(\nu) \in P(\Omega - C)$ erzeugt.

Es gibt eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Umgebung $U = \bigcap_1^\infty U_n$ mit $|x[u]| \leq 1$ für alle $u \in U$. Es sei etwa wieder U_n die Menge aller $\tilde{u} \in D(\mathfrak{C})$ mit $[\tilde{u}]_n \leq K_n$. In $U \cap R(\mathfrak{C})$ liegen dann alle $\tilde{u} = \frac{K_n}{(\lambda - \mu_0)^n}$, $\mu_0 \in \Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, denn wegen $|\lambda - \mu_0| \geq \delta(\lambda)$ ist $\left[\frac{1}{(\lambda - \mu_0)^n}\right]_n \leq 1$. Nach Nr. 4 ist dann aber

$$|x[\tilde{u}]| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n''} \frac{K_n \tilde{x}_2(\mu)\, d\mu}{(\mu - \mu_0)^n} \right| = \frac{K_n}{(n-1)!} |\tilde{x}_2^{(n-1)}(\mu_0)| \leq 1,$$

d.h. alle Ableitungen von $\tilde{x}_2(\mu)$ sind beschränkt in $\Omega - \overline{\mathfrak{C}}$, die Randverteilung $x_2(t)$ liegt in $\mathfrak{E}(C)$. Ebenso schließt man für $\tilde{x}_1(\mu)$, also liegt $x = x_1 + x_2$ in $\mathfrak{E}(C)$.

Damit ist für die starke Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ eine Definition gefunden, die nur die funktionentheoretischen Eigenschaften der die Distributionen darstellenden lokalanalytischen Funktionen benützt.

Satz 22. *Alle $D(\mathfrak{C})$, ebenso alle $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ mit analytischem Rand C sind bei geeigneter konformer Abbildung der Definitionsgebiete aufeinander topologisch isomorph.*

Beweis. Bildet $\lambda = \varphi(\xi)$ $\overline{\mathfrak{K}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$ ab, so multiplizieren sich die Entfernungen in $\overline{\mathfrak{C}}$ höchstens mit $M = \sup_{|\xi|<1} |\varphi'(\xi)|$, also gilt für die Entfernungen vom Rande $\delta_C(\varphi(\xi)) \leq M\, \delta_K(\xi)$. Ist nun $\tilde{v}(\xi) = \tilde{u}(\varphi(\xi))$ die $\tilde{u}(\lambda)$ entsprechende Funktion, so folgt aus $[\tilde{v}(\xi)]_n \leq N$ offenbar $[\tilde{u}(\lambda)]_n \leq M^n N$. Ist daher eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Nullumgebung V in $D(\mathfrak{C})$ vorgegeben, so gibt es also eine $\mathfrak{T}^{(3)}$-Nullumgebung V' in $D(\mathfrak{K})$, deren Bild in V liegt, die Abbildung ist stetig in der einen Richtung, ebenso natürlich in der anderen.

Dieselbe Überlegung gilt für Abbildungen von $\Omega - \mathfrak{K}$ auf $\Omega - \mathfrak{C}$, die ∞ festlassen. Auch $D(\mathfrak{K})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ sind topologisch isomorph, jedoch nicht bei konformer Abbildung, sondern bei der Zuordnung $\tilde{x}(\xi) \to \frac{1}{\xi}\, \tilde{x}\left(\frac{1}{\xi}\right)$. Dies folgt auch aus dem folgenden Satz, in dem wir die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ auf den $D(\mathfrak{K})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ entsprechenden vollkommenen Räumen deuten.

Satz 23. *$D(\mathfrak{K})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{K}})$ entsprechen topologisch isomorph die Räume ε_1^* bzw. ε_2^* aller $\mathfrak{u}_1 = (v_0, v_1, \ldots)$ bzw. $\mathfrak{v}_2 = (\ldots, v_{-2}, v_{-1})$, die (25) erfüllen. ε_1^* ist die lokalkonvexe Hülle der Banachräume ε_{1k}^*, $k = 1, 2, \ldots$, aller $\mathfrak{u}_1$ mit*

$$||\mathfrak{u}_1||_k = \sup_n \frac{|v_n|}{n^k} < \infty. \tag{53}$$

Entsprechendes gilt für ε_2^*

Beweis. Für alle $\mathfrak{u}_1$ mit $||\mathfrak{u}_1||_k \leq M$ ergibt sich durch gliedweise Integration für die entsprechenden Funktionen $\tilde{u}_1(\lambda) = \sum_0^\infty v_n \lambda^n$, daß $(\tilde{u}_1)_{k+2} \leq M'$ ist. Gilt umgekehrt $(\tilde{u}_1(\lambda))_k \leq M$, so ergibt sich daraus für $\lambda = r\, e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{u}^{(-k)}(\lambda)|^2\, d\varphi = \sum_0^\infty \frac{|v_n|^2 r^{2(n+k)}}{[(n+1)(n+2)\ldots(n+k)]^2} \leq M^2$$

für alle $0 < r < 1$. Daraus folgt $|v_n| \leq M''\, n^k$, also $||\mathfrak{u}_1||_k \leq M''$. Durch die Normen (53) wird daher auf ε_1^* wieder die Topologie $\mathfrak{T}^{(3)}$ erzeugt. Für ε_2^* hat man analog vorzugehen.

Wie sieht die Konvergenz in $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ aus? In den Stufenräumen ε_1^* und ε_2^* ist nach [4] eine Folge $\mathfrak{u}^{(n)}$ dann und nur dann stark (also $\mathfrak{T}^{(3)}$) konvergent, wenn alle ihre Glieder in einem ε_{1k}^* bzw. ε_{2k}^* liegen und die Folge im Sinn der Metrik eines dieser Räume konvergiert. Nach den Sätzen 22 und 23 gilt also allgemein

Satz 24. *In $D(\mathfrak{C})$ und $D(\Omega - \overline{\mathfrak{C}})$ ist eine Folge von Distributionen $u^{(n)}$ dann und nur dann konvergent, wenn die ihr entsprechende Folge von langsam wachsenden Funktionen $\tilde{u}^{(n)}$ im Sinne einer der Normen (52) konvergiert.*

Mit der Bestimmung des Konvergenzbegriffs in $\mathfrak{E}'(C)$ können wir jetzt auch den Approximationssatz formulieren,

Satz 25. *Die konzentrischen Näherungen u_r einer Distribution u auf der analytischen Kurve C konvergieren im Sinne einer der Normen (52) gegen u.*

Es genügt, dies für ein $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{C})$, also $\tilde{u}(\lambda) \in D(\mathfrak{C})$ zu zeigen. Ist aber $|u(\lambda)\,\delta(\lambda)^n| \leq M$, so konvergieren die $\tilde{u}_r(\lambda) = \tilde{u}\left(\varphi(r\,\psi(\lambda))\right)$ offenbar im Sinn der $(n+1)$-ten Normen (52) gegen $\tilde{u}(\lambda)$.

Literatur.

[1] Dieudonné, J., et L. Schwartz: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [2] Dias, C Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação nos espaços funcionais analíticos. São Paulo 1951. — [3] Grothendieck, A.: Sur certains espaces de fonctions holomorphes. Erscheint im J. reine angew. Math. — [4] Köthe, G.: Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. Math. Z. **51**, 317—345 (1948). — [5] Köthe, G.: Dualität in der Funktionentheorie. Erscheint im J. reine angew. Math. — [6] Schwartz, L.: Théorie des distributions. I., II. Actual. sci. industr. **1091**, **1122** (1950/1). — [7] Silva, J. S. e: As funções analíticas e a análise funcional. Port. Math. **9**, 1—130 (1950). — [8] Taylor, A. E.: On certain Banach spaces whose elements are analytic functions. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima **12**, 31—43 (1949). — [9] Toeplitz, O.: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie. Comm. math. Helvetici **23**, 222—242 (1949).

Mainz, Universität, Mathematisches Institut.

(Eingegangen am 16. Mai 1952.)

HAACKE, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 34—45 (1952)

Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. II.

Von

WOLFHART HAACKE.

1. Einleitung.

Im ersten Teil dieser Arbeit [3] wurde eine allgemeine Theorie der Stabilität der Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten zusammengestellt. Damit konnte dann die Stabilität der Lösungen des Systems

$$\mathfrak{y}'' + \lambda^2 \mathfrak{R}(x)\, \mathfrak{y} + \lambda\, \mathfrak{A}(x, \lambda)\, \mathfrak{y} = 0$$

für große Werte des reellen Parameters λ untersucht werden. Dabei ist $\mathfrak{R}(x)$ eine Diagonalmatrix und $\mathfrak{A} \sim \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^\alpha} \mathfrak{A}_\alpha(x)$. In dem vorliegenden Teil wollen wir nun ein System

$$r^2 \mathfrak{R}\, \mathfrak{v}'' + \mathfrak{Q}\, \mathfrak{v} + \varepsilon\, \mathfrak{P}(x, \varepsilon)\, \mathfrak{v} = 0 \tag{1}$$

betrachten. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ seien konstante Matrizen, r und ε positive reelle Parameter. Die Matrix $\mathfrak{P}(x, \varepsilon)$ lasse sich durch eine für $\varepsilon \leq E_0$ absolut konvergente Matrizenreihe $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha \mathfrak{P}_\alpha(x)$ darstellen. Mit Hilfe eines Satzes von Herrn PERRON wird zunächst gezeigt, daß ein formaler Potenzreihenansatz in ε in einem endlichen Intervall $0 \leq \varepsilon < E$ absolut konvergiert. In [3] ergab sich, daß wir an einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten aus festen Funktionswerten von n speziellen Lösungsspalten gebildet sind, das Stabilitätsverhalten von (1) ablesen können. In unserem Fall lassen sich die Koeffizienten dieser algebraischen Gleichung in absolut konvergente Reihen nach dem Parameter entwickeln. So gelingt es uns, in einem Rechteck der r, ε-Ebene $0 \leq \varepsilon < E$, $0 < R_1 \leq r \leq R_2 < \infty$ Bereiche festzulegen, deren Parameterwerte stabile bzw. instabile Lösungen von (1) zur Folge haben.

Zum Teil angeregt wurde diese Untersuchung durch eine Arbeit von Herrn METTLER [4], in der ein System (1) bei $\mathfrak{P}_\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ und $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{B} \cos x$ mit konstanter Matrix $\mathfrak{B}$ formal behandelt wurde. In jener Arbeit spricht Herr METTLER selbst den Wunsch aus, daß seine Untersuchungen mathematisch weitergeführt werden mögen. Dieses spezielle System hat auch sonst für die Praxis Bedeutung, wie unter anderen auch die Arbeiten [2], [4], [6],

zeigen. Wir befassen uns mit diesem Spezialfall nur in einer kurzen Schlußbemerkung, da an anderer Stelle ausführlicher darauf eingegangen werden soll.

Im Zusammenhang mit unserer Untersuchung steht eine Arbeit von Herrn CESARI [1], bei der $r=1$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}_\alpha=0$ für $\alpha>0$ ist. Für diesen Fall wird unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt, daß für hinreichend kleine ε die Lösungen stabil sind. Herr CESARI verwendet andere Beweismethoden als der Verfasser.

2. Konvergenzbeweis eines formalen Lösungsansatzes.

Wir betrachten ein ein Vektorform gegebenes System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 \mathfrak{R} \mathfrak{v}'' + \mathfrak{Q} \mathfrak{v} + \varepsilon \mathfrak{P}(x, \varepsilon) \mathfrak{v} = 0. \tag{1}$$

Dabei seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ konstante HERMITEsche Matrizen vom Typ (n, n), außerdem habe $\mathfrak{R}$ nur positive Eigenwerte. r und ε seien positive reelle Parameter, definiert in den Intervallen $0 \leq \varepsilon \leq E_0$ und $0 < R_1 \leq r \leq R_2 < +\infty$. Weiter sei $\mathfrak{P}(x, \varepsilon) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha \mathfrak{P}_\alpha(x)$ für $\varepsilon \leq E_0$ eine für alle x absolut konvergente Matrizenreihe. Die Matrizenfunktionen $\mathfrak{P}_\alpha(x)$ seien stetige gerade Funktionen der reellen Veränderlichen x vom Typ (n, n) mit der Periode 2π [1]).

Wir fragen nach den Bedingungen, wann für ein Parameterpaar r, ε $2n$ linear unabhängige Lösungsspalten beschränkte Funktionen von x sind. Wir werden uns im folgenden mehrfach auf die im Abschnitt 2 von [3] zusammengestellte allgemeine Theorie der Systeme zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten beziehen.

Durch eine konstante unitäre Transformation $\mathfrak{v} = \mathfrak{T} \mathfrak{y}$ ergibt sich aus (1) das System

$$y_k'' + q_k^2 y_k + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha a_{k m \alpha}(x, r)\, y_m = 0 \quad (k = 1 \ldots n), \tag{2}$$

wenn man die unitäre Matrix $\mathfrak{T}$ so wählt, daß $\tilde{\overline{\mathfrak{T}}}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{T}$ die Einheitsmatrix und gleichzeitig $\tilde{\overline{\mathfrak{T}}}\, \mathfrak{Q}\, \mathfrak{T}$ eine Diagonalmatrix mit den Elementen r_k^2 ergibt. Weiter setzen wir dabei

$$q_k = \frac{r_k}{r}, \qquad a_{k m \alpha}(x, r) = \frac{1}{r^2} p_{k m \alpha}(x). \tag{3}$$

Die $p_{k m \alpha}(x)$ sind die Elemente der Matrix $\tilde{\overline{\mathfrak{T}}}\, \mathfrak{P}_\alpha(x)\, \mathfrak{T}$. Da die r_k^2 reell sind (verallg. Hauptachsentransformation), können wir

$$\arg r_k = \arg q_k = 0 \quad \text{für } r_k^2 > 0$$

und

$$\arg r_k = \arg q_k = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } r_k^2 < 0$$

[1]) Läßt man allgemeine Funktionen mit der Periode 2π zu, so wird die Stabilitätsgleichung (19) erheblich umständlicher, im Prinzip bleiben aber alle weiteren Untersuchungen gültig. Siehe dazu [3].

setzen. Die Reihen $\sum_{\alpha=0}^{\infty} a_{k\,m\,\alpha}(x,r)\,\varepsilon^{\alpha}$ sind ebenfalls bei $\varepsilon \leq E_0^{r}$ für alle x und alle zulässigen r absolut konvergent. Die $a_{k\,m\,\alpha}(x,r)$ sind stetige gerade Funktionen von x mit der Periode 2π.

Wir transformieren jetzt (2) in ein System erster Ordnung [3], wobei wir zunächst $q_k = 0$ ausschließen:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} y_k = z_k + z_{k+n}, \\ y_k' = i\,q_k(z_k - z_{k+n}). \end{cases}$$

Dann ist

$$y_k' = i\,q_k(z_k - z_{k+n}) = z_k' + z_{k+n}',$$

$$y_k'' = i\,q_k(z_k' - z_{k+n}') = -q_k^2(z_k + z_{k+n}) - \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n})$$

oder

$$z_k' + z_{k+n}' = i\,q_k(z_k - z_{k+n}),$$

$$z_k' - z_{k+n}' = i\,q_k(z_k + z_{k+n}) + \frac{i\,\varepsilon}{q_k} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n}).$$

Diese $2n$ Gleichungen lösen wir nach den Ableitungen auf:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} z_k' = i\,q_k z_k + \dfrac{i\,\varepsilon}{2q_k} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n}), \\ z_{k+n}' = -i\,q_k z_{k+n} - \dfrac{i\,\varepsilon}{2q_k} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} a_{k\,m\,\alpha}(z_m + z_{m+n}). \end{cases}$$

Herr PERRON hat folgenden Satz bewiesen [5]:

Wenn in dem System von Differentialgleichungen

$$\frac{dz_{\varkappa}}{dx} = \sum_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_{2n}} f_{\varkappa \nu_0 \nu_1 \dots \nu_{2n}}(x)\,\varepsilon^{\nu_0} z_1^{\nu_1} \dots z_{2n}^{\nu_{2n}}$$

bei $\varkappa = 1 \dots 2n$ *und* $\sum_{\gamma=0}^{2n} \nu_\gamma \geq 1$ *die Koeffizienten* $f_{\varkappa \nu_0 \nu_1 \dots \nu_{2n}}(x)$ *im Intervall* $0 \leq x \leq a$ *stetig sind und den Ungleichungen*

$$\text{(6)} \qquad |f_{\varkappa \nu_0 \dots \nu_{2n}}(x)| \leq \frac{(\nu_0 + \dots + \nu_{2n})!}{\nu_0! \dots \nu_{2n}!} \frac{M s_{\varkappa}}{s_0^{\nu_0} \dots s_{2n}^{\nu_{2n}}}$$

genügen, so läßt sich das Integral, welches für $x = 0$ *die Anfangswerte* $z_{\varkappa}(0) = b_{\varkappa}$ *annimmt, nach Potenzen von* $\varepsilon, b_1, \dots, b_{2n}$ *bei* $\sum_{\gamma=0}^{2n} \mu_\gamma \geq 1$ *entwickeln:*

$$\text{(7)} \qquad z_{\varkappa} = \sum_{\mu_0 \dots \mu_{2n}} \varphi_{\varkappa \mu_0 \dots \mu_{2n}}(x)\,\varepsilon^{\mu_0} b_1^{\mu_1} \dots b_{2n}^{\mu_{2n}}.$$

Diese Reihen sind im Bereich

$$\frac{\varepsilon}{s_0} + \frac{|b_1|}{s_1} + \dots + \frac{|b_{2n}|}{s_{2n}} < \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!}\, e^{-\varrho(2n\,M\,a+1)}$$

absolut konvergent

Bei Anwendung dieses Satzes müssen wir beachten, daß unsere Koeffizienten noch von r abhängen. Wir müssen also (6) gleichmäßig für alle r im zulässigen Intervall erfüllen. Für unser (lineares) System ist $\sum_{\gamma=1}^{2n} \nu_\gamma = 1$. Wir setzen $a = 2\pi$ und $M \geq \max |q_k|$. Durch diese Beschränkung für M ist (6) für $\nu_0 = 0$ sicher bei unserem System (5) erfüllt. Für $\nu_0 = \alpha > 0$ lautet (6), wenn wir $s_1 = \cdots = s_{2n} = s$ setzen:

$$\left| \frac{a_{k,m,\alpha-1}}{2q_k} \right| \leq (\alpha+1) \frac{M}{s_0^\alpha}. \tag{8}$$

Da $\lim_{\alpha\to\infty} a_{k m \alpha} = 0$ für alle x gilt, ist (8) sicher für hinreichend große α erfüllt, wenn wir $0 < s_0 \leq 1$ wählen. Durch Wahl eines solchen s_0 und eventuelle Vergrößerung von M ist (8) für alle α zu erfüllen. M ist dabei von r abhängig: $M = c/r$, während s_0 unabhängig von r gewählt werden kann. Da die Konvergenz der Lösung gleichmäßig in r gelten soll, setzen wir $M = c/R_1$. Die Voraussetzungen des Satzes von Herrn PERRON sind also für unser System (5) zu erfüllen.

Verschwindet aber mindestens eines der q_m, so setzen wir $y_k = z_k$ und $y_k' = z_{k+n}$, womit sich aus (2)

$$z_{k+n}' + q_k^2 z_k + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha a_{k m \alpha}(x, r) z_m = 0,$$
$$z_k' - z_{k+n} = 0$$

ergibt. Jetzt muß $M \geq \max(1, |q_k|^2)$ gewählt werden. Weiter ist die Ungleichung $|a_{k,m,\alpha-1}| \leq (\alpha+1) \frac{M}{s_0^\alpha}$ zu erfüllen. Auch für diesen Fall gilt also der Satz von Herrn PERRON.

Wir betrachten nun $2n$ Lösungsspalten von (5). Die λ-te Lösungsspalte erfülle die Anfangsbedingungen

$$z_{\varkappa\lambda}(0) = \delta_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa = 1 \ldots 2n). \tag{9}$$

Die Lösung (7) kann man nach Potenzen von ε zusammenfassen, da die Reihen absolut konvergieren. Also ist

$$z_{\varkappa\lambda} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \varphi_{\varkappa\lambda\beta}(x, r)\, \varepsilon^\beta. \tag{10}$$

Aus (9) ergibt sich

$$\begin{cases} \varphi_{\varkappa\lambda\beta}(0) = 0 \quad \text{für } \beta \geq 1 \text{ und} \\ \varphi_{\varkappa\lambda 0}(0) = \delta_{\varkappa\lambda}. \end{cases} \tag{11}$$

(10) ist nach dem Satz von Herrn PERRON absolut konvergent für

$$\varepsilon < s_0 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho(4\pi n M+1)} = \frac{s_0}{s}.$$

Da

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho} = 1$$

ist [5], ist sicher die Minorante

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho(4\pi n M+1)}$$

für alle zulässigen r absolut konvergent. Da wir über die Größe s noch verfügen können, ist (10) für $\varepsilon < E$ bei

$$s_0 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!} e^{-\varrho(4\pi n M+1)} = E\,(> s_0 e^{-(4\pi n M+1)})$$

absolut konvergent. Die Konvergenz gilt gleichmäßig für alle x und alle zulässigen r.

Unter Berücksichtigung von (4) und (10) ergibt sich

$$(12) \qquad \begin{cases} y_{k\lambda} = \sum\limits_{\beta=0}^{\infty} \left[\varphi_{k\lambda\beta}(x,r) + \varphi_{k+n,\lambda,\beta}(x,r)\right] \varepsilon^{\beta}, \\ y'_{k\lambda} = i\,q_k \sum\limits_{\beta=0}^{\infty} \left[\varphi_{k\lambda\beta}(x,r) - \varphi_{k+n,\lambda,\beta}(x,r)\right] \varepsilon^{\beta}. \end{cases}$$

Wegen (9) ist

$$(13) \qquad \begin{cases} y_{k\lambda}(0) = \delta_{k\lambda} + \delta_{k+n,\lambda}, \\ y'_{k\lambda}(0) = i\,q_k\,(\delta_{k\lambda} - \delta_{k+n,\lambda}). \end{cases}$$

Das Lösungssystem (12) soll nun in ein System transformiert werden, das den Anfangsbedingungen

$$(14) \qquad \begin{cases} u_{k\lambda}(0) = \delta_{k\lambda}, \\ u'_{k\lambda}(0) = \delta_{k+n,\lambda} \end{cases}$$

genügt. Es gilt also eine Beziehung

$$(15) \qquad \begin{cases} u_{k\lambda}(x) = \sum\limits_{\varkappa=1}^{2n} y_{k\varkappa}(x)\, g_{\varkappa\lambda} \\ u'_{k\lambda}(x) = \sum\limits_{\varkappa=1}^{2n} y'_{k\varkappa}(x)\, g_{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

mit konstanten $g_{\varkappa\lambda}$. Setzen wir in (15) $x = 0$ und benutzen (13) und (14), so ergeben sich Gleichungssysteme mit nichtverschwindender Determinante für die $4n^2$ Unbekannten $g_{\varkappa\lambda}$ [2]).

(10) ergibt sich durch formales Einsetzen eines Potenzreihenansatzes in (5) mit von x und r abhängigen unbestimmten Koeffizienten bei Beachtung von (9) bzw. (11). Wegen (4) ist dann (12) die Lösung des Systems (2), die sich durch formalen Potenzreihenansatz in ε mit den Anfangsbedingungen (13)

[2]) Auf die analoge Überlegung für $r_k = 0$ soll verzichtet werden.

ergibt. (10) und (12) sind für $\varepsilon < E$ absolut konvergent. Aus (15) ergeben sich ebenfalls Reihen in ε, die für dieselben ε absolut konvergieren und auch formal (2) befriedigen, außerdem auch (14) erfüllen. Machen wir also einen formalen Potenzreihenansatz in ε und befriedigen damit (2) und (14), so erhalten wir demnach $2n^2$ für alle x und alle zulässigen r bei $\varepsilon < E$ absolut konvergente Reihen.

Wir erhalten damit folgenden Satz:

Ein formaler Ansatz

$$u_{k\lambda} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \omega_{k\lambda\beta}(x, r)\, \varepsilon^{\beta} \tag{16}$$

mit den Anfangsbedingungen (14) *in* (2) *eingesetzt ergibt für*

$$\varepsilon < E = s_0 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho^{\varrho-1}}{\varrho!}\, e^{-\varrho(4n^2M+1)}$$

in ε absolut konvergente Reihen, wobei x beliebige reelle und r reelle zulässige Werte annehmen darf. s_0 und M sind geeignet zu wählende Konstante.

3. Bestimmung der ersten Glieder der Lösungsreihen.

Wir wollen jetzt die Glieder der Reihen (16) bestimmen. Setzen wir (16) in (2) ein, so erhalten wir folgendes Rekursionssystem:

$$\begin{cases} \omega''_{k\lambda\beta} + q_k^2 \omega_{k\lambda\beta} + \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} a_{km\gamma}\, \omega_{m,\lambda,\beta-1-\gamma} = 0 \\ \qquad\qquad (k, \lambda = 1 \ldots n, \beta = 0, 1, \ldots)\ ^{3}). \end{cases} \tag{17}$$

Zunächst setzen wir $r_k \neq 0$ $(k = 1 \ldots n)$ voraus. Dieser Sonderfall wird am Schluß des Abschnitts behandelt. Wegen (14) ist

$$\omega_{k\lambda 0} = \delta_{k\lambda} \cos q_k x. \tag{18}_0$$

Für $\beta = 1$ ergibt sich aus (17)

$$\omega''_{k\lambda 1} + q_k^2 \omega_{k\lambda 1} = -\sum_{m=1}^{n} a_{km0}\, \delta_{m\lambda} \cos q_m x = -a_{k\lambda 0} \cos q_\lambda x.$$

Wegen $\omega_{k\lambda 1}(0) = \omega'_{k\lambda 1}(0) = 0$ ist

$$\omega_{k\lambda 1} = \frac{1}{q_k} \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_k (\xi - x)\, d\xi. \tag{18}_1$$

Für $\beta = 2$ folgt

$$\omega''_{k\lambda 2} + q_k^2 \omega_{k\lambda 2} = -a_{k\lambda 1} \cos q_\lambda x - \sum_{m=1}^{n} \frac{a_{km0}(x)}{q_m} \int_0^x a_{m\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_m (\xi - x)\, d\xi.$$

---

[3]) Für $\beta = 0$ entfällt die Summe. λ läuft nur bis n, da zur Stabilitätsuntersuchung nur die ersten n Lösungsspalten benötigt werden.

Also ist

$$(18)_2 \quad \begin{cases} \omega_{k\lambda 2} = \dfrac{1}{q_k} \displaystyle\int_0^x a_{k\lambda 1}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_k(\xi - x)\, d\xi + \\ + \dfrac{1}{q_k} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{q_m} \int_0^x a_{k m 0}(\xi) \sin q_k(\xi - x) \left\{ \int_0^\xi a_{m\lambda 0}(\eta) \cos q_\lambda \eta \sin q_m(\eta - \xi)\, d\eta \right\} d\xi . \end{cases}$$

Analog lassen sich die weiteren Glieder bestimmen. Wir wollen die explizite Berechnung hier abbrechen.

Jetzt tragen wir den Fall $r_k = 0$ nach. Statt (17) gilt jetzt

$$\omega''_{k\lambda\beta} = - \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} a_{k m \gamma} \omega_{m,\lambda,\beta-1-\gamma} \qquad \text{für } k = 1 \ldots h,$$

denn durch Umnumerierung läßt sich immer erreichen, daß $r_1 = \cdots = r_h = 0$ und $r_{h+1} \neq 0, \ldots, r_n \neq 0$ sind. Dabei ist $1 \leq h \leq n$. Damit erhalten wir

$$\omega_{k\lambda 0} = \delta_{k\lambda} \qquad (k \leq h),$$

$$\omega_{k\lambda 0} = \delta_{k\lambda} \cos q_k x \qquad (k > h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cdot (\xi - x)\, d\xi \qquad (k, \lambda \leq h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \cdot (\xi - x)\, d\xi \qquad (k \leq h,\ \lambda > h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \frac{1}{q_k} \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \sin q_k(\xi - x)\, d\xi \qquad (k > h,\ \lambda \leq h),$$

$$\omega_{k\lambda 1} = \frac{1}{q_k} \int_0^x a_{k\lambda 0}(\xi) \cos q_\lambda \xi \sin q_k(\xi - x)\, d\xi \qquad (k, \lambda > h).$$

Auf die analoge Bestimmung der $\omega_{k\lambda 2}$ wollen wir verzichten.

4. Die Stabilitätsgleichung.

Setzen wir

$$u_{k\lambda}(2\pi) = U_{k\lambda},$$

$$\omega_{k\lambda\beta}(2\pi) = \Omega_{k\lambda\beta},$$

so lautet die Stabilitätsgleichung nach Abschnitt 2 von [3]

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} U_{11} - \cos 2\pi\tau & U_{12} & \ldots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} - \cos 2\pi\tau & \ldots & U_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ U_{n1} & U_{n2} & \ldots & U_{nn} - \cos 2\pi\tau \end{vmatrix} = 0,$$

wobei τ der charakteristische Exponent bei $\sigma = e^{2\pi i \tau}$ ist. Das System (2) soll stabil heißen, wenn *alle* Lösungen von (2) beschränkte Funktionen von x sind. Das ist aber dann der Fall, wenn alle Wurzeln $\cos 2\pi\tau$ des Polynoms n-ten Grades (19) reell, verschieden und dem Betrage nach kleiner Eins sind. Ergeben sich neben Wurzeln mit den genannten Eigenschaften mehrfache reelle Wurzeln vom Betrage kleiner oder gleich Eins oder Wurzeln $\cos 2\pi\tau = \pm 1$, so sind die Lösungen von (2) nur bei speziellen Anfangsbedingungen oder bei Einfachheit aller Elementarteiler der Gl. (5) in [3] beschränkt. Solch ein System heiße labil. Jedes andere System werde instabil genannt.

Für die spezielle Diskussion von (19) wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß *alle* $p_{k\lambda\beta}$ *reell* sind. Dann sind auch alle Koeffizienten von (19) reell.

(19) ist ein Polynom n-ten Grades in $\cos 2\pi\tau$, dessen Koeffizienten Potenzreihen in ε sind: $P(\cos 2\pi\tau) = 0$. Bricht man diese Potenzreihen mit der h-ten Potenz ab, so ergeben sich bei den Wurzeln nur Fehler der Ordnung ε^{h+1}, solange $\left.\frac{\partial P}{\partial \cos 2\pi\tau}\right|_{\varepsilon=0} \neq 0$ ist. Da außerhalb der Hauptdiagonale von (19) die Reihen erst mit der ersten Potenz von ε beginnen, ist dies nur dann nicht erfüllt, wenn

$$\Omega_{kk0} = \Omega_{mm0} \tag{20}$$

für mindestens ein Paar $k \neq m$ gilt. Wegen $(18)_0$ folgt aus (20) für $r_k, r_m \neq 0$:

$$r\,l = r_0\,l = |r_k \pm r_m|. \tag{21}$$

Dabei ist l einer der Werte $0, 1, 2, \ldots$. Es muß aber l so gewählt werden, daß r im zulässigen Bereich liegt. Wir werden im folgenden nicht jedesmal darauf hinweisen.

Wir schließen zunächst solche Werte $r = r_0$ aus, die (20) *erfüllen.* Aus (19) folgt

$$\prod_{m=1}^{n} (U_{mm} - \cos 2\pi\tau) = O(\varepsilon^2)$$

oder

$$\cos 2\pi\tau_k = \Omega_{kk0} + \varepsilon\,\Omega_{kk1} + O(\varepsilon^2) \quad (k = 1 \ldots n)^4). \tag{22}$$

Setzen wir noch die Werte (3) und (18) ein, so erhalten wir für $r_k \neq 0$

$$\cos 2\pi\tau_k = \cos 2\pi\frac{r_k}{r} + \frac{\varepsilon}{r\,r_k}\int_0^{2\pi} p_{kk0}(\xi)\cos\frac{r_k}{r}\xi \sin r_k\frac{\xi - 2\pi}{r}\,d\xi + O(\varepsilon^2), \tag{22a}$$

für $r_1 = 0$ dagegen

$$\cos 2\pi\tau_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{r^2}\int_0^{2\pi} p_{110}(\xi)\,(\xi - 2\pi)\,d\xi + O(\varepsilon^2). \tag{22b}$$

---

4) Ist aber mindestens eines der $\Omega_{kk1} = 0$, so kann man aus (22a) in der fraglichen Zeile nur ersehen, in welchem Bereich von r $\cos 2\pi q_k = \pm 1$ wird, aus (22b) sind überhaupt keine Schlüsse mehr möglich. Ob Stabilität, Labilität oder Instabilität vorliegt, kann man dann nur aus (23) ersehen, falls die nächsten Glieder nicht verschwinden.

Wäre auch noch $r_2=0$, so würde (20) gelten, was wir ja zunächst ausschließen wollen. Gilt der Sachverhalte der Fußnote 4 oder ist E so groß, daß Glieder in ε^2 noch Einfluß haben können, so müssen wir die algebraische Gleichung

$$(23)\quad \begin{cases} \prod_{m=1}^{n}(\Omega_{mm0}+\varepsilon\Omega_{mm1}+\varepsilon^2\Omega_{mm2}-\cos 2\pi\tau)- \\ \qquad -\varepsilon^2\sum_{\mu<\nu}^{n}\Omega_{\mu\nu1}\Omega_{\nu\mu1}\prod_{k}^{(\mu,\nu)}(\Omega_{kk0}-\cos 2\pi\tau)+O(\varepsilon^3)=0 \end{cases}$$

diskutieren. Dabei ist $\prod_{k}^{(\mu,\nu)}$ das Produkt der $(n-2)$ von n Faktoren, die nicht die Indizes μ oder ν haben. Ist $r_k^2<0$, so erhält (22a) folgende Gestalt:

$$(24)\quad \begin{cases} \cos 2\pi\tau_k=\mathfrak{Cof}\,2\pi\frac{|r_k|}{r}+ \\ \qquad +\frac{\varepsilon}{r|r_k|}\int_0^{2\pi}p_{kk0}(\xi)\,\mathfrak{Cof}\frac{|r_k|}{r}\xi\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{|r_k|}{r}(\xi-2\pi)\right)d\xi+O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

***Aus** (24) folgt, daß (2) sicher instabil ist, falls nur ein $r_k^2<0$ und ε hinreichend klein ist.*

Damit wollen wir die Diskussion für $r_k^2<0$ abschließen. Ist ε hinreichend klein, so sind die Glieder $O(\varepsilon^2)$ in (22) und (24) reell.

Da die Integrale des Differentialgleichungssystems stetige Funktionen der Parameter sind, müssen auch die Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Bereichen in der r, ε-Ebene stetige Kurven sein. Für $\varepsilon=0$ ist bei $r_k^2>0$ $\cos 2\pi\tau_k=\cos 2\pi\frac{r_k}{r}$. Für

$$(25)\qquad r=r_0=\frac{2r_k}{l}\qquad (l=1,2,\ldots)$$

ergeben sich also auf der r-Achse labile Punkte. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln von r und ε können von diesen Punkten Instabilitätsbereiche ausgehen, in denen beliebig nahe an der r-Achse $|\cos 2\pi\tau|>1$, aber reell ist. Auf der r-Achse treten Doppelwurzeln auf, falls (21) erfüllt ist. Von diesen Punkten können Instabilitätsbereiche ausgehen, in denen $\cos 2\pi\tau$ beliebig nahe an der r-Achse einen nichtverschwindenden Imaginärteil besitzt. Weiter sind noch Instabilitätsbereiche denkbar, die einen endlichen Abstand zur r-Achse haben. Wir müssen dabei beachten, daß wir wegen der Konvergenz der auftretenden Reihen nur den Streifen $0\leq\varepsilon<E$ betrachten können. E ist aber nach Abschnitt 2 nur wenig größer als $s_0e^{-(4\pi nM+1)}$. Diese Größe ist aber fast immer sehr viel kleiner als Eins. Aussagen über solche Bereiche sind daher auf Grund der von uns angewendeten Methode kaum zu erwarten.

Im Anschluß an Herrn METTLER [4] definieren wir:

Instabilitätsbereiche, die von Punkten (25) *der r-Achse ausgehen, heißen Bereiche erster Art. Instabilitätsbereiche, die von Punkten* (21) *der r-Achse ausgehen, heißen Bereiche zweiter Art. Bereiche, die im endlichen Abstand zur*

r-Achse bleiben, heißen Bereiche dritter Art. Daneben seien ausgeartete Bereiche solche, die durch $r_k = 0$ bedingt sind.

Nun können wir folgenden Satz formulieren:

Es sei für ein festes k $p_{kk1}(x)$ eine reellwertige Funktion der reellen Veränderlichen x, $r_k^2 > 0$ und $\Omega_{kk1} \not\equiv 0$. Dann beginnt auf der r-Achse in $r_0 = \frac{2r_k}{2l}$ ein Instabilitätsbereich erster Art, falls $\Omega_{kk1}(r_0) > 0$ ist und in $\bar{r}_0 = \frac{2r_k}{2l-1}$ ein ebensolcher Bereich, falls $\Omega_{kk1}(\bar{r}_0) < 0$ ist, solange $r_0, \bar{r}_0$ im zulässigen Intervall der r-Achse liegt und nicht der Bedingung (21) genügt. Dabei durchlaufe l die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Werden diese Bedingungen auch nur für ein einziges k erfüllt, so ist (2) für die in dem fraglichen Bereich der r, ε-Ebene liegende Parameterwerte instabil. Ist aber $r_1 = 0$, so ist (2) für alle die r instabil, für die $\Omega_{111} > 0$ ist [5]).

Ist mindestens eines der $\Omega_{kk1} = 0$ oder ist (21) erfüllt, so kann man auch für beliebig kleine ε aus (22) keine vollständige Aussage über das Stabilitätsverhalten machen. In diesem Fall müssen wir (23) benutzen. Für beliebiges n und allgemeine Koeffizientenfunktionen kann kaum etwas über die Lage der Wurzeln gesagt werden. Daher sollen im folgenden Abschnitt die für $n = 2$ auftretenden Fälle kurz charakterisiert werden.

5. Der Fall $n = 2$.

Aus (19) ergibt sich

$$\cos^2 2\pi\tau - (U_{11} + U_{22}) \cos 2\pi\tau + (U_{11} U_{22} - U_{12} U_{21}) = 0$$

oder

$$\cos 2\pi\tau = \tfrac{1}{2}(U_{11} + U_{22}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(U_{11} - U_{22})^2 + 4 U_{12} U_{21}}.$$

Ist $\Omega_{110} \neq \Omega_{220}$, ist also (21) nicht erfüllt, so erhalten wir

$$\cos 2\pi\tau_1 = \Omega_{110} + \varepsilon\Omega_{111} + \varepsilon^2\left[\Omega_{112} + \frac{\Omega_{121}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}}\right] +$$

$$+ \varepsilon^3\left[\Omega_{113} + \frac{\Omega_{121}\Omega_{212} + \Omega_{122}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}} - \Omega_{121}\Omega_{211}\frac{\Omega_{111} - \Omega_{221}}{(\Omega_{110} - \Omega_{220})^2}\right] + O(\varepsilon^4),$$

$$\cos 2\pi\tau_2 = \Omega_{220} + \varepsilon\Omega_{221} + \varepsilon^2\left[\Omega_{222} - \frac{\Omega_{121}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}}\right] +$$

$$+ \varepsilon^3\left[\Omega_{223} - \frac{\Omega_{121}\Omega_{212} + \Omega_{122}\Omega_{211}}{\Omega_{110} - \Omega_{220}} + \Omega_{121}\Omega_{211}\frac{\Omega_{111} - \Omega_{221}}{(\Omega_{110} - \Omega_{220})^2}\right] + O(\varepsilon^4).$$

Ist nun $\Omega_{111} = 0$ oder $\Omega_{221} = 0$ oder $\Omega_{111} = \Omega_{221} = 0$, so entscheidet jetzt das Zeichen des Koeffizienten von ε^2, ob in Punkten (25) ein Bereich erster Art beginnt. Er wäre dann von zweiter Ordnung klein. Verschwindet auch noch

[5]) Es sei darauf hingewiesen, daß alle $\Omega_{kk1} \equiv 0$ sind, falls alle Funktionen $p_{kk0}(x)$ im ganzen Periodizitätsintervall sich in gleichmäßig konvergente FOURIERsche Reihen entwickeln lassen, wie aus $(18)_1$ folgt.

dieser Koeffizient, so gibt es höchstens Bereiche der Ordnung ε^3. Dann entscheidet über die Existenz das Zeichen des Koeffizienten von ε^3. Ist $\Omega_{111} \neq 0$ bzw. $\Omega_{221} \neq 0$, so gilt der aus (22) gefolgerte Satz.

Jetzt wollen wir Punkte der ν, ε-Ebene betrachten, die oberhalb von Punkten ν_0 der ν-Achse liegen, die (21) erfüllen. Wir erhalten

$$\cos 2\pi \tau_{1,2} = \Omega_{110} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\Omega_{111} + \Omega_{221} \pm \sqrt{D_1}\right) + O(\varepsilon^2) \tag{26}$$

mit $D_1 = (\Omega_{111} - \Omega_{221})^2 + 4\,\Omega_{121}\,\Omega_{211}$. Damit ergibt sich folgender Satz:

Gilt (21) *und ist* $D_1 < 0$, *so liegt ein Instabilitätsbereich zweiter Art vor. Die Bereiche zweiter Art haben im allgemeinen dieselbe Größenordnung wie die Bereiche erster Art. Ist für ein* ν_0 (21) *erfüllt, so liegt ein Instabilitätsbereich erster Art vor, wenn in* (26) $D_1 > 0$ *ist, dazu bei* $\frac{2l\nu_k}{|\nu_1 \pm \nu_2|} = l_1$ ($l_1 = 1, 2, \ldots$ $l = 0, 1, 2, \ldots$ $k = 1, 2$) *und*

$$l_1 \equiv 0\,(2) \quad \textit{mit} \quad \Omega_{111} + \Omega_{221} + \sqrt{D_1} > 0$$

oder

$$l_1 \equiv 1\,(2) \quad \textit{mit} \quad \Omega_{111} + \Omega_{221} - \sqrt{D_1} < 0$$

sich ergibt.

Ist $\Omega_{1f1} = \Omega_{221} = \Omega_{121} = \Omega_{211} = 0$, so müssen wir statt (26)

$$\cos 2\pi \tau_{1,2} = \Omega_{110} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\Omega_{112} + \Omega_{222} \pm \sqrt{(\Omega_{112} - \Omega_{222})^2 + 4\,\Omega_{122}\Omega_{212}}\right) + O(\varepsilon^3)$$

diskutieren. $\Omega_{111} + \Omega_{221} \pm \sqrt{D_1} = 0$ könnte zwar unter geringeren Voraussetzungen erfüllt sein, doch diese sind ohne praktische Bedeutung. Analog ist vorzugehen, wenn weitere Koeffizienten verschwinden.

Ist $\nu_1 = \nu_2 = 0$, so ergibt sich Instabilität für alle ν, für die $\Omega_{111} + \Omega_{221} + \sqrt{D_1} > 0$ bei $D_1 > 0$ bzw. $D_1 < 0$ ist.

6. Schlußbemerkungen.

Für $n \geq 3$ führt die Diskussion der Bereiche zweiter Art auf die Untersuchung von Diskriminanten. Bereiche dritter Art wird man wegen des recht kleinen Konvergenzradius unserer Darstellung kaum mit unserer Methode nachweisen können.

Besondere Bedeutung für praktische Probleme hat der Spezialfall $p_{k\lambda 0} = b_{k\lambda} \cos x$, $p_{k\lambda\beta} = 0$ für $\beta \geq 1$[6]). Dabei seien die $b_{k\lambda}$ Konstante. Hier werden alle $\Omega_{kk1} \equiv 0$, so daß man mit (22) für die Bereiche erster Art nicht auskommt. Es gibt also keine Bereiche erster Art der Ordnung ε, der Ordnung ε^2 nur für $\nu_0 = 2\nu_k$ ($k = 1 \ldots n$). Auch bei den ν_0, die (21) erfüllen, verschwinden mit wachsendem l immer mehr Anfangsglieder $\Omega_{k\lambda\nu}$ bei $\nu \geq 1$. Dieser Spezialfall soll an einer anderen Stelle ausführlicher untersucht werden.

[6]) Zum Beispiel [2], [4], [6].

Literatur.

[1] Cesari, L.: Sulla stabilita delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coeffizienti periodici. Atti Accad. Ital. Mem. (6) **11**, 633—695 (1940). — [2] Haacke, W.: Über die freien Schwingungen in n-fachen Netzwerken mit pulsierenden Parametern. Arch. elektr. Übertr. **6**, 114—119 (1952). — [3] Haacke, W.: Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I. Math. Z. **56**, 65—79 (1952). — [4] Mettler, E.: Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing.-Arch. **17**, 418—449 (1949). — [5] Perron, O.: Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte. Math. Ann. **113**, 292—303 (193). — [6] Weidenhammer, F.: Der eingespannte, achsial pulsierend belastete Stab als Stabilitätsproblem. Ing.-Arch. **19**, 162—191 (1951).

Braunschweig, Heinrichstr. 7.

(Eingegangen am 22. April 1952.)

LENZ, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 46—64 (1952)

Über Orthogonaltrajektorien.

Von
HANFRIED LENZ.

Einleitung.

Die Orthogonaltrajektorien (abgekürzt O.T.) von Kugelscharen sind bekanntlich die räumliche Verallgemeinerung der Traktorien oder Zuglinien von HUYGENS[1]), [2]). DARBOUX und BIANCHI haben die Ermittlung der O.T. von Kreis-[3]) und Kugelscharen[4]), [5]) auf die Integration einer RICCATIschen Differentialgleichung zurückgeführt. Daraus kann man schließen, daß die einzelnen Scharkugeln durch die O.T. kreistreu aufeinander abgebildet werden. In der vorliegenden Arbeit, die möglichst die Anschauung heranziehen und Rechnungen einschränken will, soll der umgekehrte Weg beschritten werden. Nach allgemeinen Betrachtungen über die Abbildung der Flächen einer Schar aufeinander[6]) durch ihre O.T., die auch einen bequemen Weg zu einigen klassischen Sätzen geben, zeigen wir, daß die O.T. die Scharkugeln umkehrbar eindeutig und konform, also kreistreu aufeinander abbilden. Dieser Satz gilt für Kugeln beliebiger Dimensionszahl m im n-dimensionalen Raum. Für $m \leq 2$ werden daraus die DARBOUXschen Ergebnisse in anderer und etwas allgemeinerer Form hergeleitet. Die von DARBOUX, BIANCHI und VOSS angegebenen RICCATIschen Differentialgleichungen werden mit Hilfe LIEscher Gedanken[7]) aufgestellt. Dieser gegenüber DARBOUX umgekehrte Weg dürfte den anschaulich-geometrischen Gehalt des behandelten Problems besonders deutlich machen. Nach Erweiterungen eines Vossschen Satzes[2]) über sphärische O.T. folgt die Betrachtung solcher Scharen, die aus einer Kugel durch eine kontinuierliche Gruppe konformer Raumtransformationen hervorgehen, was auf eine besonders einfache Darstellung bekannter Ergebnisse[1]) [2]) führt. In § 4 behandeln wir das Problem der geschlossenen O.T. und beweisen einen von F. LÖBELL[8])

[1]) LORIA, G.: Spezielle algebraische und transzendente Kurven, insbes. S. 562ff. Leipzig 1902.

[2]) VOSS, A.: Zur Theorie der Kurven im Raume. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. 1918, 283—354, insbes. § VII, IX—XI, XIII.

[3]) DARBOUX, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces, insbes. Bd. I (1. Aufl.), S. 113 und Bd. I (2. Aufl., 1914), S. 145.

[4]) DARBOUX, G.: Leçons sur les systèmes orthogonaux, S. 26—50, insbes. S. 41. Paris 1898.

[5]) BIANCHI, L.: Lezioni di geometria differenziale, Bd. I/1, insbes. S. 55—60. Bologna 1927.

[6]) Vgl. LÖBELL, F.: Allgemeine Theorie der Flächenabbildungen, Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Nr. 5. Berlin 1942.

[7]) LIE-SCHEFFERS: Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, insbes. S. 766—777. Leipzig 1893.

[8]) Nach mündlicher Mitteilung von Herrn Prof. LÖBELL, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise verdanke.

vermuteten Satz. Wenn man von gewissen Ausnahmefällen absieht, hat eine geschlossene Kugelschar stets genau zwei geschlossene O.T., denen sich alle O.T. bei wiederholter Durchlaufung der Schar asymptotisch annähern und die überdies bei konstantem Kugelradius gleich lang sind. Es folgt noch eine Ausdehnung dieser Sätze auf Eiflächenscharen und m-dimensionale Kugelscharen.

§ 1. Zur Begriffsbestimmung der Flächenscharen und der O.T.

1. Zunächst sollen die Begriffe „Kurven- bzw. Flächenschar" und „O.T." so präzisiert werden, daß sie eine brauchbare Grundlage für das Weitere geben. An unsere Flächenscharen stellen wir folgende Forderungen, die wir gleich für einfach unendliche Scharen m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten (M_m) im n-dimensionalen Raum (R_n) formulieren:

F_I. Der Ortsvektor der Scharmannigfaltigkeiten gestatte in einem Bereich $\mathfrak{B}$ des R_n eine Parameterdarstellung ($i_1, \ldots, i_n$ seien die Grundvektoren eines rechtwinkeligen, cartesischen Koordinatensystems)

$$\mathfrak{r} = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n = \mathfrak{r}(p_1, \ldots, p_m, t),$$

wobei t der Scharparameter („die Zeit") und $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die Gaussschen Parameter der einzelnen Scharmannigfaltigkeiten seien. Alle partiellen Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ bis zur 3. Ordnung, in denen nur höchstens eine Differentiation nach t vorkommt, seien stetige Funktionen von $p_1, \ldots, p_m, t$, also von der Differentiationsreihenfolge unabhängig.

F_{II}. Die Ableitungsvektoren $\mathfrak{r}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{r}_{p_m}$ seien in $\mathfrak{B}$ linear unabhängig, d.h. jede Schar-M_m habe einen eindeutig bestimmten Tangential-R_m.

Unter der Einhüllenden[8a]) der Schar verstehen wir die Gesamtheit aller Punkte der Schar-M_m, für die die Ableitungsvektoren $\mathfrak{r}_{p_1}, \mathfrak{r}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{r}_{p_m}, \mathfrak{r}_t$ linear abhängig sind.

Für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ der O.T. erhalten wir zunächst

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \dot{\mathfrak{x}} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}_{p_i} \dot{p}_i + \mathfrak{r}_t .$$

Die Orthogonalitätsbedingungen $\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{r}_{p_j} = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, m$ liefern das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}_{p_i} \mathfrak{r}_{p_j} \dot{p}_i + \mathfrak{r}_{p_j} \mathfrak{r}_t = 0 .$$

Es läßt sich eindeutig nach den $\dot{p}_i$ auflösen, weil die Determinante des Systems wegen $F_{II} \neq 0$ ist. Die $\dot{p}_i$ werden also rationale Funktionen der Skalarprodukte $\mathfrak{r}_{p_i} \mathfrak{r}_{p_k}$, $\mathfrak{r}_{p_i} \mathfrak{r}_t$, d.h. (wegen F_I) zweimal stetig nach den p_i partiell differenzierbare Funktionen von $p_1, \ldots, p_m$ und t. Nach einem grundlegenden Satz von Lindelöf[9]) existieren daher die Lösungsfunktionen $p_i(t, t_0, p_{10}, \ldots, p_{m0})$ dieses

[8a]) Dieser Einhüllendenbegriff ist allgemeiner als der übliche; vgl. Kowalewski, G.: Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie, S. 24 oben. Berlin 1931.

[9]) Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, S. 34. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1942.

Systems, geben die O.T. durch den Punkt $t = t_0$, $p_i = p_{i0}$ an, sind stetig und haben stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den Integrationskonstanten p_{i0} und nach t, solange nur höchstens einmal nach t differenziert wird. Insbesondere ist

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial p_{j0}\,\partial t} = \frac{\partial^2 p_i}{\partial t\,\partial p_{j0}}, \qquad \frac{\partial^2 p_i}{\partial p_{j0}\,\partial p_{k0}} = \frac{\partial^2 p_i}{\partial p_{k0}\,\partial p_{j0}}.$$

Durch Anwendung der Regeln für die partielle Differentiation und unter Berücksichtigung der Forderung F_I folgt daraus, daß auch für den Ortsvektor $\mathfrak{x}(t, t_0, p_{10}, \ldots, p_{m0})$ die Ableitungen

$$\mathfrak{x}_{p_{i0}\,p_{j0}} = \mathfrak{x}_{p_{j0}\,p_{i0}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{p_{i0}\,t} = \mathfrak{x}_{t\,p_{i0}}$$

existieren und stetig sind. Wir haben damit

Hilfssatz 1. *Durch jeden Punkt einer Scharmannigfaltigkeit (mit dem Scharparameter t_0 und den* GAUSSschen *Parametern p_{i0}, $i = 1, \ldots, m$) geht genau eine O.T. mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}(t, t_0, p_{10}, \ldots, p_{m0})$. Die Scharmannigfaltigkeiten werden durch die O.T. umkehrbar eindeutig und zweimal stetig differenzierbar aufeinander abgebildet. Führt man $u_i = p_{i0}$ als neue* GAUSSsche *Parameter der Scharmannigfaltigkeiten ein, so haben auf einer O.T. liegende Punkte gleiche Parameterwerte u_i. In den neuen Parametern sind die Ableitungen $\mathfrak{r}_{u_i}$, $\mathfrak{r}_t$, $\mathfrak{r}_{u_i\,u_k} = \mathfrak{r}_{u_k\,u_i}$, $\mathfrak{r}_{u_i\,t} = \mathfrak{r}_{t\,u_i}$ stetige Vektorfunktionen aller Parameter.*

Die Gleichungen

$$\mathfrak{r}_{u_i\,u_j} = \mathfrak{r}_{u_j\,u_i}, \qquad \mathfrak{r}_{u_i\,t} = \mathfrak{r}_{t\,u_i}$$

sind nämlich nichts anderes als die oben gefundenen Beziehungen

$$\mathfrak{x}_{p_{i0}\,p_{j0}} = \mathfrak{x}_{p_{j0}\,p_{i0}}, \qquad \mathfrak{x}_{p_{i0}\,t} = \mathfrak{x}_{t\,p_{i0}}.$$

Wir wollen eine Parameterdarstellung, in der Punkte auf einer O.T. sich nur durch den Parameter t unterscheiden, eine *Normaldarstellung* einer M_m-Schar nennen.

2. Satz 1 gilt unabhängig davon, ob die O.T. einzelne Singularitäten (z.B. Spitzen) haben oder gar für ganze Zeitintervalle in einen Punkt zusammenfallen. Doch können solche Singularitäten nur auftreten, wenn $\dot{\mathfrak{x}} = 0$ ist, also die Ableitungsvektoren $\mathfrak{r}_{p_1}, \mathfrak{r}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{r}_{p_m}$ und $\mathfrak{r}_t$ an der betreffenden Stelle linear abhängig sind, d.h. an Punkten der Einhüllenden. Man kann übrigens die Singularitäten immer ausschalten. Zu diesem Zweck fassen wir die gegebene Schar als n-dimensionale Projektion (verallgemeinerten Grundriß) einer $(n+1)$-dimensionalen Schar auf, indem wir jeder Schar-M_m noch eine etwa der Zeit proportionale $(n+1)$-te Koordinate x_{n+1} geben. Bei der Projektion gehen die O.T. der $(n+1)$-dimensionalen Schar auf der von ihr gebildeten M_{m+1} offenbar in die O.T. der n-dimensionalen Schar über. Die $(n+1)$-dimensionale Schar hat sicher keine Einhüllende mehr, ihre O.T. sind also singularitätenfrei.

Die folgende Verallgemeinerung dieses „Aufsteigens in den R_{n+1}" bzw. seiner Umkehrung, der Projektion in den „Grundriß", liegt nahe (der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $m = 1$, $n = 2$):

Wir können eine beliebige räumliche Schar ebener Kurven in eine ebene Schar überführen, indem wir als (im allgemeinen gekrümmte) „Projektionsstrahlen" die O.T. der die Scharkurven tragenden Ebenen wählen, oder anschaulich gesprochen, die Schar durch Abwicklung der die Scharkurven tragenden Ebenenschar in die Ebene rollen. Bekanntlich bildet diese Übertragung alle Scharkurven kongruent ab und die O.T. der räumlichen Schar gehen in die der ebenen über.

Die Verallgemeinerung dieser Betrachtung auf Flächenscharen und Scharen von in $(m+k)$-dimensionalen linearen Räumen liegenden m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im R_n macht keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten und sei daher hier nur angedeutet.

§ 2. Die Abbildung durch die O.T.

3. Wir ersetzen unsere Forderungen F_I und F_{II} des vorigen Paragraphen nun durch die folgende

F_N. Eine Flächenschar (im allgemeinen Fall Schar von ∞^1 m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten) im Raum (allgemein im R_n) sei in Normaldarstellung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v, t)$ (allgemein $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u_1, \ldots, u_m, t)$) gegeben mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung (außer $\mathfrak{r}_{tt}$, über dessen Existenz nichts vorausgesetzt wird), und es sei $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v \neq 0$ (im allgemeinen Fall: Die von den $m \cdot n$ Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{r}_{u_1}, \mathfrak{r}_{u_2}, \ldots, \mathfrak{r}_{u_m}$ gebildete Funktionalmatrix habe den Rang m oder: die Vektoren $\mathfrak{r}_{u_1}, \ldots, \mathfrak{r}_{u_m}$ seien linear unabhängig). Analytisch drückt sich die Aussage, daß u, v, t bzw. $u_1, \ldots, u_m, t$ Parameter einer Normaldarstellung sind, durch die Beziehungen $\mathfrak{r}_u \mathfrak{r}_t = \mathfrak{r}_v \mathfrak{r}_t = 0$ (bzw. $\mathfrak{r}_{u_i} \mathfrak{r}_t = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, m$) aus.

Die Voraussetzungen F_I und F_{II} werden jetzt nicht mehr benötigt. Wir werden vielmehr alle weiteren Schlüsse aus F_N ziehen. F_I und F_{II} mußten eingeführt werden — da eine gegebene Schar im allgemeinen nicht in Normaldarstellung vorliegt —, um die *Möglichkeit* einer Normaldarstellung zu sichern. Um die Abbildung der Scharflächen aufeinander durch die O.T., die im kleinen affin ist [F. LÖBELL [6]), S. 301] zu untersuchen, betrachten wir die *erste Grundform* in einem Punkt P

$$I = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \mathfrak{r}_u^2\,du^2 + 2\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v\,du\,dv + \mathfrak{r}_v^2\,dv^2.$$

$\mathfrak{n}$ sei der Normaleneinheitsvektor in Richtung der Bewegung von P, $\dot\sigma = \frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung längs der O.T.; dann ist $d\sigma$ das Bogenelement der O.T. durch P. Es wird

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = \dot\sigma \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \sigma} = \dot\sigma\,\mathfrak{n}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{r}_u}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{r}_t}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\dot\sigma\,\mathfrak{n}).$$

Wegen $\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n} = 0$ folgt daraus

(1) $\quad \frac{\partial E}{\partial t} = 2\dot\sigma\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_u$ und ebenso $\frac{\partial F}{\partial t} = 2\dot\sigma\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_v = 2\dot\sigma\,\mathfrak{r}_v\,\mathfrak{n}_u$; $\quad \frac{\partial G}{\partial t} = 2\dot\sigma\,\mathfrak{r}_v\,\mathfrak{n}_v$.

(Diese Formeln gelten auch für Flächenscharen in Räumen höherer Dimension. $\mathfrak{n}$ ist dann der tangential zu der die Flächenschar tragenden dreidimensionalen Mannigfaltigkeit liegende Normaleneinheitsvektor.) Für gewöhnliche Flächenscharen führen wir die zweite Grundform

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = -\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_u\,du^2 - 2\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{n}_v\,du\,dv - \mathfrak{r}_v\,\mathfrak{n}_v\,dv^2$$

ein und erhalten im Fall $\dot{\sigma} \neq 0$

$$\frac{\partial I}{\partial \sigma} = -2 \cdot II, \quad \text{in Worten:} \tag{2}$$

Hilfssatz 2. *Die Ableitung des ersten Fundamentaltensors der Scharfläche nach der Bogenlänge der O.T. ist der doppelte negative zweite Fundamentaltensor.*

Unsere Formel (2) ist nur eine andere, für unsere Zwecke allerdings besonders geeignete, Schreibweise eines wohlbekannten Sachverhalts[8]). Auf einer von der einfach unendlichen Schar der O.T. mit $v = \text{const}$ gebildeten Fläche $\mathfrak{F}_v$ bilden nämlich die Linien $u = \text{const}$ (d.h. die O.T.) und $t = \text{const}$ ein orthogonales Kurvennetz mit einem Linienelement

$$ds^2 = E\,du^2 + \overline{G}\,dt^2.$$

Dann gilt die bekannte Formel

$$\mathcal{G} = \mathcal{N} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sqrt{E\overline{G}}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial t}\ [10), 11)]$$

für die geodätische Krümmung $\mathcal{G}$ der Kurve $t = \text{const}$ auf $\mathfrak{F}_v$, d.h. für die Normalkrümmung $\mathcal{N}$ derselben Kurve auf der Scharfläche. Diese Formel bedeutet geometrisch dasselbe wie unsere Formel (2).

Für die Abbildung längs eines endlichen O.T.-Bogens gilt die Formel

$$I(\sigma_1) = I(\sigma_0) - 2\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} II\,d\sigma = I(\sigma_0) - 2\int_{t_0}^{t_1} II(t)\cdot\dot{\sigma}\,dt. \tag{3}$$

Der lineare Abbildungsmaßstab $m(\sigma_1, \sigma_0) = \sqrt{\frac{I(\sigma_1)}{I(\sigma_0)}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}$ [6), S. 302] wird

$$m(\sigma_1, \sigma_0) = e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{N}\,d\sigma} \tag{4}$$

Denn nach (2) ist

$$\frac{\partial m^2}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{I}{I_0} = -2\cdot\frac{II}{I_0} = -2\cdot\frac{II}{I}\cdot\frac{I}{I_0} = 2\mathcal{N}\cdot m^2.$$

Dabei ist $\mathcal{N}$ die Normalkrümmung des betreffenden Kurvenelements. Sie ist negativ, wenn $\mathfrak{n}$ nach dem Krümmungszentrum des zugehörigen Normalschnitts weist, und positiv, wenn $\mathfrak{n}$ entgegengesetzt gerichtet ist.

[10]) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3. Aufl., Bd. I, S. 150, Formel (12). Berlin 1930.

[11]) CESARO, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie, insbes. S. 143, (14); S. 198 (3); S. 271 (3); S. 305, (8). Leipzig 1901. Deutsch von G. KOWALEWSKI.

Entsprechend wird der Flächenmaßstab [6), S. 303]

$$M(\sigma_1, \sigma_0) = e^{2\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} H\, d\sigma}, \tag{5}$$

wobei H die mittlere Krümmung bedeutet.

Satz 1. *Die Abbildung der Scharflächen aufeinander durch die O.T. ist dann und nur dann überall a) flächentreu, b) konform, c) längentreu, wenn sämtliche Scharflächen a) Minimalflächen, b) Kugeln [einschließlich Ebenen], c) Ebenen sind.*

Beweis. Die Behauptung a) folgt unmittelbar aus (5). Um Behauptung b) einzusehen, führen wir auf der Ausgangsfläche Krümmungslinienparameter ($F = M = 0$) ein. Nach (3) ist dann und nur dann längs der ganzen O.T. $F = 0$, wenn auch $M = 0$ ist, d.h. wenn die Hauptkrümmungsrichtungen bei der Abbildung erhalten bleiben. Daraus folgt übrigens unmittelbar der klassische DUPINsche Satz über dreifache Orthogonalsysteme[12]). Zwei gegeneinander verdrehte rechte Winkel in einem Flächenpunkt bleiben aus demselben Grund genau dann erhalten, wenn die O.T. auf allen Scharflächen Nabelpunkte ausschneidet. Die Abbildung ist also überall konform, wenn und nur wenn alle Scharflächen aus lauter Nabelpunkten bestehen, d.h. Kugeln (einschließlich Ebenen) sind. Behauptung c) folgt aus a) und b). Aus Satz 3 b) ergibt sich übrigens unmittelbar der LIOUVILLEsche Satz, daß jede konforme Abbildung des Raumes in sich eine Kugelverwandtschaft ist, da jedes aus Scharen paralleler Ebenen bestehende Orthogonalsystem in ein System aus Kugeln übergehen muß. Weitere direkte Folgerungen aus Satz 2 sind

Satz 2. *Die Hauptlinien* [F. LÖBELL[6]), S. 302] *der infinitesimalen Abbildung durch die O.T. sind die Krümmungslinien.*

Satz 3. *Für die Hauptmaßstäbe der endlichen Abbildung gelten die Ungleichungen*

$$\begin{cases} m_I \leq e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathfrak{N}_I\, d\sigma} \\ m_{II} \geq e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathfrak{N}_{II}\, d\sigma}, \end{cases} \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{N}_I$ die größere, $\mathfrak{N}_{II}$ die kleinere der beiden Hauptkrümmungen ist. (m_I ist der größere der beiden Hauptmaßstäbe.) Für die maximale Winkeländerung ω erhalten wir [6), S. 303]

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m_I}{m_{II}}} - \sqrt{\frac{m_{II}}{m_I}}\right) \leq \operatorname{Sin}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\mathfrak{N}_I - \mathfrak{N}_{II}}{2}\, d\sigma. \tag{7}$$

Das Gleichheitszeichen gilt für jede O.T. längs nabelpunktfreier Bögen in einer dieser Ungleichungen (und dann in allen), wenn und nur wenn die Flächenschar

[12]) Enzykl. math. Wiss. III D 9 (SALKOWSKI), S. 548, insbes. Fußnote [17]).

eine LAMÉ*sche Schar ist, d.h. sich zu einem dreifachen Orthogonalsystem ergänzen läßt.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus (4), ebenso [nach [6]), S. 303] die Ungleichung (7). Das Gleichheitszeichen kann in einer der Ungleichungen (6) nur gelten, wenn $\mathfrak{N}$ stets eine Hauptkrümmung ist. Dann bleibt bei der Abbildung durch die O.T. das Netz der Krümmungslinien erhalten, d.h. es gilt auch für die zweite Ungleichung (6) und (7) das Gleichheitszeichen. Die Flächen, die von den O.T. durch je eine Krümmungslinie der Ausgangsscharfläche gebildet werden, erzeugen dann mit den Scharflächen ein dreifaches Orthogonalsystem. Daß umgekehrt für die Abbildung einer LAMÉschen Schar durch ihre O.T. in (6) und (7) das Gleichheitszeichen gelten muß, folgt aus dem DUPINschen Theorem. Wenn schließlich in (7) das Gleichheitszeichen gilt, so folgt, daß dies auch für (6) der Fall ist.

Die Sätze 1 bis 3 lassen sich mit den zugehörigen Formeln fast unverändert auf Hyperflächenscharen im n-dimensionalen Raum übertragen, ebenso auf Scharen m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im R_n. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Wir werden im folgenden nur bei der Betrachtung von Scharen mehrdimensionaler Kugeln von der entsprechenden Verallgemeinerung des Satzes 1 b) Gebrauch machen. Eine Einführung in die n-dimensionale Differentialgeometrie findet sich z.B. in dem bereits erwähnten Werk von E. CESÀRO[11]), auf das für eingehendere Studien verwiesen sei:

§ 3. Kreis- und Kugelscharen.

4. Wir rechnen die Ebenen stets mit zu den Kugeln, die Geraden zu den Kreisen. Andernfalls sprechen wir von *eigentlichen* Kugeln, Kugelscharen usw. Punkte als ausgeartete Kugeln oder Kreise lassen wir *nicht* zu. Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen folgt nun unmittelbar der bekannte [DARBOUX[4]), S. 42, BIANCHI[5]), S. 60] Satz: *Durch die O.T. werden die Kugeln einer Schar kreisverwandt aufeinander abgebildet. Betrachtet man sie als* RIEMANN*sche Zahlenkugeln einer komplexen Variabeln z, so drückt sich die Abbildung durch die O.T. von einer Scharkugel auf die andere durch eine lineare Substitution*

$$z(t) = \frac{a(t)\,z(t_0) + b(t)}{c(t)\,z(t_0) + d(t)}$$

aus.

Denn eine umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung zweier Kugeln aufeinander mit Erhaltung der Orientierung ist nach einem bekannten funktionentheoretischen Satz eine lineare Abbildung. Will man mit weniger Funktionentheorie auskommen, so kann man die Kugelschar als räumlichen Schnitt einer Schar dreidimensionaler Kugeln im R_4 auffassen. Die dreidimensionalen Kugeln werden nach dem verallgemeinerten Satz 3 b) konform, also nach dem LIOUVILLEschen Theorem kugelverwandt aufeinander abgebildet. Die entsprechende Methode des Aufsteigens in den Raum liefert für ebene Kreisscharen den bekannten Satz: *Die O.T. einer Kreisschar bilden die Scharkreise*

so aufeinander ab, daß die (reellen) Doppelverhältnisse erhalten bleiben [DARBOUX[3]), Bd. I (1. Aufl.), S. 116].

Das gilt nach der Betrachtung am Schluß von § 1 auch für räumliche Kreisscharen. Für diesen Fall stammt der Satz von DEMARTRES, der ihn anläßlich seiner Untersuchungen über zyklische Flächen fand [DARBOUX[3]), Bd. I (2. Aufl.), S. 145; Bd. IV, S. 494].

Allgemeiner gilt

Satz 4. *Die O.T. einer einfach unendlichen Schar von m-dimensionalen Kugeln* (S_m) *auf einer* $(m+1)$*-dimensionalen Mannigfaltigkeit im* R_n $(n>m)$ *bilden die Scharkugeln kreistreu (im Fall* $m=1$ *projektiv, d.h. doppelverhältnistreu) aufeinander ab.*

Beweis. Für $m+1=n$ und $m>2$ (für $m\leq 2$ sind wir fertig) folgt die Behauptung aus dem verallgemeinerten Satz 1b) und dem (auch daraus folgenden) m-dimensionalen LIOUVILLEschen Theorem. Falls aber $n>m+1$ ist, wickle man die Schar nach dem am Schluß von § 1 angegebenen Verfahren in einen R_{m+1} ab und führe so den allgemeinen Fall auf den bereits erledigten zurück.

Aus dem DEMARTRESschen Sonderfall $m=1$, $n=3$ ergibt sich auch ohne weiteres der RIBAUCOURSche Satz: *Hat eine doppelt unendliche Kreisschar im Raum drei Orthogonalflächen, so besteht sie aus O.T. einer Flächenschar*[13]). Auch dieser Satz gestattet auf Grund unserer Betrachtungsweise mehrdimensionale Verallgemeinerungen.

5. Für Kugelscharen ($m=2$, n beliebig) und Kreisscharen (Schnitte von Kugelscharen) ergibt sich aus den Sätzen 6 und 8 die folgende Erweiterung des in der Einleitung erwähnten DARBOUXschen Ergebnisses:

Satz 5. *Wenn man die Scharkugeln nach irgendeinem stetig differenzierbar von der Zeit abhängigen Gesetz als Zahlenkugeln einer komplexen Koordinate* z_t *auffaßt, und wenn* $z_t(t)$ *im Koordinatensystem* (z_t) *den Schnittpunkt einer festen O.T. mit der zum Parameter t gehörigen Scharkugel bezeichnet, so genügt* $z_t(t)$ *einer* RICCATIschen *Differentialgleichung*

$$\frac{dz_t(t)}{dt} = A(t)\,z_t(t)^2 + B(t)\,z_t(t) + C(t). \tag{8}$$

Jede Lösung dieser Differentialgleichung stellt dann eine O.T. der Schar dar.

Beweis. Die Abbildung von $z_0(0)$ auf $z_t(t)$ ist eine (im allgemeinen gebrochen) lineare, daraus folgt die Behauptung nach einem bekannten und leicht einzusehenden Satz von S. LIE [LIE-SCHEFFERS[7]), S. 771, Satz 4]. Da man die Differentialgleichungen der O.T. in gewöhnlichen Koordinaten stets aufstellen kann, erfordert die Ermittlung der Differentialgleichung (8) nur elementare Operationen und Differentiationen. Man kann (8) auch direkt erhalten, wenn man die infinitesimale Substitution [wir schreiben kurz $z(t)$ für $z_t(t)$]

$$z(t+dt) = \frac{z(t)\,(1+\alpha(t)\,dt)+\beta(t)\,dt}{z(t)\,\gamma(t)\,dt+1+\delta(t)\,dt}$$

[13]) Enzykl. math. Wiss. III D 9 (SALKOWSKI), S. 574.

kennt. Dann bekommt (8) die Form

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma z^2 + (-\delta + \alpha) z + \beta. \tag{9}$$

Ist eine O.T. bekannt, so erhält man also alle durch zwei Quadraturen[4]. [Ein besonders schöner Beweis dieser bekannten Tatsache findet sich bei LIE-SCHEFFERS[7], S. 768.]

Satz 6. *Haben alle Scharkugeln (im gewöhnlichen Raum) bzw. Scharkreise (in der Ebene) gleichen Radius und kennt man drei O.T., so lassen sich alle O.T. ohne weitere Quadratur bestimmen und rektifizieren.*

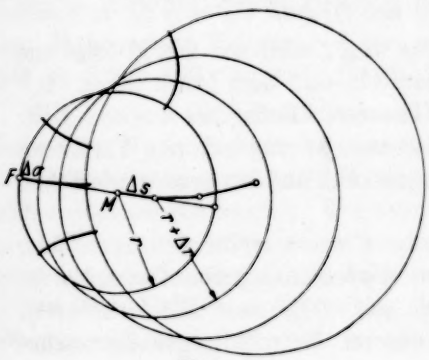

Fig. 1.

Beweis. Aus drei O.T. ergeben sich wegen der Erhaltung des Doppelverhältnisses alle O.T. ohne Quadratur. Damit erfordert auch die Bestimmung des linearen Maßstabs der Abbildung längs einer festen O.T. nur noch eine Differentiation. Nach Formel (4) ist aber für festen Radius der Logarithmus des Abbildungsmaßstabs proportional der Bogenlänge der zugehörigen O.T.

6. Wir wollen jetzt die Differentialgleichung (8) wirklich aufstellen, und zwar wollen wir die komplexe Koordinate z_t (kurz z) dadurch einführen, daß die Scharkugeln durch parallele Normalen auf die Einheitskugel als RIEMANNsche Zahlenkugel abgebildet werden. Die Fixpunkte der infinitesimalen Substitution liegen offenbar in den Endpunkten des zur Tangente an die Mittelpunktskurve im Kugelmittelpunkt parallelen Einheitskugeldurchmessers. Die Substitution ist hyperbolisch, ihr Abbildungsmaßstab in dem Fixpunkt, für den die betreffende O.T. für wachsendes t ins Kugelinnere wandert, setzt sich zusammen aus dem Abbildungsmaßstab der Scharkugeln im entsprechenden Punkt F, nach (4) gleich $1 - \frac{d\sigma}{r}$, und dem Verhältnis der Abbildungsmaßstäbe der Scharkugeln auf die Einheitskugel, also dem Verhältnis $r:(r+dr)$. Der zusammengesetzte Maßstab ist also gleich $\left(1 - \frac{d\sigma}{r}\right)\frac{r}{r+dr} = 1 - \frac{d\sigma + dr}{r} = 1 - \frac{ds}{r}$, wobei ds das Bogenelement der Mittelpunktskurve ist (vgl. Fig. 1). In der Figur wurden die (ebene) Mittelpunktskurve durch einen Streckenzug und die O.T. durch Orthogonalkreisbögen zu je zwei benachbarten Scharkugeln approximiert. Man kann beweisen, daß sich diese Approximation beliebig genau machen läßt.

Der Tangentenvektor der Mittelpunktskurve schließe mit der Ebene des Nullmeridians der Einheitskugel den Winkel φ, mit der die Pole verbindenden Achse den Winkel ψ ein. Die Einheitskugel werde vom Nordpol auf die Äquatorebene so stereographisch projiziert, daß der Nullmeridian in die positive reelle Achse übergeht. Dann sind die komplexen Koordinaten unserer

Fixpunkte $-e^{\varphi i}\cdot \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ und $e^{\varphi i}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$. Wir erhalten also für die infinitesimale Substitution

$$\frac{z+dz+e^{\varphi i}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{z+dz-e^{\varphi i}\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}}=\frac{z+e^{\varphi i}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{z-e^{\varphi i}\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}}\left(1-\frac{ds}{r}\right)$$

oder nach kurzer Rechnung

$$2r\frac{dz}{ds}=(z^2e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})\sin\psi-2z\cos\psi. \tag{10}$$

7. Statt dessen kann man, wie Voss[2]) (S. 336) gezeigt hat, eine Riccatische Differentialgleichung aufstellen, die nur von den *natürlichen* Gleichungen

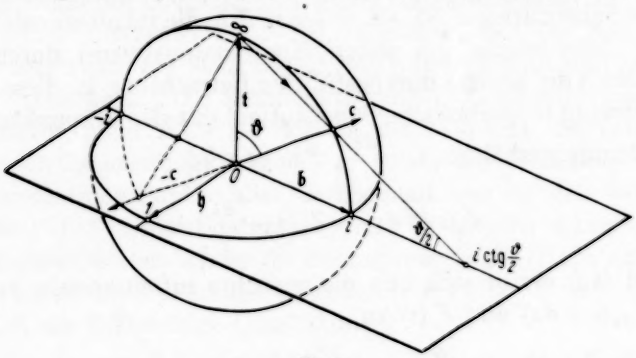

Fig. 2.

der Schar $r=r(s)$, $k=k(s)$, $w=w(s)$ abhängt. k und w bedeuten dabei die Krümmung und Windung der Mittelpunktskurve. Wir wollen diese Vosssche Gleichung mit Hilfe der infinitesimalen Substitution ableiten, um den geometrischen Gehalt der Betrachtung deutlich hervorzuheben. Wir setzen für jeden Wert s des Scharparameters eine komplexe Variable Z_s fest, indem wir auf der Einheitskugel den Endpunkten der Vektoren $\pm\mathfrak{t}(s)$, $\pm\mathfrak{h}(s)$, $\pm\mathfrak{b}(s)$ bzw. die Koordinaten $\begin{cases}\infty\\0\end{cases}$, ± 1, $\pm i$ zuordnen, d.h. indem wir die mit dem begleitenden Dreibein der Mittelpunktskurve starr verbundene Zahlenkugel stereographisch vom Endpunkt des Tangentenvektors aus auf die Normalebene projizieren (vgl. Fig. 2).

Die infinitesimale Koordinatentransformation vom System (Z_s) zum System (Z_{s+ds}) läßt sich dann leicht bestimmen. Sie ist nämlich eine Drehung der Einheitskugel, deren Fixpunkte die Enden des Darbouxschen *Drehvektors* $\mathfrak{c}=k\,\mathfrak{b}+w\,\mathfrak{t}$ sind, durch den Winkel $|\mathfrak{c}|\,ds=c\,ds=\sqrt{k^2+w^2}\,ds$. Die Drehung des begleitenden Dreibeins erfolgt so, daß sie mit der Richtung von $\mathfrak{c}$ eine Rechtsschraube bildet, die *relative* Drehung eines raumfesten Systems zum körperfesten, die ja die Koordinatentransformation definiert, also gerade umgekehrt. In der komplexen Z_s-Ebene haben die Fixpunkte die Koordinaten

$-i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}$ und $+i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}$, wobei $\vartheta = \mathrm{arc\,tg}\frac{k}{w}$ der Winkel zwischen den Vektoren t und c ist. Es wird also

$$\frac{Z_{s+ds}+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_{s+ds}-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}} = \frac{Z_s+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_s-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}}\,e^{-ci\,ds}. \tag{11}$$

Wir wollen nun den Schnittpunkt S einer festen O.T. mit der zum Scharparameter s gehörigen Scharkugel durch parallele Normalen auf die Einheitskugel abbilden. Wenn wir die Punkte der Einheitskugel im Koordinatensystem $(Z_{s'})$ durch komplexe Zahlen darstellen, so soll $Z_{s'}(s)$ in *diesem* System den Punkt S darstellen. Die infinitesimale Substitution $Z_s(s)\to Z_{s+ds}(s)$ oder auch $Z_s(s+ds)\to Z_{s+ds}(s+ds)$ haben wir in (11) soeben bestimmt. Wir wollen ihr die Substitution $Z_s(s)\to Z_s(s+ds)$, d.h. die infinitesimale Abbildung benachbarter Scharkugeln (im selben Koordinatensystem) durch die O.T. überlagern. Nach der in Nr. 6 durchgeführten Betrachtung ist diese Abbildung eine reine Dehnung (hyperbolische Substitution) mit den Fixpunkten 0 und ∞ und dem Dehnungsverhältnis $1-\frac{ds}{r}$, d.h. es wird

$$Z_s(s+ds) = Z_s\left(1-\frac{ds}{r}\right). \tag{12}$$

Aus (11) und (12) ergibt sich nun die gesuchte infinitesimale Substitution zwischen $Z_{s+ds}(s+ds)$ und $Z_s(s)$ zu

$$\frac{Z_{s+ds}(s+ds)+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_{s+ds}(s+ds)-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}} = \frac{Z_s\left(1-\frac{ds}{r}\right)+i\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{Z_s\left(1-\frac{ds}{r}\right)-i\,\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}}(1-i\,c\,ds). \tag{13}$$

Daraus folgt nach einfacher Rechnung, wenn wir die Indizes der Kürze halber wieder weglassen, also z.B. $Z+dZ$ für $Z_{s+ds}(s+ds)$ schreiben:

$$\frac{dZ}{ds}+\frac{Z}{r}-\frac{k}{2}(Z^2+1)+i\,wZ=0. \tag{14}$$

Ersetzt man hierin Z durch $-Z$ und s durch $-s$ (was wir aber nicht tun wollen), so kommt man genau auf die von Voss rechnerisch gefundene Differentialgleichung [2), S. 336 unten].

Führt man die Bogenlänge des Tangentenbildes der Mittelpunktskurve als unabhängige Veränderliche $S=\int k\,ds$ ein, so wird aus (14)

$$\frac{dZ}{dS} = \frac{Z^2+1}{2} - Z\left(\frac{1}{kr}+i\frac{w}{k}\right). \tag{14a}$$

Diese Differentialgleichung hängt nur noch von zwei „willkürlichen" Funktionen kr und w/k ab. Die Kugelscharen, für die diese Funktionen übereinstimmen, die also auf dieselbe Differentialgleichung (14a) führen, sind die ROUQUET-DARBOUXschen „similären Scharen" [DARBOUX[3]), Bd. I (1. Aufl.), S. 114; DARBOUX[4]), S. 36].

8. Voss hat in seiner mehrfach zitierten Arbeit [Voss[2]), S. 352] gezeigt, daß die O.T. einer einen Torus einhüllenden Schar gleicher Kugeln sphärische Kurven sind. Wir verallgemeinern diesen Satz wie folgt:

Satz 7. *Hat die gegebene Kugelschar eine gemeinsame Orthogonalkugel* $\mathfrak{K}$, *so liegt jede O.T. der Schar durch einen Punkt von* $\mathfrak{K}$ *ganz auf* $\mathfrak{K}$. *Hat die gegebene Schar zwei gemeinsame Orthogonalkugeln, so sind alle O.T. sphärische Kurven und lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.*

Beweis. I. Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn man die Kugel $\mathfrak{K}$ durch eine Inversion in eine Ebene überführt.

II. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da jede Scharkugel mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ das ganze von ihnen bestimmte Kugelbüschel orthogonal schneidet.

III. Schneiden sich die beiden Orthogonalkugeln in einem Kreis, so stellt dieser zwei bekannte O.T. dar, d.h. eine Quadratur genügt zur Bestimmung aller O.T. [Lie-Scheffers[7]), S. 770]. Berühren sich die Kugeln in einem Punkt, so lassen sich die Scharkugeln durch Inversion in Berührebenen eines Zylinders verwandeln. Die Ermittlung ihrer O.T. erfordert also wieder nur eine Quadratur, nämlich die Abwicklung des Zylinders. Schneiden sich aber die beiden Orthogonalkugeln nicht, so gehen alle Scharkugeln durch die beiden gemeinsamen Punkte aller Orthogonalkreise zu den beiden Kugeln. Diese Punkte sind in Übereinstimmung mit § 1 als zwei bekannte ausgeartete O.T. anzusehen, woraus wieder die Behauptung folgt. (Nach einer geeigneten Inversion wären die Scharkugeln Berührebenen eines Kegels; seine Abwicklung enthält die noch nötige Quadratur.)

Satz 7a. *Ist eine O.T. eine sphärische Kurve, so jede O.T. durch einen auf einer sie enthaltenden Kugel liegenden Punkt. Ist also eine O.T. ein Kreis, so sind alle O.T. sphärische Kurven.*

Denn jede die O.T. enthaltende Scharkugel ist gemeinsame Orthogonalkugel aller Scharkugeln. Ebenso folgt

Satz 7b. *Sind zwei O.T. einer Kugelschar sphärische Kurven auf verschiedenen Kugeln, so sind alle O.T. sphärische Kurven und lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.*

9. Man kann den Fall einer ebenen Mittelpunktskurve (oder den darin durch eine Inversion überführbaren der Schar mit einer gemeinsamen Orthogonalkugel) als Poincarésches Modell einer nichteuklidischen Ebenenschar deuten und erhält so zwei im euklidischen Fall elementare Sätze:

Die O.T. einer nichteuklidischen Ebenenschar bzw. der Geraden auf einer nichteuklidischen Regelfläche bilden die einzelnen Scharebenen bzw. -geraden nichteuklidisch kongruent aufeinander ab.

Hat eine nichteuklidische Geradenkongruenz eine Orthogonalfläche (im wirklichen nichteuklidischen Raum, also außer der doppelt zählenden Fundamentalkugel), so hat sie unendlich viele, und je zwei Orthogonalflächen schneiden aus allen ihren Geraden gleiche Strecken aus.

Das dürften keine neuen Erkenntnisse sein; ihre Einordnung in unseren Zusammenhang ist aber vielleicht doch nicht ohne Interesse.

10. Wir wollen noch ein Verfahren zur Ermittlung der O.T. skizzieren für den Fall, daß die Kugelschar aus einer Kugel durch eine einfach kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ konformer Raumtransformationen hervorgeht. Wir nennen eine solche Schar eine LIEsche Kugelschar. Wir erhalten z. B. LIEsche Scharen (vom trivialen Fall des Kugelbüschels abgesehen), wenn die Einhüllende der Kugelschar eine DUPINsche Zyklide oder eine Schraubenröhrenfläche ist oder wenn die Mittelpunktskurve Loxodrome eines Kreiskegels ist und der Kugelradius dem Abstand des Kugelmittelpunkts von der Spitze proportional ist. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei isomorph auf die additive Gruppe der reellen Variabeln τ bezogen; τ heiße dann ein *Gruppenparameter*. Es gibt im allgemeinen zwei Bahnkurven der Gruppe, die gleichzeitig O.T. sind. Denn bildet man eine Scharkugel $\mathfrak{K}_1$ auf eine zweite $\mathfrak{K}_2$ durch die Bahnkurven und rückwärts die Kugel $\mathfrak{K}_2$ auf $\mathfrak{K}_1$ durch die O.T. ab, so hat die zusammengesetzte kreistreue Abbildung im allgemeinen zwei Fixpunkte. Das gilt auch für $\mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{K}_1$, d.h. es gibt im allgemeinen zwei Bahnkurvenelemente, die $\mathfrak{K}_1$ senkrecht schneiden und die daher einer Bahnkurve angehören, die gleichzeitig O.T. ist. Ordnen wir nun auf einer Scharkugel $\mathfrak{K}_0$ ihren Schnittpunkten mit den beiden orthogonalen Bahnkurven die komplexen Koordinaten 0 und ∞ zu und legen im übrigen die Koordinaten auf den Scharflächen so fest, daß die Bahnkurven die Gleichungen $Z = \text{const}$ haben, so wird die von den O.T. erzeugte infinitesimale Substitution eine von τ unabhängige Drehstreckung, d.h. wir erhalten eine Differentialgleichung

$$\frac{dZ}{d\tau} = \gamma Z$$

oder

$$Z(\tau) = Z(0)\, e^{\gamma \tau}, \qquad \gamma = \text{const}. \tag{15}$$

In dieser einfachen Form lassen sich also die O.T. einer LIEschen Schar darstellen.

11. *Beispiele.*

a) Im Fall der geradlinig bewegten Kugel sind alle O.T. außer der Mittelpunktsbahn $\mathfrak{M}$ kongruente Tractricen. Ein Gruppenparameter τ ist die Streckenlänge s auf $\mathfrak{M}$. Wir haben also $Z(s) = e^{\gamma s} Z(0)$. γ erhalten wir aus dem linearen Abbildungsmaßstab m für $Z = 0$ (d.h. längs der Geraden $\mathfrak{M}$), denn nach (4) ist $m(s, 0) = e^{-\frac{s}{r}}$. Es wird also einfach

$$Z(s) = Z(0)\, e^{-\frac{s}{r}}. \tag{15a}$$

b) Ganz entsprechend ergibt sich im Fall des Torus als Einhüllender, wenn R der Radius und φ der Polarwinkel der Mittelpunktsbahn, $r < R$ der feste Scharkugelradius ist [für den Fall $r \geqq R$ vgl. d)], weil der Kreis mit Radius $\sqrt{R^2 - r^2}$ orthogonale Bahnkurve ist:

$$Z(\varphi) = Z(0)\, e^{-\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}\varphi} \tag{15b}$$

c) Im Fall des Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2α als Einhüllende sei σ der kürzeste Abstand eines Scharkugelpunktes von der Kegelspitze Dann ist $\sigma = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$. $\tau = \log\sigma$ kann als Gruppenparameter gewählt werden. Aus Formel (4) folgt

$$m(\sigma, 1) = e^{-\int_1^\sigma \frac{d\sigma}{r}} = \sigma^{-\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)}.$$

$e^{\gamma\tau}$ ist nun gleich dem Verhältnis des Abbildungsmaßstabes durch die O.T. zum Abbildungsmaßstab durch die Bahnkurven. Daraus folgt

$$e^{\gamma\tau} = \sigma^\gamma = \sigma^{-\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)} : \sigma = \sigma^{-\frac{1}{\sin\alpha}}, \text{ d.h.}$$

$$Z(\sigma) = Z(1) \cdot \sigma^{-\frac{1}{\sin\alpha}}. \tag{15c}$$

Für $\alpha \to 0$ kann man daraus durch Grenzübergang wieder (15a) gewinnen.

d) Im Fall der Schraubenröhrenfläche als Einhüllender ist die direkte Durchführung unseres Ansatzes nicht so einfach. Wir kommen leichter zum Ziel, wenn wir die oben aufgestellte Vosssche Gl. (14) (in der wir z statt Z schreiben) integrieren. Nach der Substitution $\frac{1}{rk} + i\frac{w}{k} = \mathfrak{Cof}\,\lambda$ ergibt sich

$$k(s - s_0) = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\lambda} \log \frac{z - e^{-\lambda}}{z + e^{\lambda}}$$

oder nach der Substitution $Z = \frac{z - e^{-\lambda}}{z + e^{\lambda}}$ (s ist Gruppenparameter)

$$Z(s) = Z(0)\, e^{k s\, \mathfrak{Sin}\,\lambda} = Z(0)\, e^{\pm \frac{s}{r}\sqrt{(1 + i w r)^2 - r^2 k^2}}. \tag{15d}$$

Im Fall $w = 0$, $k = 1/R$, $s = R\varphi$ kommen wir auf den Fall der Torusschar zurück. Interessant ist hier der Fall $r > R$, in dem die durch (15d) vermittelte Abbildung elliptisch, d.h. eine reine Drehung wird. Tatsächlich gehen in diesem Fall alle Scharkugeln durch zwei zur Ebene der Mittelpunktskurve symmetrisch gelegene Punkte und unsere Kugelschar geht nach einer Inversion in die Schar der Berührebenen eines Kreiskegels über (im Fall $R = r$ eines Kreiszylinders).

e) Die Mittelpunktskurve sei Loxodrome eines Kegels und es sei

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{s}, \qquad k = \frac{\beta}{s}, \qquad w = \frac{\gamma}{s}; \qquad \alpha, \beta, \gamma = \text{const}.$$

Aus (14) wird dann mit $\tau = \log s$

$$2\frac{dz}{d\tau} = \beta(z^2 + 1) - (\alpha + i\gamma) z.$$

Nach der Substitution $\alpha + i\gamma = \beta \operatorname{Cof} \lambda$ wird

$$\beta(\tau - \tau_0) = \frac{1}{\operatorname{Sin} \lambda} \log \frac{z - e^{-\lambda}}{z + e^{\lambda}}.$$

Führt man Z wie unter d) ein, so ergibt sich

$$Z(s) = Z(1)\, s^{\pm \sqrt{(\alpha+i\gamma)^2 - \beta^2}}. \tag{15e}$$

§ 4. Geschlossene Orthogonaltrajektorien.

12. Es gilt

Satz 8[8]). *Führt man auf zwei Scharkugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ je eine komplexe Koordinate Z ein, so verbinden entweder genau eine oder genau zwei oder alle O.T. auf beiden Kugeln gleiche Werte von Z. Insbesondere: Zu einer geschlossenen Kugelschar (d.h. einer Schar, deren Mittelpunktskoordinaten und deren Radius periodische Funktionen von t mit gleicher Periode sind) sind entweder genau eine oder genau zwei oder alle O.T. geschlossen.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß durch die O.T. eine lineare Abbildung der komplexen Z-Ebene auf sich vermittelt wird, die entweder einen oder zwei Fixpunkte hat oder die Identität ist.

Die angegebenen Fälle können wirklich alle vorkommen. Die identische Abbildung tritt für Kugelbüschel ein. Genau eine geschlossene O.T. hat man, falls alle Scharkugeln eine feste Gerade in einem Punkt berühren, ohne ein Büschel zu bilden. Dann geht die Schar nämlich durch Inversion in die Berührebenen eines Zylinders über. Im Fall der um einen exzentrischen Punkt gedrehten Kugel [die Hüllfläche ist ein Torus oder eine Spindelzyklide, s. Nr. 11, b) und d)] haben wir für $r < R$ eine hyperbolische, für $r > R$ eine elliptische Substitution mit genau zwei Fixpunkten. Daß die Fälle der Identität und der zusammenfallenden Fixpunkte besondere Ausnahmefälle sind, erkennt man (mit σ = Bogenlänge der O.T.) an.

Satz 9. *Wenn eine geschlossene O.T. existiert, für die das Integral $\int \frac{d\sigma}{r}$ nicht verschwindet (das ist z.B. der Fall, wenn die O.T. singularitätenfrei ist und die Schar keine Ebenen enthält), so existiert noch eine zweite geschlossene O.T., für die das Integral $\int \frac{d\sigma}{r}$ von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Vorzeichen wie für die erste ist. Dabei ist $d\sigma$ positiv zu zählen, wenn die Fortschreitungsrichtung der O.T. ins Innere der Scharkugeln weist, sonst negativ. Bei fortgesetztem Durchlaufen der Schar in einer Richtung nähern sich alle nichtgeschlossenen O.T. asymptotisch einer geschlossenen an, beim Durchlaufen in anderer Richtung der anderen.*

Beweis. I. Wenn $\int \frac{d\sigma}{r} \neq 0$ ist, so ist nach (4) der Abbildungsmaßstab beim Durchlaufen der geschlossenen O.T. von 1 verschieden, d.h. die Abbildung der Kugel auf sich kann weder identisch noch elliptisch noch parabolisch sein; es existiert also genau ein zweiter Fixpunkt, d.h. eine zweite geschlossene O.T.

II. In den beiden Fixpunkten sind die Abbildungsmaßstäbe reziprok, daher die zugehörigen Integrale $\int \frac{d\sigma}{r}$ entgegengesetzt gleich.

III. Die Behauptung über das asymptotische Verhalten der O.T. folgt unmittelbar daraus, daß der Abbildungsmaßstab nicht 1 ist. Ein Sonderfall ist

Satz 9a. *Wenn eine geschlossene O.T. einer Schar von Kugeln mit festem Radius eine von 0 verschiedene Länge hat, so gibt es eine zweite geschlossene O.T. (und nur eine) und diese hat entgegengesetzt gleiche Länge.*

Satz 9b. *Gegeben sei eine Kugelschar mit festem Radius. Wenn zwei O.T. zwei Punkte P_1, Q_1 einer Scharkugel $\mathfrak{K}_1$ mit zwei Punkten P_2, Q_2 einer zweiten Scharkugel $\mathfrak{K}_2$ verbinden und wenn die sphärischen Entfernungen P_1Q_1 und P_2Q_2 gleich sind, so sind die O.T.-Bögen P_1P_2 und Q_1Q_2 entgegengesetzt gleich lang.*

Beweis. Wir bilden $\mathfrak{K}_1$ zunächst mittels der O.T. auf $\mathfrak{K}_2$ ab und führen dann $\mathfrak{K}_2$ durch eine Bewegung so in $\mathfrak{K}_1$ über, daß P_2 nach P_1, Q_2 nach Q_1 gelangt. Dann sind P_1 und Q_1 Fixpunkte der zusammengesetzten Abbildung. Die Logarithmen der Abbildungsmaßstäbe sind nach (4) den entsprechenden Bogenlängen proportional, andererseits aber entgegengesetzt gleich, woraus die Behauptung folgt.

13. Bei der bereits behandelten Torusschar (Nr. 11b) fallen die beiden geschlossenen O.T. zusammen. Das ist stets der Fall, wenn ein Kreis O.T. ist, denn ein solcher schneidet jede Scharkugel zweimal senkrecht. Im allgemeinen ist diese Erscheinung jedoch nicht zu erwarten. Als Einzeltatsache beweisen wir dazu

Satz 10. *Eine ebene Eilinie mit genau vier Scheiteln kann nicht doppelte O.T. einer geschlossenen Kreis-(Kugel-)schar sein.*

Beweis. I. Zu jedem die Eilinie $\mathfrak{E}$ in zwei Punkten P, Q rechtwinklig schneidenden Kreis gibt es einen $\mathfrak{E}$ in P und Q berührenden Kreis $\mathfrak{K}$[8]).

II. $\mathfrak{K}$ kann mit $\mathfrak{E}$ außer P und Q keine Punkte gemein haben, denn sonst hätte $\mathfrak{E}$ nach einem Satz von Blaschke [10] S. 49] mehr als vier Scheitel. Daher liegt auf der Kurve $\mathfrak{E}$ entweder kein äußerer oder kein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$.

III. Zu jedem Punkt P gibt es daher im allgemeinen genau zwei Kreise, die $\mathfrak{E}$ in P und noch in einem Punkt Q berühren, nämlich den größten in P berührenden, ganz in der abgeschlossenen Eifläche enthaltenen und den kleinsten in P berührenden, die Eifläche ganz überdeckenden Kreis. Nur falls P einer der vier Scheitel ist, fällt für einen der beiden Kreise Q mit P zusammen.

IV. Bewegt sich P stetig auf dem Umfang von $\mathfrak{E}$, so auch Q. Dabei bewegen sich P und Q niemals in gleicher Umlaufsrichtung. Man zeigt das leicht auf Grund der Tatsache, daß die Krümmungen von $\mathfrak{E}$ in P und Q entweder beide kleiner oder beide größer als die Krümmung von $\mathfrak{K}$ sind.

V. Bewegt sich also P auf Q zu, so Q auf P, d.h. beide Punkte müssen schließlich zusammenrücken; unsere Schar würde also im Widerspruch zu

unserer Definition der Kreisschar einen in einen Punkt ausgearteten Kreis enthalten, womit Satz 10 bewiesen ist.

Zu einer nichtsphärischen Raumkurve wird man im allgemeinen zu gegebenem Punkt P nicht einmal einen zweiten Punkt Q finden können, so daß es eine die Kurve in P und Q senkrecht schneidende Kugel gibt.

14. Satz 9 setzt noch die Kenntnis von Eigenschaften einer geschlossenen O.T. voraus. Wir werden jetzt einen Satz beweisen, der ohne solche Voraussetzungen auskommt und nicht auf Kugelscharen beschränkt ist. Die Existenz *mindestens* einer geschlossenen O.T. einer geschlossenen Schar von Flächen gerader Dimension vom Zusammenhang der Kugel folgt übrigens schon aus einem Satz von BROUWER[14]), wonach jede topologische Abbildung der $2m$-dimensionalen Kugel auf sich, bei der die Orientierung erhalten bleibt, mindestens einen Fixpunkt hat. Darüber hinaus gilt

Satz 11. Vor. I: *Eine geschlossene Schar geschlossener Eiflächen habe überall stetig differenzierbare Normalenrichtungen (d.h. stetige Krümmungen) und positives Krümmungsmaß.*

Vor. II: *Die Einhüllende der Schar habe überall eine stetig vom Ort abhängige Normalenrichtung und enthalte keinen Punkt innerhalb einer Scharfläche. Es gebe keinen Punkt, der allen Scharflächen eines ganzen Zeitintervalls angehört.*

Behauptung. *Die Schar hat genau zwei geschlossene O.T. Alle nichtgeschlossenen O.T. nähern sich bei fortgesetztem Durchlaufen der Schar in einer beliebigen Richtung exponentiell asymptotisch einer der beiden geschlossenen O.T. an. Die beiden geschlossenen O.T. sind singularitätenfrei, alle anderen O.T. haben genau eine Spitze.*

Beweis. I. Wenn eine O.T. (für wachsendes t) eine Scharfläche von außen nach innen durchsetzt, so durchsetzt sie auch alle späteren Scharflächen von außen nach innen; denn sonst müßte sich entweder längs der O.T. das Vorzeichen der Flächenkrümmung umkehren, was Vor. I widerspricht; oder die O.T. müßte eine Spitze haben, d.h. die Einhüllende $\mathfrak{H}$ treffen, was Vor. II widerspricht, da dann $\mathfrak{H}$ doch einen Punkt innerhalb einer Scharfläche enthielte. Daraus folgt, daß jede O.T. höchstens eine Spitze hat.

II. Wir zerlegen die Scharfläche $\mathfrak{F}_0$ in zwei Gebiete $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_a$ und die Restmenge $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{G}_i$ bzw. $\mathfrak{G}_a$ bestehe aus den Punkten, in denen die O.T. nach innen bzw. außen gerichtet sind. In den Punkten von $\mathfrak{R}$ haben die O.T. dann Spitzen. Bei einmaligem Durchlaufen der Schar längs der O.T. in positiver Richtung wird $\mathfrak{G}_i$ einschließlich $\mathfrak{R}$ auf ein echtes Teilgebiet abgebildet, das keinen Punkt der Restmenge $\mathfrak{R}$ mehr enthält.

III. Die abs. Beträge der Normalkrümmungen aller Linienelemente auf Scharflächen haben als stetige Funktionen im (vierdimensionalen) beschränkten abgeschlossenen Bereich ein positives Minimum $\mathfrak{N}_0$. Die Bogenlängen der von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_i + \mathfrak{R}$ ausgehenden O.T. bis zum Schnitt mit $\mathfrak{F}_0$ nach einem vollen

[14]) BROUWER, L. E. J.: Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. Math. Ann. 69, 176—180, insbes. 180 (1910).

Umlauf haben eine positive untere Grenze l_0. Denn $\oint |ds|$ ist als Funktion des Ortes auf der ganzen Scharfläche $\mathfrak{F}_0$ positiv und stetig; weil ds längs einer in $\mathfrak{G}$ beginnenden O.T. stets positiv bleibt, folgt $l_0 \geq \operatorname{Min}_{\mathfrak{F}_0} \oint |ds| > 0$. Daher ist der lineare Abbildungsmaßstab bei einem Umlauf für $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_i \dotplus \mathfrak{R}$ nach (4)

$$m \leq e^{-l_0 \mathfrak{N}_0} < 1. \tag{16}$$

Daraus folgt, daß das Bild $\mathfrak{G}_1$ des Bereichs $\mathfrak{G}$ kleineren Flächeninhalt hat als $\mathfrak{G}$ selbst. Das Bild $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{G}_1$ liegt ganz im Bild von $\mathfrak{G}$, d.h. in $\mathfrak{G}_1$ usw. Wir erhalten so eine Folge von ineinander geschachtelten Bereichen $\mathfrak{G} > \mathfrak{G}_1 > \mathfrak{G}_2 > \ldots > \mathfrak{G}_n > \ldots$, die wegen (16) gegen einen Punkt konvergieren müssen, den wir C_i nennen. Die O.T. durch C_i ist dann geschlossen und singularitätenfrei.

IV. Ebenso wird der Bereich $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{R} \dotplus \mathfrak{G}_a$ beim wiederholten Durchlaufen der Schar in negativer Richtung asymptotisch auf einen Punkt C_a von $\mathfrak{G}_a$ abgebildet. Die O.T. durch C_a ist wieder geschlossen und singularitätenfrei.

V. Daraus folgt, daß jede durch einen von C_a verschiedenen Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}_a$ gehende O.T. beim wiederholten Durchlaufen der Schar in *positiver* Richtung schließlich in das Gebiet $\mathfrak{G}_i$ eintreten, also nach III. sich asymptotisch dem Punkt C_i annähern muß. Der Übergang von $\mathfrak{G}_a$ nach $\mathfrak{G}_i$ ist aber nur möglich, wenn die O.T. irgendwo eine Spitze hat. Entsprechendes gilt für die andere Richtung.

Der damit bewiesene Satz gilt mit seinem Beweis für beliebige Dimensionszahl der Scharflächen, insbesondere auch für Kurvenscharen.

15. Wir kommen nochmals auf die Kugelscharen zurück und verallgemeinern Satz 8 auf den m-dimensionalen Fall.

Satz 12. *Die geschlossenen O.T. einer geschlossenen Schar n-dimensionaler Kugeln schneiden aus jeder Scharkugel eine Punktmenge aus, die sich als Durchschnitt von Hyperkugeln darstellen läßt. Diese Menge enthält also entweder keinen (nach dem erwähnten* Brouwer*schen Satz nur möglich für ungerades n) oder einen oder zwei oder unendlich viele — einen Kreis oder eine Kugelfläche einer der Dimensionen $2, 3, \ldots, n-2$, n bildende — Punkte.*

Beweis. I. Man zeigt leicht durch Induktion, daß eine Kugelverwandtschaft, die $k+1 \geq 3$ nicht auf einer $(k-2)$-dimensionalen Kugel (abgekürzt S_{k-2}) liegende Punkte fest läßt, die durch die $k+1$ gegebenen Punkte bestimmte S_{k-1} punktweise in sich überführt. (Unter einer 0-dimensionalen Kugel seien dabei 2 Punkte verstanden.)

Der Satz sei nämlich für k auf keiner S_{k-3} liegende Punkte bewiesen. (Für $k=3$ und $k=4$ ist er bekanntlich richtig.) Dann liegen die ersten k von $k+1$ gegebenen, auf keiner S_{k-2} liegenden Punkten auf keiner S_{k-3}. Wenn eine Kugelverwandtschaft also die gegebenen Punkte $P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}$ einzeln fest läßt, so läßt sie nach der Induktionsvoraussetzung die von $P_1, \ldots, P_k$ bestimmte S_{k-2} punktweise fest. Q sei ein nicht auf dieser gelegener Punkt der durch $P_1, \ldots, P_{k+1}$ bestimmten S_{k-1}.

Je zwei Kreise durch Q, die die S_{k-2} durch $P_1, \ldots, P_k$ senkrecht schneiden, gehen punktweise in sich über oder sie werden an der S_{k-2} gespiegelt. Der letztere Fall ist aber ausgeschlossen, weil sonst auch P_{k+1} gespiegelt werden müßte, was nicht der Fall ist. Unsere Kugelverwandtschaft bildet daher die S_{k-1} durch $P_1, \ldots, P_{k+1}$ identisch ab, w. z. b. w.

II. Die Fixpunkte der durch die geschlossenen O.T. vermittelten Abbildung bilden also auf der Scharkugel, falls es mehr als einen gibt, eine S_m mit $0 \leq m \leq n$. Der Fall $m = n-1$ ist dabei ausgeschlossen, denn dann müßte, weil die Orientierung erhalten bleibt, die Abbildung die Identität sein.

München 19, Mettinghstr. 5.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

SCHEIBE, E.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 65—74 (1952)

Über einen verallgemeinerten affinen Zusammenhang.

Von
ERHARD SCHEIBE.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortführung der von LYRA [4] begonnenen Theorie des sog. affinen Zusammenhanges i. w. S. (im weiteren Sinne) und setzt deren Kenntnis voraus. Es werden einige Eigenschaften des zum affinen Zusammenhang i. w. S. gehörigen Krümmungstensors hergeleitet, danach der Standpunkt der Richtungsübertragung und der allgemeine projektive Standpunkt eingenommen, um schließlich zu einem Satz der metrischen Geometrie zu gelangen, der an Stelle des von WEYL als Fundamentalsatz der Infinitesimalgeometrie bezeichneten Satzes tritt.

Zu Beginn machen wir eine Bemerkung über die Bedeutung der von LYRA rein formal eingeführten Eichung im geometrisch strukturlosen Raum. Bei Zugrundelegung einer axiomatischen Definition des *n-dimensionalen analytischen Raumes*, wie man sie etwa bei CHEVALLEY [3], Chapter III: Manifolds, findet, zeigt sich folgendes: Während der gewöhnliche Tensorbegriff im n-dimensionalen Raum auf der Einführung der vom Koordinatensystem im Punkte P abhängigen Basis $L_i(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P$ $(1\leq i\leq n)$ (CHEVALLEY [3], S. 78) im Tangentialvektorraum in P beruht, gelangt man zu dem erweiterten Tensorbegriff durch Einführung der Basis $\frac{1}{x^0}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i}$, wobei x^0 die von LYRA eingeführte noch willkürliche *Eichfunktion* ist. Den Raum in P auf ein *Bezugssystem* beziehen heißt demnach: 1. in P ein Koordinatensystem einführen, 2. die Eichfunktion x^0 willkürlich vorgeben und im Tangentialvektorraum in P die von x^0 und vom Koordinatensystem abhängige Basis $L_i^*(f)=\frac{1}{x^0}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i}$ einführen. Der Übergang zu einem neuen Bezugssystem hat dann im Tangentialvektorraum in P die durch

$$M_i^*(f)=\sum_k \lambda^{-1}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}L_k^*(f);\qquad \lambda=\frac{\bar{x}^0}{x^0} \tag{1}$$

gegebene Basistransformation zur Folge, wobei λ das LYRAsche *Eichverhältnis* ist. Aus (1) errechnen sich dann ohne weiteres die Transformationsformeln für die Komponenten eines Tensors.

Der Krümmungstensor des affinen Zusammenhanges i. w. S. Nach LYRA sind die Komponenten eines affinen Zusammenhanges i. w. S. in einem beliebigen Bezugssystem von der Form

$$\tilde{\Gamma}_{k\alpha}^i=\Gamma_{k\alpha}^i-\tfrac{1}{2}\delta_k^i\varphi_\alpha;\qquad \Gamma_{k\alpha}^i=\Gamma_{\alpha k}^i. \tag{2}$$

Die ursprünglich von WEYL betrachteten (symmetrischen) Übertragungen erhält man aus (2) als Spezialfall:

$$\varphi_\alpha = \mathring{\varphi}_\alpha; \qquad \mathring{\varphi}_\alpha = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\alpha}. \tag{3}$$

(3) sind alle Übertragungen (2), die bei einer Eichung $x^0 = \text{const.}$ symmetrisch werden. Die Gesamtheit aller Übertragungen, die in irgendeinem Bezugssystem symmetrisch werden, liegen in der invarianten Form

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \tag{4}$$

vor, mit beliebiger, vom Bezugssystem abhängiger Funktion φ[1]). Der zu (2) gehörige Krümmungstensor lautet in Komponenten

$$K^i_{k\alpha\beta} = \frac{1}{(x^0)^2} \cdot \left\{ \frac{\partial (x^0 \tilde{\Gamma}^i_{k\beta})}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial (x^0 \tilde{\Gamma}^i_{k\alpha})}{\partial x^\beta} + x^0 \tilde{\Gamma}^i_{\varrho\alpha} x^0 \tilde{\Gamma}^\varrho_{k\beta} - x^0 \tilde{\Gamma}^i_{\varrho\beta} x^0 \tilde{\Gamma}^\varrho_{k\alpha} \right\}. \tag{5}$$

Er gestattet die bemerkenswerte Zerlegung

$$K^i_{k\alpha\beta} = R^i_{k\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} \delta^i_k \Phi_{\alpha\beta} \tag{6}$$

in die beiden Tensoren

$$R^i_{k\alpha\beta} = \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \Gamma^i_{k\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{x^0} \cdot \frac{\partial \Gamma^i_{k\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{\varrho\alpha} \Gamma^\varrho_{k\beta} - \Gamma^i_{\varrho\beta} \Gamma^\varrho_{k\alpha} + \frac{1}{2} (\mathring{\varphi}_\alpha \Gamma^i_{k\beta} - \mathring{\varphi}_\beta \Gamma^i_{k\alpha}) \tag{7}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{x^0} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} \right) + \frac{1}{2} (\mathring{\varphi}_\alpha \varphi_\beta - \mathring{\varphi}_\beta \varphi_\alpha), \tag{8}$$

von denen (7) nur von den $\Gamma^i_{k\alpha}$, (8) nur von den φ_α des affinen Zusammenhanges i. w. S. abhängt. (7) hat die gewöhnlichen Symmetrieeigenschaften

$$R^i_{k\alpha\beta} + R^i_{k\beta\alpha} = 0 \tag{9}$$

$$R^i_{k\alpha\beta} + R^i_{\alpha\beta k} + R^i_{\beta k\alpha} = 0, \tag{10}$$

während für (8) die Schiefsymmetrie

$$\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\alpha} = 0 \tag{11}$$

gilt. Diese Eigenschaften führen zu

Satz 1. *Es sei $n > 2$. Sind in einem Gebiet G eines n-dimensionalen Raumes zwei Übertragungen* (2) *gegeben und stimmen im Punkte $P \in G$ die zugehörigen Krümmungstensoren* (5) *überein, so auch die entsprechenden Tensoren* (7) *und* (8). *Für $n > 2$ bestimmt daher* (5) *seine beiden Anteile* (7) *und* (8) *eindeutig.*

Beweis. Setzen wir die Differenzen einander entsprechender Tensoren (5), (7) und (8) in Klammern, so gilt wegen (6): $[K^i_{k\alpha\beta}] = [R^i_{k\alpha\beta}] - \frac{1}{2} \delta^i_k [\Phi_{\alpha\beta}]$. Die $[R^i_{k\alpha\beta}]$ haben aber ebenfalls die Symmetrieeigenschaften (9), (10), die $[\Phi_{\alpha\beta}]$ (11).

[1]) Diese Bemerkungen mögen zugleich als Berichtigung des in LYRA [4] auf S. 56 oben Gesagten dienen.

Ist also in P $[K^i_{k\alpha\beta}]=0$, so $[R^i_{k\alpha\beta}]=\frac{1}{2}\delta^i_k[\Phi_{\alpha\beta}]$ und daher

$$\delta^i_k[\Phi_{\alpha\beta}]+\delta^i_\alpha[\Phi_{\beta k}]+\delta^i_\beta[\Phi_{k\alpha}]=0.$$

Verjüngung nach i und k liefert $(n-2)[\Phi_{\alpha\beta}]=0$, also für $n>2$ $[\Phi_{\alpha\beta}]=0$, also auch $[R^i_{k\alpha\beta}]=0$, w. z. b. w. — Für $n=2$ ist der Satz nicht allgemein richtig, gilt aber z. B. in der RIEMANNschen Geometrie für kongruente symmetrische Übertragungen.

Satz 2. *$K^i_{k\alpha\beta}$ hat die Symmetrieeigenschaft* (9). (10) *erfüllt $K^i_{k\alpha\beta}$ für $n=2$ immer, für $n>2$ genau dann, wenn eine symmetrische Übertragung* (4) *vorliegt.*

Beweis. Für $n=2$ ist (10) eine Folge von (9) allein, das trivialerweise für alle n erfüllt ist. — Eine Charakterisierung der symmetrischen Übertragungen (4) ist offenbar

$$\Phi_{\alpha\beta}=0. \tag{12}$$

Aus (12) folgt aber $K^i_{k\alpha\beta}=R^i_{k\alpha\beta}$, so daß (10) auch für $K^i_{k\alpha\beta}$ gilt. Ist umgekehrt letzteres der Fall, so folgt daraus sofort

$$R^i_{k\alpha\beta}+R^i_{\alpha\beta k}+R^i_{\beta k\alpha}=\tfrac{1}{2}(\delta^i_k\Phi_{\alpha\beta}+\delta^i_\alpha\Phi_{\beta k}+\delta^i_\beta\Phi_{k\alpha}),$$

also wegen (10) nach Verjüngung wieder $\Phi_{\alpha\beta}=0$ für $n>2$.

Satz 3. *Bildet man nach* LYRA [4], *Formel* (11) *die kovarianten Ableitungen $\nabla_\gamma K^i_{k\alpha\beta}$ des Krümmungstensors, so gelten die* BIANCHIschen *Identitäten*

$$\nabla_\alpha K^i_{k\beta\gamma}+\nabla_\beta K^i_{k\gamma\alpha}+\nabla_\gamma K^i_{k\alpha\beta}=0. \tag{13}$$

Es gilt sogar

$$\nabla_\alpha R^i_{k\beta\gamma}+\nabla_\beta R^i_{k\gamma\alpha}+\nabla_\gamma R^i_{k\alpha\beta}=0 \tag{14}$$

$$\nabla_\alpha\Phi_{\beta\gamma}+\nabla_\beta\Phi_{\gamma\alpha}+\nabla_\gamma\Phi_{\alpha\beta}=0. \tag{15}$$

Beweis. Man führe im Punkte P ein geodätisches Bezugssystem ein, in dem dann jedenfalls $\varphi_\alpha=0$ in P ist. Da gelten wie gewöhnlich die Beziehungen (14) und (15). Da es sich auf den linken Seiten um Tensoren handelt, gelten die Formeln allgemein. (13) ist wegen (6) eine Folge von (14), (15). — Ein im Gebiet G mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteter Raum heißt in G eben, wenn es ein Bezugssystem gibt, in welchem identisch in G die $\tilde{\Gamma}^i_{k\alpha}$ verschwinden. Es gilt

Satz 4. *Notwendig und hinreichend für die Ebenheit des Raumes in G ist für $n>2$ das identische Verschwinden von* (5), *für $n=2$ das identische Verschwinden von* (7) *und* (8).

Beweis. Für $n>2$ folgt aus $K^i_{k\alpha\beta}=0$ wegen Satz 1 sofort $R^i_{k\alpha\beta}=0$ und $\Phi_{\alpha\beta}=0$. Durch alleinige Transformation des Koordinatensystems erreicht man daher $\Gamma^i_{k\alpha}=0$ und danach durch alleinige Umeichung $\varphi_\alpha=0$.

Die Richtungsübertragung[2]). Die geometrische Bedeutung des affinen Zusammenhanges i. w. S. wird vom Standpunkt der Richtungsübertragung noch klarer. Unter einer *Richtung im Punkte P* eines Raumes verstehen wir eine Klasse von Tangentialvektoren, die aus einem von ihnen durch Multiplikation mit allen positiven Zahlen hervorgeht. Jede Vektorübertragung liefert damit zugleich eine Richtungsübertragung, jedoch ist der letztere Begriff allgemeiner. Nennen wir nämlich zwei beliebige lineare Übertragungen projektiv äquivalent i. e. S. (im engeren Sinne), wenn für ihre Komponenten $\hat{\Gamma}^i_{k\alpha}$ und $\Gamma^i_{k\alpha}$ die (invariante) Beziehung

$$[\Gamma^i_{k\alpha}] =: \hat{\Gamma}^i_{k\alpha} - \Gamma^i_{k\alpha} = \delta^i_k \psi_\alpha \tag{16}$$

gilt, wobei ψ_α ein 1-fach kovarianter Tensor sei, so gilt der

Satz 5. *Zwei lineare Übertragungen sind genau dann projektiv äquivalent i. e. S., wenn sie dieselbe Richtungsübertragung liefern.*

Zusatz. *Die allgemeinste lineare Übertragung, die mit einer symmetrischen Übertragung* (2), (3) *(also im* WEYLschen *Sinne) die Richtungsübertragung gemeinsam hat, ist eine Übertragung* (2).

Beweis. Der Zusatz ist eine unmittelbare Folge von Satz 5, den man folgendermaßen beweist. Mögen zunächst die Richtungsübertragungen in einem Gebiet G des Raumes übereinstimmen. P sei ein beliebiger Punkt aus G, C eine beliebige Kurve durch P. Ein Tangentialvektor ξ^i_0 werde längs C von beiden Systemen $\hat{\Gamma}^i_{k\alpha}$, $\Gamma^i_{k\alpha}$ übertragen:

$$\dot{\xi}^i + \hat{\Gamma}^i_{k\alpha} \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha = 0; \qquad \dot{\eta}^i + \Gamma^i_{k\alpha} \eta^k x^0 \dot{x}^\alpha = 0.$$

Wegen der Gleichheit der Richtungsübertragung gilt längs C: $\eta^i = \mu \cdot \xi^i (\mu > 0)$. Dann folgt aus der rechten der obigen Gleichungen

$$\dot{\mu}\, \xi^i + \mu\, (\dot{\xi}^i + \Gamma^i_{k\alpha} \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha) = 0.$$

Wegen der linken Gleichung ergibt sich durch Einsetzen

$$\dot{\mu}\, \xi^i = \mu\, [\Gamma^i_{k\alpha}]\, \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit ξ^λ sofort

$$\xi^\lambda [\Gamma^i_{k\alpha}]\, \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha = \xi^i [\Gamma^\lambda_{k\alpha}]\, \xi^k x^0 \dot{x}^\alpha.$$

Diese Gleichung gilt insbesondere in P, wo ξ^i_0 und $\dot{x}^\alpha$ beliebig waren, so daß in P identisch in den ξ^i

$$(\delta^\lambda_\varrho [\Gamma^i_{k\alpha}] - \delta^i_\varrho [\Gamma^\lambda_{k\alpha}])\, \xi^\varrho \xi^k = 0$$

gilt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\delta^\lambda_\varrho [\Gamma^i_{k\alpha}] + \delta^\lambda_k [\Gamma^i_{\varrho\alpha}] - \delta^i_\varrho [\Gamma^\lambda_{k\alpha}] - \delta^i_k [\Gamma^\lambda_{\varrho\alpha}] = 0,$$

[2]) Dieser und der folgende Abschnitt dienen unter anderem zur Berichtigung und Erweiterung des in der LYRAschen Arbeit [4] im letzten Absatz des 2. Abschnittes Gesagten.

woraus durch Verjüngung nach λ und ϱ

$$[\Gamma^i_{k\alpha}] = \delta^i_k \left(\frac{1}{n}\,[\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}]\right),$$

also die Behauptung folgt. — Die Umkehrung ergibt sich so: Gilt (16), so lauten die Übertragungsgleichungen

$$\dot{\xi}^i + \Gamma^i_{k\varkappa}\,\xi^k\,x^0\,\dot{x}^\varkappa + \psi_\alpha\,x^0\,\dot{x}^\varkappa\,\xi^i = 0; \qquad \dot{\eta}^i + \Gamma^i_{k\alpha}\,\eta^k\,x^0\,\dot{x}^\alpha = 0.$$

Gehen wir in irgendeinem Punkte von C von einem beliebigen Vektor aus, so gilt für den Zusammenhang der Lösungen

$$\eta^i = e^{\int_{P_0}^{P} \psi_\alpha\,x^0\,dx^\alpha} \cdot \xi^i = \mu \cdot \xi^i$$

mit $\mu > 0$, w. z. b. w.

Ein nur von der Richtungsübertragung abhängiger Tensor ist offenbar $R^i_{k\alpha\beta}$ und daher wegen

$$K^i_{k\alpha\beta} - \delta^i_k K_{\alpha\beta} = R^i_{k\alpha\beta} - \delta^i_k R_{\alpha\beta}, \tag{17}$$

worin $K_{\alpha\beta} = K^\iota_{\alpha\iota\beta}$, $R_{\alpha\beta} = R^\iota_{\alpha\iota\beta}$ gesetzt wurde, auch der Tensor

$$P^i_{k\alpha\beta} = K^i_{k\alpha\beta} - \delta^i_k K_{\alpha\beta}. \tag{18}$$

Nennen wir einen im Gebiet G mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteten Raum in G projektiv eben i. e. S., wenn dort in einem geeigneten Bezugssystem die Darstellung

$$\tilde{\Gamma}^i_{k\alpha} = \tfrac{1}{y}\,\delta^i_k\,\psi_\alpha \tag{19}$$

gilt, so folgt leicht der

Satz 6. *Für $n > 2$ ist der Raum in G genau dann projektiv eben i. e. S., wenn in G*

$$P^i_{k\alpha\beta} \equiv 0 \tag{20}$$

gilt. Eine für alle $n \geq 2$ gültige Charakterisierung dieser projektiven Ebenheit ist

$$R^i_{k\alpha\beta} \equiv 0. \tag{21}$$

Beweis. (20) und (21) sind für $n > 2$ gleichbedeutend. Wegen (17) folgt aus (21) sofort (20). Gilt umgekehrt (20), so wegen (17) $R^i_{k\alpha\beta} = \delta^i_k R_{\alpha\beta}$, daher $R_{\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha}$ wegen (9). Die zuerst beim Beweise von Satz 1 angewandte Schlußweise liefert für $n > 2$ wieder $R_{\alpha\beta} = 0$ und damit (21). Nun zeigen wir einfach (21) für $n \geq 2$. Ist der Raum in G projektiv eben i. e. S., so gilt in einem geeigneten Bezugssystem (19), also $\Gamma^i_{k\alpha} = 0$, also $R^i_{k\alpha\beta} = 0$. Gilt umgekehrt letzteres, so folgt wie gewöhnlich die Existenz eines Bezugssystems, in dem die $\Gamma^i_{k\alpha}$ verschwinden. In diesem Bezugssystem gilt dann (19). — Auf eine andere Weise lassen sich die i. e. S. projektiv ebenen Räume durch den Begriff der Richtungsübertragung charakterisieren. Es gilt der

Satz 7. *Für $n>2$ ist ein Raum im Gebiet G genau dann projektiv eben i. e. S., wenn in G die Richtungsübertragung vom Wege unabhängig ist.*

Beweis. Ist der Raum in G projektiv eben i. e. S., so ist nach Satz 6 in G $R^i_{k\alpha\beta}=0$ und daher die durch die $\Gamma^i_{k\alpha}$ des affinen Zusammenhanges i. w. S. gegebene Vektorübertragung vom Wege unabhängig, also auch die durch sie definierte Richtungsübertragung. Nach Satz 5, Zusatz hat aber der gegebene affine Zusammenhang i. w. S. die Richtungsübertragung mit der durch seine $\Gamma^i_{k\alpha}$ gegebenen Richtungsübertragung gemeinsam. Also ist erstere ebenfalls vom Wege unabhängig. — Nun sei umgekehrt die Richtungsübertragung des gegebenen affinen Zusammenhanges i. w. S. überall in G integrabel. Dann ist es nach Satz 5, Zusatz auch die der $\Gamma^i_{k\alpha}$. Bei Vektorübertragung durch die $\Gamma^i_{k\alpha}$ um ein infinitesimales Parallelogramm mit einem beliebigen Ausgangspunkt $P\in G$ gilt daher wegen

$$\Delta\xi^i=-R^i_{k\alpha\beta}\xi^k\Delta x^{\alpha\beta};\qquad \Delta x^{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(dx^\alpha\delta x^\beta-dx^\beta\delta x^\alpha)$$

und der Voraussetzung $\Delta\xi^i=\varepsilon\xi^i$ der Integrabilität:

$$\xi^j R^i_{k\alpha\beta}\xi^k\Delta x^{\alpha\beta}=\xi^i R^j_{k\alpha\beta}\xi^k\Delta x^{\alpha\beta}$$

identisch in den Komponenten ξ^i der übertragenen Vektoren und $\Delta x^{\alpha\beta}$ der von P ausgehenden infinitesimalen Parallelogramme. Daraus folgt

$$\Delta x^{\alpha\beta}\cdot(\delta^j_r R^i_{k\alpha\beta}-\delta^i_r R^j_{k\alpha\beta})\xi^r\xi^k=0$$

und daraus wegen der Schiefsymmetrie der Koeffizienten dieser Form in α und β:

$$(\delta^j_r R^i_{k\alpha\beta}-\delta^i_r R^j_{k\alpha\beta})\xi^r\xi^k=0.$$

Diese Identität zieht sofort

$$\delta^j_r R^i_{k\alpha\beta}-\delta^i_r R^j_{k\alpha\beta}=-(\delta^j_k R^i_{r\alpha\beta}-\delta^i_k R^j_{r\alpha\beta})$$

nach sich, und durch Verjüngung nach j und r erhalten wir

$$R^i_{k\alpha\beta}=\delta^i_k\cdot\left(\frac{1}{n}R^j_{j\alpha\beta}\right),$$

daraus durch Verjüngung nach i und α: $R_{\alpha\beta}=\frac{1}{n}R^j_{j\alpha\beta}$, also schließlich durch Einsetzen in die davor gewonnene Gleichung

$$R^i_{k\alpha\beta}=\delta^i_k R_{\alpha\beta}.$$

Daß diese Gleichung für $n>2$ (21) zur Folge hat, wissen wir aus dem Beweis von Satz 6. Ebenda wurde ferner gezeigt, daß (21) die projektive Ebenheit i. e. S. zur Folge hat. — Eine Folge von Satz 7 ist, daß es keine symmetrischen Übertragungen gibt, welche zwar die Richtungen vom Wege unabhängig übertragen, nicht aber die Vektoren.

Die projektive Beschaffenheit des Raumes. Im vorigen Abschnitt wurde nur ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Äquivalenzbegriffes für zwei affine

Zusammenhänge i. w. S. betrachtet. Zwei durch die Komponenten $\widetilde{\Gamma}'^{i}_{k\alpha}$ und $\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}$ gegebene affine Zusammenhänge (2) mögen projektiv äquivalent heißen, wenn die invariante Beziehung

$$[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}] =: \widetilde{\Gamma}'^{i}_{k\alpha} - \widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha} = -\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\psi_{\alpha} + \delta^{i}_{\alpha}\chi_{k}) \tag{22}$$

besteht, wobei ψ_α und χ_α 1-fach kovariante Tensoren seien. (22) läßt sich auch in der Form

$$[\Gamma^{i}_{k\alpha}] = \Gamma'^{i}_{k\alpha} - \Gamma^{i}_{k\alpha} = -\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\chi_{\alpha} + \delta^{i}_{\alpha}\chi_{k}) \tag{23}$$

$$[\varphi_\alpha] = \varphi'_\alpha - \varphi_\alpha = \psi_\alpha - \chi_\alpha \tag{24}$$

schreiben, wie man sofort aus (2) entnimmt. Durch (23) ist eine projektive Äquivalenz auch für den symmetrischen Anteil des affinen Zusammenhanges i. w. S. definiert. Es gilt der

Satz 8. *Zwei affine Zusammenhänge i. w. S. sind genau dann projektiv äquivalent, wenn ihre symmetrischen Anteile es sind.*

Beweis. Gilt nämlich (22), so wegen $[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}] = [\Gamma^{i}_{k\alpha}] - \frac{1}{2}\delta^{i}_{k}[\varphi_\alpha]$ und (22) auch

$$[\Gamma^{i}_{k\alpha}] - \tfrac{1}{2}\delta^{i}_{k}[\varphi_\alpha] = \{-\tfrac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\chi_{\alpha} + \delta^{i}_{\alpha}\chi_{k})\} - \tfrac{1}{2}\delta^{i}_{k}(\psi_\alpha - \chi_\alpha),$$

woraus leicht auf (23), (24) geschlossen wird. Sind andererseits (23), (24) erfüllt, so bilde man einfach $[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}]$, und es ergibt sich (22).

Die *projektive Beschaffenheit* des Raumes ist nach WEYL durch die geodätischen Linien des affinen Zusammenhanges gegeben, deren Gleichungen in unserem Falle von der (invarianten) Form

$$x^0\ddot{x}^i + \Gamma^{i}_{k\alpha}x^0\dot{x}^k x^0\dot{x}^\alpha - \tfrac{1}{2}(\varphi_\alpha - \mathring{\varphi}_\alpha)x^0\dot{x}^\alpha x^0\dot{x}^i = \gamma(t)\,x^0\dot{x}^i \tag{25}$$

sind. Wir erhalten

Satz 9. *Zwei affine Zusammenhänge i. w. S. definieren in einem Gebiet G genau dann dieselbe projektive Beschaffenheit des Raumes, wenn sie projektiv äquivalent im Sinne von* (22) *sind.*

Beweis. Seien zunächst zwei projektiv äquivalente affine Zusammenhänge i. w. S. in G eingeführt, so daß also für die Komponenten (22) gilt. Aus (25) geht durch Einsetzen von (22) mit der Abkürzung $\gamma' = \gamma - (\psi_\alpha + \chi_\alpha)x^0\dot{x}^\alpha$ wieder eine Gleichung der Form (25) hervor, in der jetzt an Stelle der ungestrichenen die gestrichenen Größen stehen, so daß wieder eine geodätische Linie vorliegt, diesmal in bezug auf den anderen affinen Zusammenhang. Ebenso schließt man zurück. — Nun mögen die affinen Zusammenhänge dieselbe projektive Beschaffenheit definieren. Dann gilt in jedem Punkt von G identisch in den ξ^i

$$\xi^i[\widetilde{\Gamma}^{k}_{\varrho\alpha}]\xi^\varrho\xi^\alpha = \xi^k[\widetilde{\Gamma}^{i}_{\varrho\alpha}]\xi^\varrho\xi^\alpha.$$

Seien nämlich $P \in G$ und ein Vektor ξ^i beliebig gegeben. Dann definiert dieser Vektor eine bestimmte Richtung in P und damit je eine geodätische Linie

bezüglich der Übertragungen $\widetilde{\Gamma}'^{i}_{k\alpha}$ und $\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}$, die aber wegen der Gleichheit der projektiven Beschaffenheit zusammenfallen. Sei $x^i(t)$ eine Parameterdarstellung dieser geodätischen Linie mit $x^i(0)$ in P. Dann gilt $x^0 x^i(0) = \mu\,\xi^i$ mit $\mu \neq 0$. Die Subtraktion der beiden Gleichungen für die geodätische Linie liefert in P die Gleichung

$$\mu^2 [\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}]\,\xi^k \xi^\alpha = (\gamma' - \gamma)\,\mu\,\xi^i.$$

Durch Multiplikation mit ξ^k folgt daraus nach Division mit μ^2 die Behauptung. Nun setzt man $[\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha}] = [\Gamma^{i}_{k\alpha}] - \frac{1}{2}\delta^i_k [\varphi_\alpha]$ in die gewonnene Gleichung ein und erhält

$$\xi^i [\Gamma^{k}_{\varrho\alpha}]\,\xi^\varrho \xi^\alpha = \xi^k [\Gamma^{i}_{\varrho\alpha}]\,\xi^\varrho \xi^\alpha.$$

Nach WEYL [2] (S. 64) folgt daraus (23). (22) ist endlich eine weitere unmittelbare Folge.

Die Angabe eines allgemeinen Tensors der Projektivkrümmung gelingt in Verallgemeinerung des entsprechenden von WEYL eingeführten Tensors (WEYL [1], [2]) leicht auf Grund von Satz 8. Wir definieren

$$P^{i}_{k\alpha\beta} = R^{i}_{k\alpha\beta} - \widehat{G}^{i}_{k\alpha\beta} \tag{26}$$

$$\widehat{G}^{i}_{k\alpha\beta} = \delta^i_k (G_{\alpha\beta} - G_{\beta\alpha}) + (\delta^i_\alpha G_{k\beta} - \delta^i_\beta G_{k\alpha}) \tag{27}$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{n R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}}{n^2 - 1} \tag{28}$$

als Tensor der Projektivkrümmung. $P^{i}_{k\alpha\beta}$ stimmt für zwei durch (22) verknüpfte affine Zusammenhänge i. w. S. überein, wie man sofort bei Einführung der Normaleichung $x^0 = 1$ auf Grund der WEYLschen Überlegungen in [1] sieht. Nennen wir den Raum in G projektiv eben, wenn in einem geeigneten Bezugssystem

$$\widetilde{\Gamma}^{i}_{k\alpha} = \tfrac{1}{2}(\delta^i_k \psi_\alpha + \delta^i_\alpha \chi_k) \tag{29}$$

gilt, so ist für $n > 2$ wieder das Verschwinden des Tensors der Projektivkrümmung für dieses Ebensein charakteristisch. Da (29) gegen Umeichungen invariant ist, genügt es den Beweis bei Normaleichung zu führen. Dann liegen aber die Verhältnisse wieder wie bei WEYL, und wir können uns auf seine Ergebnisse in [1] berufen. Es gilt also

Satz 10. *In einem im Gebiet G mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteten Raum ist in G der Tensor* (26) *als Tensor der Projektivkrümmung zu bezeichnen, denn er hängt nur von der projektiven Beschaffenheit in G ab und verschwindet für $n > 2$ genau dann identisch in G, wenn der Raum in G projektiv eben ist.*

Auf Grund entsprechender Schlußweisen kommt man zur Verallgemeinerung des WEYLschen Ergebnisses für $n = 2$:

Zusatz. *Für $n=2$ ist der Raum in G genau dann projektiv eben, wenn*

$$\overset{\circ}{V}_\beta G_{\alpha\gamma} - \overset{\circ}{V}_\gamma G_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{30}$$

identisch in G gilt. Dabei ist

$$\overset{\circ}{V}_\beta G_{\alpha\gamma} = \frac{1}{x^0}\cdot\frac{\partial G_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} G_{\nu\gamma} - \Gamma^\nu_{\gamma\beta} G_{\nu\alpha} + \overset{\circ}{\varphi}_\beta G_{\alpha\gamma} \tag{31}$$

gesetzt (kovariante Ableitung bezüglich $\Gamma^i_{k\alpha} - \frac{1}{2}\delta^i_k \overset{\circ}{\varphi}_\alpha$).

(31) erreicht, daß (30) ein Tensor in unserem Sinne ist und daß zugleich (30) bei Normaleichung, wo ja $\overset{\circ}{\varphi}_\alpha = 0$ ist, in die WEYLsche Formel übergeht. Unter Berufung auf WEYLs Ergebnis ist damit auch der Zusatz bewiesen.

Metrische Geometrie im Raume. In einem metrischen Raume im WEYLschen Sinne gibt es im allgemeinen noch mehrere kongruente affine Zusammenhänge i. w. S. Sind g_{ik}, γ_α die Komponenten der metrischen Fundamentaltensoren, so gelten für die Komponenten $\Gamma^i_{k\alpha}, \varphi_\alpha$ eines kongruenten affinen Zusammenhanges i. w. S. die Bedingungen

$$\Gamma^i_{k\alpha} = \frac{1}{x^0}\cdot\left\{\begin{matrix} i \\ k\,\alpha \end{matrix}\right\} + \frac{1}{2}\{\delta^i_k(\varphi_\alpha + \gamma_\alpha) + \delta^i_\alpha(\varphi_k + \gamma_k) - g^{i\lambda} g_{k\alpha}(\varphi_\lambda + \gamma_\lambda)\} \tag{32}$$

ähnlich wie bei LYRA [4], Formel (10) in der RIEMANNschen Geometrie. In (32) sind die φ_α noch willkürlich, so daß wir sie als bei metrischen Umeichungen invariant annehmen können; dann sind auch die $\Gamma^i_{k\alpha}$ und damit die $\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}$ bei metrischen Umeichungen absolut invariant und damit alle oben betrachteten Tensoren. Der allgemeine projektive Standpunkt, wie er im vorigen Abschnitt dargelegt wurde, führt schließlich zu

Satz 11. *In einem metrischen Raume gegebener projektiver Beschaffenheit gibt es höchstens einen kongruenten affinen Zusammenhang i. w. S.*

Beweis. Gäbe es deren zwei, so hätten wir wegen (32) für die Differenzen ihrer Komponenten die Gleichungen

$$[\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}] = -\tfrac{1}{2} g^{i\lambda}\,(g_{k\alpha}[\varphi_\lambda] - g_{\lambda\alpha}[\varphi_k]).$$

Wegen Satz 9 und (22) erhält man durch Eliminierung von $[\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}]$:

$$-\tfrac{1}{2} g^{i\lambda}\,(g_{k\alpha}[\varphi_\lambda] - g_{\lambda\alpha}[\varphi_k]) = -\tfrac{1}{2}(\delta^i_k \psi_\alpha + \delta^i_\alpha \chi_k);$$

daraus durch Überschiebung mit g_{ik}

$$g_{k\alpha}[\varphi_\lambda] - g_{\lambda\alpha}[\varphi_k] = g_{\lambda k}\psi_\alpha + g_{\lambda\alpha}\chi_k$$

und daraus wegen $[\varphi_\alpha] = \psi_\alpha - \chi_\alpha$

$$g_{k\alpha}\chi_\lambda = g_{k\alpha}\psi_\lambda - g_{\alpha\lambda}\psi_k - g_{\lambda k}\psi_\alpha.$$

Überschiebung mit g^{ik} liefert darauf

$$\delta^i_k \chi_\lambda = (-g_{\lambda k} g^{i\alpha}\psi_\alpha) + (\delta^i_k \psi_\alpha - \delta^i_\lambda \psi_k).$$

Die erste Klammer ist symmetrisch, die zweite schiefsymmetrisch in den Indizes λ und k für jedes i; also gilt

$$\tfrac{1}{2}(\delta^i_k \chi_\lambda + \delta^i_\lambda \chi_k) = -g_{\lambda k} g^{i\alpha} \psi_\alpha$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta^i_k \chi_\lambda - \delta^i_\lambda \chi_k) = \delta^i_k \psi_\lambda - \delta^i_\lambda \psi_k .$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt durch Verjüngung

$$\psi_\lambda = -\tfrac{1}{2}(n+1)\chi_\lambda ,$$

aus der zweiten ebenso

$$\psi_\lambda = \tfrac{1}{2}\chi_\lambda$$

und daher durch Elimination von ψ_λ: $(n+2)\chi_\lambda = 0$, daher $\chi_\lambda = 0$ und $\psi_\lambda = 0$, somit schließlich wegen (22) $[\widetilde{\Gamma}^i_{k\alpha}] = 0$, w. z. b. w.

Literatur.

[1] WEYL, H.: Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1921**, 99—112. — [2] WEYL, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923. — [3] CHEVALLEY, C.: Theory of LIE-Groups. Princeton 1946. — [4] LYRA, G.: Über eine Modifikation der RIEMANNschen Geometrie. Math. Z. **54**, 52—64 (1951).

Göttingen, Universität, Mathematisches Institut.

(Eingegangen am 28. Mai 1952.)

REICHEL, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 75—85 (1952)

Zur Transformationstheorie der Matrizen über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen.

Von
GEORG REICHEL.

Einleitung.

Die Transformationstheorie $A \to T A T^{-1}$ der invertierbaren Matrizen A ist bisher im wesentlichen nur für den Fall der Matrizen über beliebigen Körpern vollständig durchgeführt worden. Sie führte hier unter anderem zur Angabe der rationalen Normalformen als Repräsentanten der Klassen ähnlicher Matrizen (vgl. z.B. [1] § 5, Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit). In dieser Note sollen nun Matrizen über dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen untersucht werden, da diese z.B. eine wesentliche Rolle in der Theorie der metabelschen Gruppen spielen. Das folgende Beispiel zeigt, daß schon die Matrizen, deren Elemente Restklassen nach dem Modul p^2 sind, betrachtenswert sind.

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(2^2, 2^2)$ der abelschen Gruppe vom Typus $(2^2, 2^2)$ läßt sich durch alle zweireihigen Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

($a_{ik}, b_{ik} = 0,1$; $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \not\equiv 0 \bmod 2$) darstellen. Diese Gruppe zerfällt in 14 Klassen konjugierter Elemente, als deren Repräsentanten wir z.B. die Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auswählen können. Das Beispiel zeigt, daß sich die bekannten rationalen Normalformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(2, 2)$ der abelschen Gruppe vom Typus $(2, 2)$ in $\mathfrak{A}(2^2, 2^2)$ aufspalten.

Die vorliegende Note beginnt in den beiden ersten Paragraphen mit der allgemeinen Theorie und wendet die erhaltenen Ergebnisse im 3. Paragraphen auf Matrizen A über $\mathfrak{R}_p$ an, für die $A-xE$ nach dem Modul p nur einen Elementarteiler besitzt und bestimmt die Normalformen der zweireihigen invertierbaren Matrizen über $\mathfrak{R}_p$.

§ 1. Es sei $\mathfrak{L}_p$ ein s-dimensionaler Vektorraum, dessen Koeffizientenbereich der Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen ist. Wir betrachten eine umkehrbare lineare Transformation σ von $\mathfrak{L}_p$, für die bei einer Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ von $\mathfrak{L}_p$

$$\sigma(\mathfrak{a}_k) = \sum_{i=1}^{s} a_{ik}\,\mathfrak{a}_i$$

gilt. Die Transformation σ wird also bezüglich der Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ durch die Matrix $A = (a_{ik})$ beschrieben. Bekanntlich gibt es mindestens eine geeignete Basis von $\mathfrak{L}_p$, für die die zugehörige Matrix von σ nach dem Modul p genommen gerade die Gestalt einer rationalen Normalform besitzt ([*1*] S. 91). Sei etwa

$$\mathfrak{t}_{h1}, \ldots, \mathfrak{t}_{h\nu_h};\ \ldots;\ \mathfrak{t}_{i1}, \ldots, \mathfrak{t}_{i\nu_i};\ \ldots;\ \mathfrak{t}_{s1}, \ldots, \mathfrak{t}_{s\nu_s} \tag{1.1}$$

mit $\sum_{i=h}^{s} \nu_i = s$ eine solche Basis von $\mathfrak{L}_p$. Dann gilt

$$\begin{cases} \sigma\,\mathfrak{t}_{i1} \equiv \mathfrak{t}_{i2}(p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma\,\mathfrak{t}_{i,\nu_i-1} \equiv \mathfrak{t}_{i\nu_i}(p) \\ \sigma\,\mathfrak{t}_{i\nu_i} \equiv a_1^{(i)}\,\mathfrak{t}_{i1} + \cdots + a_{\nu_i}^{(i)}\,\mathfrak{t}_{i\nu_i}(p). \end{cases} \qquad (i = h, \ldots, s) \tag{1.2}$$

Dabei sind die $a_k^{(i)}$ die Koeffizienten der Elementarteiler

$$e_i(x) \equiv -a_1^{(i)} - a_2^{(i)}\,x - \cdots - a_{\nu_i}^{(i)}\,x^{\nu_i-1} + x^{\nu_i}(p) \qquad (i = h, \ldots, s) \tag{1.3}$$

der Matrix $A - xE \bmod p$. (Da σ eine umkehrbare Transformation von $\mathfrak{L}_p$ war, gibt es modulo p keine verschwindenden Elementarteiler).

Wir gehen nun von der Basis (1.1) zur Basis

$$\mathfrak{t}'_{h1}, \ldots, \mathfrak{t}'_{h\nu_h};\ \ldots;\ \mathfrak{t}'_{s1}, \ldots, \mathfrak{t}'_{s\nu_s} \tag{1.4}$$

von $\mathfrak{L}_p$ über, die mit der Basis (1.1) durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{t}'_{i1} = \mathfrak{t}_{i1} \\ \mathfrak{t}'_{i2} = \sigma\,\mathfrak{t}_{i1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{t}'_{i\nu_i} = \sigma^{\nu_i-1}\,\mathfrak{t}_{i1} \end{cases} \qquad (i = h, \ldots, s) \tag{1.5}$$

verknüpft ist. Es gilt offenbar $\mathfrak{t}'_{i\lambda} \equiv \mathfrak{t}_{i\lambda}(p)$ für $\lambda = 1, \ldots, \nu_i$; $i = h, \ldots, s$ und man sieht leicht, daß dieser Basiswechsel umkehrbar ist. Sei nämlich $\mathfrak{T}$ die Basisspalte (1.1), $\mathfrak{T}'$ die Basisspalte (1.4) so gilt wegen (1.5)

$$\mathfrak{T}' = E\,\mathfrak{T} + p\,C\,\mathfrak{T},$$

wobei C eine bestimmte Matrix über $\mathfrak{R}_p$ ist. Die Umkehrung lautet

$$\mathfrak{T} = E\,\mathfrak{T}' - p\,C\,\mathfrak{T}' + p^2 C^2 \mathfrak{T}' - + \cdots . \tag{1.6}$$

In dieser Basis gilt

$$\sigma\, t'_{i1} = t'_{i2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma\, t'_{i,\nu_i - 1}\, t = t'_{i\nu_i}$$

und weiter

$$\sigma\, t'_{i\nu_i} \equiv \sigma\, t_{i\nu_i} \equiv a_1^{(i)} t_{i1} + \cdots + a_{\nu_i}^{(i)} t_{i\nu_i} \equiv a_1^{(i)} t'_{i1} + \cdots + a_{\nu_i}^{(i)} t'_{i\nu_i} (p) \quad (i = h, \ldots, s).$$

Da $\sigma\, t'_{i\nu_i} = \sigma^{\nu_i} t_{i1}$ ist, kann $\sigma\, t'_{i\nu_i}$ als Linearkombination der $t_{i\lambda}$ über $\mathfrak{R}_p$ und mittels (1.6) als Linearkombination der $t'_{i\lambda}$ über $\mathfrak{R}_p$ ausgedrückt werden. Stellen wir jetzt die Matrix von σ bezüglich der Basis (1.4) auf, so erhalten wir das Resultat[1]):

Satz 1. *Es sei σ eine umkehrbare lineare Transformation von $\mathfrak{L}_p$. Dann gibt es immer mindestens eine Basis von $\mathfrak{L}_p$, für die die Matrix A von σ die Gestalt*

$$A = A_0 + p\,A'$$

mit

$$\left\{\begin{array}{l} A_0 \equiv \begin{pmatrix} A_{hh} & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}(p), \qquad A_{ii} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1^{(i)} \\ 1 & \ldots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_{\nu_i}^{(i)} \end{pmatrix}(p) \\ (\nu_h \leq \nu_{h+1} \leq \cdots \leq \nu_s;\ 0 \leq a_k^{(i)} \leq p-1), \\ A' = \begin{pmatrix} A'_{hh} & \ldots & A'_{hs} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{sh} & \ldots & A'_{ss} \end{pmatrix}, \qquad A'_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{1.7}$$

$(a_j^{(i,k)} \in \mathfrak{R}_p)$ *hat. Dabei sind die $a_k^{(i)}$ die Koeffizienten der Elementarteiler* (1.3) *der Matrix $A - xE(p)$.*

§ 2. Es sei für $n \geq 1$ die p-adische Entwicklung

$$A = A_0 + p\,A_1 + \cdots + p^{n-1} A_{n-1} + p^n A_n + \cdots \tag{2.1a}$$

einer Matrix A über $\mathfrak{R}_p$ vorgelegt. Wir betrachten nun alle zu A über $\mathfrak{R}_p$ ähnlichen Matrizen B, für die

$$A \equiv B \bmod p^n$$

gilt. Die Matrizen B besitzen dann die p-adische Entwicklung

$$B = A_0 + p\,A_1 + \cdots + p^{n-1} A_{n-1} + p^n B_n + \cdots, \tag{2.1b}$$

[1]) Der hier durchgeführte Beweis geht auf eine Anregung von Herrn H. Wielandt zurück.

und zu jedem B gibt es ein T über $\mathfrak{R}_p$ mit

$$T A T^{-1} = B. \tag{2.2}$$

Aus den Matrizen B wollen wir nun diejenigen aussuchen, für die B_n eine möglichst einfache Gestalt hat. Aus (2.2) folgt

$$T A T^{-1} \equiv A \bmod \mathfrak{p}^n,$$

und da sich jede umkehrbare Matrix T über $\mathfrak{R}_p$ in der Form

$$T = T_0(E + \mathfrak{p}^n T_1)$$

darstellen läßt, können nur die folgenden beiden Transformationen die Matrix A_n beeinflussen:

1. Transformation von A mit $E + \mathfrak{p}^n T_1$, wobei T_1 eine beliebige Matrix über $\mathfrak{R}_p$ ist.

2. Transformation von A mit der allgemeinsten umkehrbaren Lösung T_0 der Gleichung

$$T_0(A_0 + \cdots + \mathfrak{p}^{n-1} A_{n-1}) = (A_0 + \cdots + \mathfrak{p}^{n-1} A_{n-1}) T_0.$$

In diesem Abschnitt sollen die Transformationen der 1. Art untersucht werden. Aus $T = E + \mathfrak{p}^n T_1$ erhalten wir mit $T^{-1} \equiv E - \mathfrak{p}^n T_1 \bmod \mathfrak{p}^{n+1}$

$$T A T^{-1} \equiv A_0 + \cdots + \mathfrak{p}^{n-1} A_{n-1} + \mathfrak{p}^n (A_n + T_1 A_0 - A_0 T_1) \bmod \mathfrak{p}^{n+1}$$

oder

$$B_n - A_n \equiv T_1 A_0 - A_0 T_1 \bmod \mathfrak{p}. \tag{2.3}$$

Es sei nun nach Satz 1

$$A_0 \equiv \begin{pmatrix} A_{hh} & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad A_{ii} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1^{(i)} \\ 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{\nu_i}^{(i)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}),$$

$$A_n \equiv \begin{pmatrix} A_{hh}^{(n)} & \dots & A_{hs}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{sh}^{(n)} & \dots & A_{ss}^{(n)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad A_{ik}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}),$$

$$B_n \equiv \begin{pmatrix} B_{hh}^{(n)} & \dots & B_{hs}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{sh}^{(n)} & \dots & B_{ss}^{(n)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad B_{ik}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}),$$

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} T_{hh} & \dots & T_{hs} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{sh} & \dots & T_{ss} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}), \qquad T_{ik} \equiv \begin{pmatrix} t_{11}^{(i,k)} & \dots & t_{1\nu_k}^{(i,k)} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{\nu_i 1}^{(i,k)} & \dots & t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p}).$$

Wir wollen dann den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Gilt für die Bestandteile $A_{ik}^{(n)}$ und $B_{ik}^{(n)}$ von A_n und B_n im Fall $\nu_i \leq \nu_k$ die Beziehung $A_{ik}^{(n)} \equiv B_{ik}^{(n)} (\mathfrak{p})$, so gibt es keine Transformation $T = E + \mathfrak{p}^n T_1$, die (2.2) erfüllt. Im Fall $\nu_i > \nu_k$ gibt es mindestens eine Transformation $T = E + \mathfrak{p}^n T_1$, für die $B_{ik}^{(n)}$ die Gestalt*

$$B_{ik}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & \beta_1^{(i,k)} \\ \vdots & \vdots \\ & \beta_{\nu_k}^{(i,k)} \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathfrak{p}) \tag{2.4}$$

annimmt.

Zum Beweis betrachten wir (2.3). Mit $B_n - A_n \equiv C(\mathfrak{p})$,

$$B_{ik}^{(n)} - A_{ik}^{(n)} \equiv C_{ik} \equiv \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & C_n^{(i,k)} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & C_{\nu_i}^{(i,k)} \end{pmatrix} (\mathfrak{p})$$

erhalten wir aus (2.3) das Kongruenzensystem

$$T_{ik} A_{kk} - A_{ii} T_{ik} \equiv C_{ik} (\mathfrak{p}) \qquad (i, k = h, \dots, s). \tag{2.3a}$$

1. Es sei $\nu_i \leq \nu_k$, dann erhalten wir aus (2.3a) das System

$$t_{1,\varrho+1}^{(i,k)} - a_1^{(i)} t_{\nu_i \varrho}^{(i,k)} \equiv 0 (\mathfrak{p}) \qquad (\varrho = 1, \dots, \nu_k - 1)$$

$$t_{\sigma,\varrho+1}^{(i,k)} - t_{\sigma-1,\varrho}^{(i,k)} - a_\sigma^{(i)} t_{\nu_i \varrho}^{(i,k)} \equiv 0 (\mathfrak{p}) \qquad (\sigma = 2, \dots, \nu_i;\ \varrho = 1, \dots, \nu_k - 1)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{1\lambda}^{(i,k)} a_\lambda^{(k)} - t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} a_1^{(i)} \equiv c_1^{(i,k)} (\mathfrak{p})$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{\sigma\lambda}^{(i,k)} a_\lambda^{(k)} - t_{\sigma-1,\nu_k}^{(i,k)} - a_\sigma^{(i)} t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} \equiv c_\sigma^{(i,k)} (\mathfrak{p}) \qquad (\sigma = 2, \dots, \nu_i).$$

D. E. Rutherford [2] zeigte unter Ausnutzung der Teilbarkeitseigenschaften der Elementarteiler der rationalen Normalform A_0, daß aus den ersten beiden Systemen bereits die Kongruenzen

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{1\lambda}^{i,k} a_\lambda^{(k)} - t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} a_1^{(i)} \equiv 0 (\mathfrak{p})$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_k} t_{\sigma\lambda}^{(i,k)} a_\lambda^{(k)} - t_{\sigma-1,\nu_k}^{(i,k)} - a_\sigma^{(i)} t_{\nu_i \nu_k}^{(i,k)} \equiv 0 (\mathfrak{p})$$

folgen; daher ist (2.3a) in diesem Fall genau dann lösbar, wenn $C_{ik} \equiv 0_{ik} (\mathfrak{p})$ ist.

2. Es sei $\nu_i > \nu_k$. Da A_{ii} und ihre Transponierte A_{ii}^T modulo $\mathfrak{p}$ genau die gleichen Elementarteiler besitzen, gibt es mindestens eine Matrix M_i über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$

mit $M_i^{-1} A_{ii} M_i = A_{ii}^T \bmod p$. Zum Beispiel genügt die Matrix

$$(2.5) \qquad M_i = (m_{\varrho\sigma}^{(i)}) \quad \text{mit} \quad m_{\varrho\sigma}^{(i)} \equiv \begin{cases} -a_{\varrho+\sigma}^{(i)} \ (p) & \text{für} \quad \varrho+\sigma < \nu_i + 1 \\ 1 \quad (p) & \text{für} \quad \varrho+\sigma = \nu_i + 1 \\ 0 \quad (p) & \text{für} \quad \varrho+\sigma > \nu_i + 1 \end{cases}$$

dieser Kongruenz. Aus (2.3a) erhalten wir mit

$$R_{ki} \equiv M_k T_{ik}^T M_i^{-1} (p)$$

$$D_{ki} \equiv -M_k C_{ik}^T M_i^{-1} (p)$$

das Kongruenzensystem

$$(2.6) \qquad R_{ki} A_{ii} - A_{kk} R_{ki} \equiv D_{ki} (p).$$

Mit M_k aus (2.5) und beliebigem M_i folgt

$$D_{ki} \equiv \begin{pmatrix} d_1^{(k,i)} & \dots & d_{\nu_i}^{(k,i)} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (p).$$

Aus (2.6) erhalten wir mit $R_{ki} = (r_{\varrho\sigma}^{(k,i)})\,(p)$ das Kongruenzensystem

$$(2.7a) \quad \begin{cases} r_{1\sigma}^{(k,i)} - a_1^{(k)} r_{\nu_k,\sigma-1}^{(k,i)} \equiv d_{\sigma-1}^{(k,i)} (p) & (\sigma = 2, \dots, \nu_i) \\ r_{\varrho\sigma}^{(k,i)} - r_{\varrho-1,\sigma-1}^{(k,i)} - a_\varrho^{(k)} r_{\nu_k,\sigma-1} \equiv 0 (p) & (\varrho = 2, \dots, \nu_k;\ \sigma = 2, \dots, \nu_i) \end{cases}$$

$$(2.7b) \quad \begin{cases} \sum_{\varrho=1}^{\nu_i} r_{1\varrho}^{(k,i)} a_\varrho^{(i)} - a_1^{(k)} r_{\nu_k \nu_i}^{(k,i)} \equiv d_{\nu_i}^{(k,i)} (p) \\ \sum_{\varrho=1}^{\nu_i} r_{\sigma\varrho}^{(k,i)} a_\varrho^{(i)} - r_{\sigma-1,\nu_i}^{(k,i)} - a_\sigma^{(k)} r_{\nu_k \nu_i}^{(k,i)} \equiv 0 (p) \qquad (\sigma = 2, \dots, \nu_k). \end{cases}$$

Die $a_\mu^{(i)}$ bzw. $a_\mu^{(k)}$ sind die Koeffizienten der beiden Polynome

$$A_i(x) \equiv \sum_{\sigma=1}^{\nu_i+1} a_\varrho^{(i)} x^{\varrho-1} (p) \quad \text{und} \quad A_k(x) \equiv \sum_{\varrho=1}^{\nu_k+1} a_\varrho^{(k)} x^{\varrho-1} (p)$$

mit $a_{\nu_i+1}^{(i)} \equiv a_{\nu_k+1}^{(k)} \equiv -1\,(p)$. Es gilt $A_k(x) \mid A_i(x)\,(p)$, d.h. es gibt ein

$$B(x) \equiv \sum_{\varrho=1}^{\nu_i-\nu_k+1} b_\varrho x^{\varrho-1} (p) \qquad (b_{\nu_i-\nu_k+1} \equiv 1\,(p))$$

mit

$$A_i(x) \equiv B(x)\, A_k(x)\ (p).$$

Dann gilt

$$a_{\lambda+1}^{(i)} \equiv \sum_{\varrho=\mathrm{Max}\,(0,\ \lambda-\nu_k)}^{\mathrm{Min}\,(\lambda,\ \nu_i-\nu_k)} b_{\varrho+1}\, a_{\lambda-\varrho+1}^{(k)} (p)$$

und setzen wir dies in (2.7b) ein, so erhalten wir

$$(2.8a)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\sigma=1}^{\nu_i-\nu_k} b_\sigma \left\{ \sum\limits_{\varrho=1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} r_{1,\sigma+\varrho-1}^{(k,i)} - r_{1,\nu_k+\sigma}^{(k,i)} \right\} + \\ \qquad + \sum\limits_{\sigma=1}^{\nu_k} a_\sigma^{(k)} r_{1,\nu_i-\nu_k+\sigma}^{(k,i)} - a_1^{(k)} r_{\nu_k,\nu_i}^{(k,i)} \equiv d_{\nu_i}^{(k,i)}(p) \\ \sum\limits_{\sigma=1}^{\nu_i-\nu_k} b_\sigma \left\{ \sum\limits_{\varrho=1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} r_{\mu,\sigma+\varrho-1}^{(k,i)} - r_{\mu,\nu_k+\sigma}^{(k,i)} \right\} + \\ \qquad + \sum\limits_{\sigma=1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} r_{\mu,\nu_i-\nu_k+\sigma}^{(k,i)} - r_{\mu-1,\nu_i}^{(k,i)} - a_\mu^{(k)} r_{\nu_k,\nu_i}^{(k,i)} \equiv 0(p) \quad (\mu = 2, \ldots, \nu_k). \end{cases}$$

Man bestätigt leicht, daß die Kongruenzen

$$(2.8b)\quad \begin{cases} r_{\varrho\sigma}^{(k,i)} \equiv r_{\nu_k,\nu_k+\sigma-\varrho}^{(k,i)} - \sum\limits_{\lambda=\varrho+1}^{\nu_k} a_\lambda^{(k)} r_{\nu_k,\lambda+\sigma-\varrho-1}^{(k,i)}(p) \\ \qquad (\sigma = 1, \ldots, \nu_k - 1;\ \varrho = \sigma, \ldots, \nu_k - 1) \\ r_{\varrho\sigma}^{(k,i)} \equiv d_{\sigma-\varrho}^{(k,i)} + \sum\limits_{\lambda=1}^{\varrho} a_\lambda^{(k)} r_{\nu_k,\lambda+\sigma-\varrho-1}^{(k,i)}(p) \\ \qquad (\sigma = 2, \ldots, \nu_i;\ \varrho = 1, \ldots, \mathrm{Min}\,(\sigma-1, \nu_k)) \end{cases}$$

äquivalent sind mit (2.7a). Setzen wir nun (2.8b) in (2.8a) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen die Kongruenzen

$$(2.9)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu_i-\nu_k} \sum\limits_{\varrho=\mu+1}^{\nu_k} b_\lambda a_\varrho^{(k)} d_{\lambda-\mu+\varrho-1}^{(k,i)} - \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu_i-\nu_k} b_\lambda d_{\nu_k+\lambda-\mu}^{(k,i)} + \sum\limits_{\varrho=\mu+1}^{\nu_k} a_\varrho^{(k)} d_{\varrho-\mu+\nu_i-\nu_k}^{(k,i)} \equiv \\ \qquad \equiv d_{\nu_i-\mu+1}^{(k,i)}(p) \quad (\mu = 1, \ldots, \nu_k). \end{cases}$$

Die Kongruenz (2.6) ist daher genau dann nach R_{ki} auflösbar, wenn die Elemente $d_\varrho^{(k,i)}$ der Matrix D_{ki} die Kongruenzen (2.9) erfüllen. Für die Indizes der $d_\lambda^{(k,i)}$ in den einzelnen Termen von (2.9) gilt der Reihe nach

$$\lambda - \mu + \varrho - 1 \leq \nu_i - \mu - 1; \quad \nu_k + \lambda - \mu \leq \nu_i - \mu; \quad \varrho - \mu + \nu_i - \nu_k \leq \nu_i - \mu$$

und daher folgt, daß sich bei beliebiger Vorgabe der Zahlen

$$d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$$

die Kongruenzen (2.9) sukzessiv nach den restlichen

$$d_{\nu_i-\nu_k+1}^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i}^{(k,i)}$$

auflösen lassen. Es galt

$$C_{ik} \equiv -M_i^T D_{ki}^T (M_k^T)^{-1}(p).$$

Haben M_i und M_k die Gestalt (2.5), so gilt $M_i^T \equiv M_i$ und $M_k^T \equiv M_k$, daher

$$C_{ik} \equiv -M_i D_{ki}^T M_k(p),$$

woraus wir die Kongruenzen

$$c_\mu^{(i,k)} \equiv \sum_{\varrho=1}^{\nu_i-\mu} a_{\varrho+\mu}^{(i)} d_\varrho^{(k,i)} - d_{\nu_i-\mu+1}^{(k,i)} (p) \quad (\mu = 1, \ldots, \nu_i - 1)$$

$$c_{\nu_i}^{(i,k)} \equiv - d_1^{(k,i)} (p)$$

erhalten. Aus diesen lassen sich die $d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$ durch $c_{\nu_k+1}^{(i,k)}, \ldots, c_{\nu_i}^{(i,k)}$ ausdrücken, und diese nehmen alle Werte modulo p an, sofern die $d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$ alle Werte durchlaufen. Geben wir also die $c_{\nu_k+1}^{(i,k)}, \ldots, c_{\nu_i}^{(i,k)}$ beliebig vor, etwa durch $c_\lambda^{(i,k)} \equiv - \alpha_\lambda^{(i,k)} (p)$, so sind damit die $d_1^{(k,i)}, \ldots, d_{\nu_i-\nu_k}^{(k,i)}$ eindeutig bestimmt und wir können die restlichen $d_j^{(k,i)}$ so bestimmen, daß (2.9) erfüllt ist, womit die Lösbarkeit von (2.6) und damit auch von (2.3 a) gewährleistet ist.

§ 3. Als Anwendung der bis jetzt gefundenen Resultate beweisen wir den Satz 3. *Alle Matrizen der Gestalt*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 1 & \ldots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_\nu \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_\nu' \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

wobei $0 \leq a_k \leq p-1$ *und* $a_k' \in \mathfrak{R}_p$ *gilt, sind Normalformen über* $\mathfrak{R}_p$: *Jede Matrix über* $\mathfrak{R}_p$, *die modulo* p *genau einen Elementarteiler besitzt, ist zu genau einer der Matrizen* (3.1) *ähnlich, und jede Matrix* (3.1) *hat modulo* p *genau einen Elementarteiler.*

Zum Beweis seien gemäß Satz 1 zwei ähnliche Matrizen

$$A = A_0 + \cdots + p^{n-1} A_{n-1} + p^n A_n + \cdots = \bar{A} + p^n A_n + \cdots$$

$$B = A_0 + \cdots + p^{n-1} A_{n-1} + p^n B_n + \cdots = \bar{A} + p^n B_n + \cdots$$

in der Gestalt (1.7) vorgelegt. Nach Satz 2 haben nur diejenigen Transformationen T_0 auf A_n einen Einfluß, die der Bedingung

$$T_0 \bar{A} = \bar{A} T_0$$

genügen. Die Ergebnisse von D. E. RUTHERFORD [2] sind auf den vorliegenden Fall übertragbar, die allgemeinste Lösung hat die Gestalt $T_0 = x_1 E + \cdots + x_\nu (\bar{A})^{\nu-1}$, die durch die Forderung der Umkehrbarkeit noch gewissen Bedingungen unterliegt. Aus $T_0 A \equiv B T_0 (p^{n+1})$ erhalten wir dann $T_0 A_n \equiv B_n T_0 (p)$ oder

$$x_1 A_n + \cdots + x_\nu A_0^{\nu-1} A_n \equiv x_1 B_n + \cdots + x_\nu B_n A_0^{\nu-1} (p).$$

Nun ist mit

$$B_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_\nu \end{pmatrix} (p) \quad \text{und} \quad A_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_\nu \end{pmatrix} (p)$$

offenbar

$$B_n A_0^{\varrho} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_\nu & x & \dots & x \end{pmatrix} (p) \quad \text{und} \quad A_0^{\varrho} \cdot A_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_1^{(\varrho)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_\nu^{(\varrho)} \end{pmatrix} (p).$$

$\uparrow$ 1. Sp. $\quad$ $\uparrow$ $(\nu-\varrho)$. Sp.

Betrachten wir die erste Spalte in (3.2), so tritt sie nur auf der rechten Seite im letzten Term als von Null verschieden auf. Aus ihr folgt

$$x_\nu \beta_\lambda \equiv 0 (p) \qquad (\lambda = 1, \dots, \nu). \tag{3.3}$$

Ist $B_n \equiv 0 (p)$, so folgt aus (3.2) auch $A_n \equiv 0 (p)$ und umgekehrt. Daher dürfen wir $B_n \not\equiv 0 (p)$ voraussetzen. Damit folgt aus (3.3)

$$x_\nu \equiv 0 (p).$$

Betrachten wir genau so die 2., 3., ..., $(\nu-1)$. Spalte, so erhalten wir

$$x_2 \equiv \cdots \equiv x_\nu \equiv 0 (p).$$

Daher muß

$$x_1 A_n \equiv x_1 B_n (p)$$

gelten. Wegen der Existenz von T_0^{-1} muß nun $x_1 \not\equiv 0 (p)$ sein, daher ergibt sich

$$A_n \equiv B_n (p),$$

wenn es überhaupt eine Matrix T geben soll, die A in B transformiert. Durch vollständige Induktion nach n erhalten wir schließlich die gewünschte Aussage.

Für zweireihige unimodulare Matrizen $\bmod p^2$ hat H. Rohrbach ([3], §§ 2,12) Normalformen angegeben. Wir bestimmen nun die Normalformen der zweireihigen invertierbaren Matrizen über $\mathfrak{R}_p$.

Satz 4. *Jede zweireihige invertierbare Matrix über $\mathfrak{R}_p$ hat eine der Matrizen*

$$R = r_1 I + p r_2 I + \cdots + p^{k-1} r_k I + p^k S \tag{3.4}$$

mit

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{pmatrix}$$

und

$$0 < r_1 < p, \quad 0 \leq r_i < p \ (i = 2, \dots, k), \quad s_1 \in \mathfrak{R}_p, \quad s_2 \in \mathfrak{R}_p \, (s_1 \not\equiv 0 (p) \text{ falls } k = 0);$$

wobei k die Werte 0, 1, 2, ... annehmen kann, zur Normalform. Jede Matrix (3.4) ist eine Normalform über $\mathfrak{R}_p$.

Beweis. Es sei eine zweireihige invertierbare Matrix A über $\mathfrak{R}_p$ vorgelegt. Besitzt A einen quadratischen Elementarteiler $\bmod p$, so gibt Satz 3 die möglichen Normalformen von A in Übereinstimmung mit Satz 4 $(k=0)$ an. Wir können also A von der Gestalt

$$A = r_1 I + p A_1$$

voraussetzen. Nach Satz 2 brauchen wir A nur mit einer mit $r_1 I$ vertauschbaren Matrix T_1 zu transformieren, um die Normalform mod p^2 von A zu erhalten. Für jedes T_1 gilt $T_1 \cdot r_1 I = r_1 I \cdot T_1$ und daher erhalten wir

$$T_1 A T_1^{-1} = r_1 I + p T_1 A_1 T_1^{-1}.$$

Durch geeignete Wahl von T_1 können wir eine der beiden Formen erreichen:

$$A' = T_1 A T_1^{-1} = r_1 I + p r_2 I + p^2 A_2$$

bzw.

$$A'' = T_1 A T_1^{-1} = r_1 I + p \begin{pmatrix} 0 & \bar{s}_1 \\ 1 & \bar{s}_2 \end{pmatrix} + p^2 A_2 \quad (0 \leq \bar{s}_1, \bar{s}_2 \leq p-1).$$

Im letzten Fall können wir die Beweismethode von Satz 3 auf $A'' - r_1 I$ anwenden und erhalten als Normalformen

$$r_1 I + p \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{pmatrix} \quad (s_1, s_2 \in \mathfrak{R}_p).$$

Im ersten Fall transformieren wir A weiter:

$$T_2 A' T_2^{-1} = r_1 I + p r_2 I + p^2 T_2 A_2 T_2^{-1}.$$

Wir können wie oben schließen und erhalten so die Normalformen mod p^3. Durch vollständige Induktion ergibt sich die erste Aussage von Satz 4.

Seien nun zwei Matrizen

$$R' = (r_1' + \cdots + p^{k'-1} r_{k'}')\ I + p^{k'} S'$$
$$R'' = (r_1'' + \cdots + p^{k''-1} r_{k''}'')\ I + p^{k''} S''$$

mit $k' \leq k''$ vorgelegt und gelte

$$T R' T^{-1} = R'',$$

so folgt sofort

$$r_i' = r_i'' \text{ für } i = 1, \ldots, k'$$

und daher

$$T S' T^{-1} = (r_{k'+1}'' + \cdots + p^{k''-k'-1} r_{k''}'')\ I + p^{k''-k'} S''.$$

Hieraus würde aber

$$T S' T^{-1} \equiv c I\ (p^{k''-k'}) \quad (c \in \mathfrak{R}_p)$$

folgen. Ist $c \neq 0$, so haben wir einen Widerspruch erhalten, da S' z. B. modulo p genommen eine Normalform ist, daher muß $k'' = k'$ sein. Ist $c = 0$, so würde $S' \equiv 0\,(p)$ folgen, was nicht möglich ist. Mit $k'' = k'$ erhalten wir dann $T S' T^{-1} = S''$, was nach Satz 3 $S'' = S'$ nach sich zieht.

Corollar. *Die Klassenzahl der Automorphismengruppe* $\mathfrak{A}(p^{n+1}, p^{n+1})$ $(n \geq 0)$ *der abelschen Gruppe vom Typus* (p^{n+1}, p^{n+1}) *beträgt* $p^n(p^{n+2}-1)$. Da die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(p^{n+1}, p^{n+1})$ aus allen zweireihigen invertierbaren Matrizen mod p^{n+1} besteht, brauchen wir nur die Normalformen (3.4)

modulo p^{n+1} genommen abzuzählen. Für jeweils festes k lassen sich diese Zahlen leicht ermitteln. Wir erhalten für

$$\begin{aligned} k = 0, (s_1 \not\equiv 0 (p)) &: \quad (p-1)\, p^{2n+1} \\ k = 1, \ldots, n &: \quad (p-1)\, p^{2n+1-k} \\ k = n+1 &: \quad (p-1)\, p^n. \end{aligned}$$

Die Summe ergibt offenbar $p^n(p^{n+2}-1)$. Zum Vergleich beträgt die Ordnung der $\mathfrak{A}(p^{n+1}, p^{n+1})$ $p^{4n+1}(p^2-1)(p-1)$. In der Einleitung hatten wir als Beispiel den Fall $n=1$, $p=2$ angeführt.

Literatur.

[1] Schreier, O., u. E. Sperner: Vorlesungen über Matrizen. Leipzig 1932. — [2] Rutherford, D. E.: On the rational commutant of a square matrix. Proc. Amsterdam **35**, 871 (1932). — [3] Rohrbach, H.: Die Charaktere der binären Kongruenzgruppen mod p^2. Schr. d. math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin **1**, 33 (1932/33).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 16. Mai 1952.)

DÜRBAUM, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 86—93 (1952)

Über die Ganzheitsbereiche bewerteter Körper.

Von
HANSJÜRGEN DÜRBAUM.

1. Problemstellung und Definitionen.

Die Einteilung der Bewertungen in archimedische und nichtarchimedische ist bekanntlich mehr als eine bloße Klassifikation: archimedische und nichtarchimedische Bewertungen haben vielmehr verschiedenartige Strukturen. Viele Sätze der Bewertungstheorie sind daher bisher für beide Typen von Bewertungen getrennt formuliert oder doch wenigstens getrennt bewiesen worden.

Das führt zu der Frage, ob man nicht durch geeignete Begriffsbildungen und Beweismethoden eine Vereinheitlichung der Bewertungstheorie erreichen kann. Erste Schritte in dieser Richtung haben ARTIN-WHAPLES [1] und KAPLANSKY [3] getan. Von ARTIN und WHAPLES wurde dabei die axiomatische Untersuchungsmethode, von KAPLANSKY der Begriff der Topologie vom Bewertungstyp und topologische Beweismethoden als Hilfsmittel herangezogen. Als weiterer Schritt ist die Arbeit von F. K. SCHMIDT und G. PREUSS [7] über den HILBERTschen Irreduzibilitätssatz zu werten. Dort tritt auch zum ersten Male der Begriff der *Halbordnung* oder *Fastordnung* auf, der unter anderem auch eine einheitliche Untersuchung der Ganzheitsbereiche von Bewertungen erlaubt. Diese wird in der vorliegenden Arbeit durchgeführt und damit eine einheitliche Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von KRULL [4] erzielt, der besagt: Eine Ordnung eines Körpers ist genau dann Ganzheitsbereich einer nichtarchimedischen Bewertung, wenn sie maximal ist.

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition der Fastordnung.

Definition. Ein in einem Schiefkörper $\mathfrak{K}$ enthaltener Teilbereich $\mathfrak{o}$ heißt ein *Halbring*, wenn

(F 1) $0, \pm 1 \in \mathfrak{o}$,

(F 2) $a \cdot b \in \mathfrak{o}$, falls $a, b \in \mathfrak{o}$,

(F 3) es von 0 verschiedene Elemente z, z' in $\mathfrak{o}$ gibt, so daß
$z(\mathfrak{o}+\mathfrak{o}) \subseteq \mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{o}+\mathfrak{o})z' \subseteq \mathfrak{o}$.

$\mathfrak{o}$ heißt ein *invarianter Halbring*, wenn außerdem

(F 4) $a\,b\,a^{-1} \in \mathfrak{o}$ für $b \in \mathfrak{o}$ und $a \in \mathfrak{K}$.

Ein Halbring $\mathfrak{o}$ heißt eine *Halbordnung* oder *Fastordnung*, wenn jedes Element aus $\mathfrak{K}$ als Quotient zweier Elemente von $\mathfrak{o}$ dargestellt werden kann, wenn also zusätzlich zu (F 1) bis (F 3) noch

(F 5) $\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o}^{x^{-1}} \cup \mathfrak{o}^{x^{-1}} \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{K}$

erfüllt ist. Spezielle Fastordnungen sind die *Vollfastordnungen*, die außer den Halbringseigenschaften noch die Eigenschaft

(F 6) $a \in \mathfrak{o}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{o}$ für alle $a \in \mathfrak{R}$

haben.

Bemerkungen zu der Definition. Die Begriffe des Halbringes und der Fastordnung sind Verallgemeinerungen des Begriffes des Ringes bzw. der Ordnung. Ein Halbring bzw. eine Fastordnung ist genau dann ein Ring bzw. eine Ordnung, wenn für $\mathfrak{o}$ (F 3) mit $z = z' = 1$ erfüllt ist. Die Elemente z, z' aus (F 3) nennen wir ihrer Eigenschaften wegen *Links-* bzw. *Rechts-2-Addiatoren*.

2. Ergebnisse.

Der Ganzheitsbereich einer Bewertung φ von $\mathfrak{R}$, d.h. die Menge der Elemente $a \in \mathfrak{R}$ mit $\varphi(a) \leq 1$, ist im allgemeinen keine Ordnung von $\mathfrak{R}$. Ein einfaches Beispiel liefert die Bewertung des rationalen Zahlkörpers durch den gewöhnlichen absoluten Betrag. Die rationalen Zahlen vom Betrage ≤ 1, allgemein die hinsichtlich einer Bewertung ganzen Elemente eines Körpers bilden aber stets eine Fastordnung.

Man kann daher fragen, ob die Ganzheitsbereiche archimedischer und nichtarchimedischer Bewertungen sich einheitlich dadurch kennzeichnen lassen, daß man an Stelle der Maximalordnungen maximale Fastordnungen betrachtet. Die Menge der ganzen Elemente eines bewerteten Körpers ist stets schon als multiplikative Halbgruppe maximal, d.h.: Nimmt man ein Element a des Körpers mit $\varphi(a) > 1$ hinzu und schließt dann multiplikativ ab, so bekommt man den ganzen Körper.

Wir können aber auch umgekehrt zeigen, daß jede maximale Fastordnung eines Körpers Ganzheitsbereich einer Bewertung ist. Es gilt also der

Satz 1. *Die Ganzheitsbereiche gewöhnlicher Bewertungen eines Körpers sind genau die maximalen Fastordnungen.*

Der *Beweis* ergibt sich durch Verallgemeinerung der KRULLschen Überlegungen zur arithmetischen Charakterisierung der Maximalordnungen. Er zerfällt in drei Teile. Zunächst untersuchen wir die Erweiterung einer Fastordnung durch Adjunktion eines Elementes. Mit ihrer Hilfe wird im zweiten Teil gezeigt, daß jede maximale Fastordnung eine Vollfastordnung ist. Im dritten Teil folgt dann der Nachweis dafür, daß jede maximale Vollfastordnung zu einer Bewertung des Körpers Anlaß gibt, dessen Ganzheitsbereich sie ist. In diesem Teil wird wesentlich von einem ARTINschen Satz Gebrauch gemacht, der aussagt, daß eine Potenz einer in einem Körper erklärten reellen Funktion schon eine Bewertung ist, wenn die Funktion alle Bewertungspostulate mit Ausnahme der Dreiecksungleichung erfüllt und die Addition hinsichtlich der durch die Funktion im Körper erklärten Topologie stetig ist.

Beim Beweis dafür, daß eine maximale Fastordnung eines Körpers eine Vollfastordnung ist, wird übrigens nicht die volle Maximalität als Fastordnung gebraucht, sondern nur die Maximalität als „$\mathfrak{z}$-Fastordnung", wenn $\mathfrak{z}$ irgendeine feste Menge von Addiatoren der Fastordnung ist. Diese Bemerkung ist

für die Konstruktion von Vollfastordnungen wichtig. Die Vereinigung einer Folge ineinandergeschachtelter Fastordnungen braucht nämlich im allgemeinen keine Fastordnung zu sein, während dies für eine Folge ineinandergeschachtelter $\mathfrak{z}$-Fastordnungen stets der Fall ist.

Unter Benutzung der OSTROWSKIschen Ergebnisse und des oben erwähnten Satzes von ARTIN ergibt sich aus Satz 1 die

Folgerung. *Die einzige maximale Fastordnung des rationalen Zahlkörpers, die keine Ordnung ist, ist die Menge der rationalen Zahlen vom Betrage* ≤ 1.

Der Satz 1 läßt sich unter Verwendung derselben Schlüsse sofort auf das Nichtkommutative verallgemeinern. Es ergibt sich so der

Satz 2. *Eine invariante Fastordnung* $\mathfrak{o}$ *eines Schiefkörpers* $\mathfrak{K}$ *ist genau dann Ganzheitsbereich einer Bewertung von* $\mathfrak{K}$, *wenn* $\mathfrak{o}$ *als Fastordnung maximal ist.*

Dieser Satz kann jedoch nicht wie Satz 1 im kommutativen Spezialfall in einfacher Weise zur Konstruktion von invarianten Vollfastordnungen ausgenutzt werden. Anders wäre es, wenn sich die invarianten Fastordnungen, die als invariante maximal sind, bereits als Ganzheitsbereiche von Bewertungen erweisen würden. Dies ist nicht der Fall, wie aus der folgenden Bemerkung hervorgeht.

Zusatz zu Satz 2. *Es gibt maximale invariante Fastordnungen (sogar Ordnungen) in Schiefkörpern, die nicht Ganzheitsbereiche gewöhnlicher Bewertungen sind.*

Es bleibt also die Frage nach einer konstruktiveren Charakterisierung der Bewertungsfastordnungen von Schiefkörpern noch offen. Es ist auch zu hoffen, daß sich gleichzeitig die Frage erledigen läßt, ob es maximale invariante Fastordnungen gibt, die keine Vollfastordnungen sind. Letzteres wird durch den unter 5. gegebenen Beweis des Zusatzes nicht ausgeschlossen.

3. Moduln in bezug auf einen Fastring, Erweiterung von Fastringen.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 1 müssen wir uns mit Erweiterungen von Fastordnungen innerhalb des fest vorgegebenen Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ beschäftigen. Wir beginnen mit einer kurzen Betrachtung der Durchschnitte von Fastordnungen.

Der Durchschnitt von Fastordnungen ist nicht immer eine Fastordnung: Die p-adischen Bewertungsringe und der zum absoluten Betrag gehörige Ganzheitsbereich des rationalen Zahlkörpers haben als Durchschnitt allein die Elemente 0, $+1$ und -1. Auch die Alternative: Der Durchschnitt ist eine Fastordnung oder die von 0 verschiedenen Elemente des Durchschnitts bilden eine multiplikative Gruppe, wird durch das folgende Beispiel widerlegt. $\mathfrak{o}_m$ sei die Fastordnung des rationalen Zahlkörpers, die besteht aus (1) der Halbgruppe aller Potenzen $\pm a^\mu$ einer festen ganzen Zahl $a > 1$ mit nichtnegativen ganzen Exponenten und (2) allen ganzen Zahlen, die durch die ganze Zahl $m > 1$ teilbar sind. (m und alle $\mathfrak{o}_m$-Vielfachen von m sind Addiatoren von $\mathfrak{o}_m$.)

Der Durchschnitt der Fastordnungen $\mathfrak{o}_m$, wenn m die ganzen Zahlen >1 durchläuft, besteht gerade aus den unter (1) beschriebenen rationalen Zahlen und der Null. Diese Menge ist weder eine Fastordnung, noch bilden ihre von 0 verschiedenen Elemente eine multiplikative Gruppe.

Es ist daher nicht möglich, ohne Bezugnahme auf die Addiatoren der Fastordnung $\mathfrak{o}$ zu erklären: Die durch Adjunktion eines Elementes a von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{o}$ erweiterte Fastordnung $\mathfrak{o}[a]$ soll der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}$ und a enthaltenden Fastordnungen von $\mathfrak{K}$ sein. Dies ist der Grund dafür, daß wir eine neue Definition einführen ($\mathfrak{z}$ bedeute dabei eine Teilmenge der Menge $\mathfrak{z}_\mathfrak{o}$ aller Addiatoren von $\mathfrak{o}$):

Definition. *Die durch $\mathfrak{z}$-Adjunktion eines Elementes $a \in \mathfrak{K}$ zu der Fastordnung $\mathfrak{o}$ aus $\mathfrak{K}$ erhaltene Fastordnung* $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ soll der Durchschnitt aller Fastordnungen von $\mathfrak{K}$ sein, die $\mathfrak{o}$ und a umfassen und die Elemente von $\mathfrak{z}$ zu Addiatoren besitzen.

Nennt man kurz eine Fastordnung $\subseteqq \mathfrak{K}$, die die Elemente von $\mathfrak{z}$ zu Addiatoren besitzt, eine *$\mathfrak{z}$-Fastordnung* von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}$ und a umfassenden $\mathfrak{z}$-Fastordnungen.

Ganz entsprechend erklären wir:

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{K}$ heißt ein *$\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Modul*, wenn $\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}) \subseteqq \mathfrak{m}$ gilt.

Unter dem *durch ein System $\mathfrak{s} \subseteqq \mathfrak{K}$ erzeugten $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Modul* $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ verstehen wir den Durchschnitt aller $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Moduln, die $\mathfrak{s}$ enthalten.

Wir wollen nun eine *induktive Übersicht über die Elemente des $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Moduls $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ und daran anschließend über die Elemente der Fastordnung* $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ gewinnen. Sie spielt beim Beweis von Satz 1 eine entscheidende Rolle.

Hilfssatz 1. Setzt man $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{s}$ und für jede natürliche Zahl μ $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_{\mu-1} \cup \mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1})$, so gilt $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} = \bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$. Ist das System $\mathfrak{s}$ eine multiplikative Halbgruppe, die ± 1 enthält, so ist $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ sogar eine $\mathfrak{z}$-Fastordnung $\supseteqq \mathfrak{o}$.

Wegen $\mathfrak{S}_\mu \subseteqq (\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ für jedes μ ist die Gleichung $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} = \bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$ bewiesen, sobald $\bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$ als $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Modul erkannt ist. Nun ergibt sich aber durch Induktion nach μ sofort $\mathfrak{o}\,\mathfrak{S}_\mu \subseteqq \mathfrak{S}_\mu$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}) \subseteqq \mathfrak{S}_\mu$. Wegen $\mathfrak{S}_{\mu-1} \subseteqq \mathfrak{S}_\mu$ ist daher $\bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{S}_\mu$ wirklich ein $\mathfrak{o}, \mathfrak{z}$-Modul.

Stellt $\mathfrak{s}$ eine multiplikative Halbgruppe dar, so schließt man induktiv weiter, daß $\mathfrak{S}_\mu \cdot \mathfrak{S}_\mu \subseteqq (\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ ist, wobei man insbesondere die Beziehung

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}) \cdot \mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}) \subseteqq$$
$$\subseteqq \mathfrak{z}\left[\mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1}\,\mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1}\,\mathfrak{S}_{\mu-1}) + \mathfrak{z}(\mathfrak{S}_{\mu-1} \cdot \mathfrak{S}_{\mu-1} + \mathfrak{S}_{\mu-1} \cdot \mathfrak{S}_{\mu-1})\right]$$

zu beachten hat.

Aus dem ersten Teil von Hilfssatz 1 ergibt sich die

Folgerung 1. Für ein beliebiges $\xi \in \mathfrak{K}$ gilt $(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} \cdot \xi = (\mathfrak{s} \cdot \xi)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$.

Aus dem zweiten Teil von Hilfssatz 1 entnimmt man

Folgerung 2. Setzt man $\mathfrak{s}$ gleich der multiplikativen Halbgruppe der Elemente $\pm a^\mu$ mit nichtnegativem μ, so ist

$$(\mathfrak{s})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} = \mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a].$$

Zu einem festen Element $b \in \mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ gibt es daher immer einen geeigneten endlichen Abschnitt $\mathfrak{s}'$ der Folge $\mathfrak{s} = \{\pm a^\mu\}$, so daß schon $b \in (\mathfrak{s}')_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ gilt. Wir benutzen im folgenden für den endlichen Abschnitt, der mit dem n-ten Gliede abbricht, die Abkürzung $\{\pm a^\mu\}_n$, während $\{\pm a^\mu\}$ immer die volle Folge bedeutet.

Wir ziehen noch die weitere einfache

Folgerung 3. Ist $a^{m+1} \in (\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$, so ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a] = (\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$.

Sie ergibt sich aus Hilfssatz 1 durch dieselben trivialen Überlegungen, die zu der Folgerung 1 führen. Sie besagt, daß *der Modul* $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a] = (\{\pm a^\mu\})_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ *schon ein endliches Erzeugendensystem besitzt, wenn a von* $\mathfrak{o}$ *„ganz abhängig" ist.*

Schließlich ergibt sich aus Folgerung 1

Hilfssatz 2. Ist das Element $b \in \mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ bereits in $(\{\pm a^\mu\}_n)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ enthalten und besteht für das Element $\xi \in \mathfrak{o}$ die Beziehung $a^\mu \cdot \xi \in \mathfrak{o}$ für alle μ mit $1 \leq \mu \leq n$, so liegt auch $b\,\xi$ in

Offenbar ist nämlich

$$b \cdot \xi \in (\{\pm a^\mu\}_n)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} \cdot \xi = (\{\pm a^\mu \xi\}_n)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}} \subseteq \mathfrak{o}.$$

Bemerkung 1. Die den voranstehenden im Nichtkommutativen entsprechenden Hilfssätze und Folgerungen lassen sich ebenso herleiten, wenn $\mathfrak{o}$ eine invariante Fastordnung und die benutzte Menge $\mathfrak{z}$ der Addiatoren invariant ist.

Bemerkung 2. Die Addition in einer Fastordnung $\mathfrak{o}$ ist insofern nichtassoziativ, als man z. B. (z ein Addiator von $\mathfrak{o}$, ω_i Elemente aus $\mathfrak{o}$) wohl schließen kann, daß $(z\,\omega_1 + (z^2\,\omega_2 + z^3\,\omega_3))$ in $\mathfrak{o}$ liegt, aber nicht, daß $((z\,\omega_1 + z^2\,\omega_2) + z^3\,\omega_3)$ in $\mathfrak{o}$ liegt. Diese Nichtassoziativität ist der Grund dafür, daß man nur eine induktive Übersicht über die Elemente von $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ gewinnen kann.

4. Charakterisierung der Ganzheitsbereiche bewerteter Körper.

Wir können nun den Beweis von Satz 1 ohne Schwierigkeiten führen. Um ihn übersichtlich zu gestalten, stellen wir dem eigentlichen Beweis noch den folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz 3. $\mathfrak{o}$ sei eine Fastordnung von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{z}$ eine Menge von Addiatoren und $\mathfrak{o}$ maximale $\mathfrak{z}$-Fastordnung in $\mathfrak{R}$, d. h. es gibt keine $\mathfrak{o}$ umfassende, von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{R}$ verschiedene Fastordnung in $\mathfrak{R}$, die die Elemente von $\mathfrak{z}$ als Addiatoren besitzt. Ist dann $\xi \in \mathfrak{o}$ eine Nichteinheit, $\eta \in \mathfrak{R}$ beliebig, so liegt $\eta\,\xi^\varrho$ in $\mathfrak{o}$ für ein geeignetes positives ϱ.

Beweis. Da $\xi^{-1} \notin \mathfrak{o}$, ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[\xi^{-1}] = \mathfrak{K}$, $\eta \in \mathfrak{o}_\mathfrak{z}[\xi^{-1}]$. Auf Grund unserer Betrachtungen im dritten Abschnitt liegt dann η sogar schon in $(\{\pm \xi^{-\mu}\}_\varrho)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ für ein geeignetes ϱ. Nach Hilfssatz 2 liegt $\eta\,\xi^\varrho$ in $\mathfrak{o}$, q. e. d.

Die Aussage des Hilfssatzes ist, daß man ein und damit auch endlich viele Elemente aus $\mathfrak{K}$ durch Multiplikation mit einer genügend hohen Potenz einer gegebenen Nichteinheit in $\mathfrak{o}$ hineinziehen kann.

Zum Beweis der in Satz 1 angegebenen Charakterisierung zeigen wir nun zunächst: Eine als $\mathfrak{z}$-Fastordnung maximale Fastordnung $\mathfrak{o}$ eines Körpers $\mathfrak{K}$ ist eine Vollfastordnung.

Wir führen die Annahme, $\mathfrak{o}$ sei keine Vollfastordnung, zum Widerspruch. Aus dieser Annahme folgt, daß es in $\mathfrak{K}$ ein Element a gibt, so daß weder a noch a^{-1} in $\mathfrak{o}$ liegt. Dann stimmt sowohl $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a]$ als auch $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a^{-1}]$ mit $\mathfrak{K}$ überein.

Wir benutzen zunächst die letzte Beziehung $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a^{-1}] = \mathfrak{K}$. Sie hat zur Folge, daß a in $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a^{-1}]$ liegt, d. h. daß es ein m gibt, so daß $a \in (\{\pm a^{-\mu}\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$. Wir können hieraus mit Hilfe von Folgerung 1 schließen, daß $a^{m+1} \in (\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ und dann ergibt sich aus Folgerung 3, daß $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a] = (\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ ist.

Nun gilt aber nach Voraussetzung, daß auch $\mathfrak{o}_\mathfrak{z}[a] = \mathfrak{K}$ ist, so daß alle Elemente $\eta \in \mathfrak{K}$ in dem endlich-erzeugten Modul $(\{\pm a^\mu\}_m)_{\mathfrak{o},\mathfrak{z}}$ enthalten sind.

Sei jetzt ξ^ϱ die nach Hilfssatz 3 existierende Potenz einer Nichteinheit ξ von $\mathfrak{o}$, für welche $a^\mu \xi^\varrho \in \mathfrak{o}$ für alle μ, $1 \leq \mu \leq m$. Nach Hilfssatz 2 liegt dann $\eta\,\xi^\varrho$ in $\mathfrak{o}$ für alle η aus $\mathfrak{K}$. Es gibt aber Elemente in $\mathfrak{K}$, die nicht durch Multiplikation mit ξ^ϱ in $\mathfrak{o}$ hineingeholt werden können, z. B. $\xi^{-\varrho-1}$. Widerspruch!

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{o}$ eine Vollfastordnung ist. Wir bilden nun (s. auch KRULL [5, S. 165]) die Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe $\mathfrak{K}^\times$ des Körpers nach der Gruppe $\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ der Einheiten von $\mathfrak{o}$ (der Elemente $a \in \mathfrak{o}$, für die auch $a^{-1} \in \mathfrak{o}$). Durch die Festsetzung

$$\alpha \leq \beta = {}_{Df}\, a\, b^{-1} \in \mathfrak{o},$$

wobei a bzw. b ein Repräsentant der Restklasse α bzw. β ist, wird $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ zu einer voll und streng angeordneten Gruppe. Die Abbildung, die einem Element $a \in \mathfrak{K}^\times$ seine Restklasse mod $\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ zuordnet, sei mit $\varphi_\mathfrak{o}$ bezeichnet. Mit Hilfe dieser Abbildung sieht man sofort, daß die Gruppe $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ archimedisch geordnet, also isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen ist. Denn ist $\varphi_\mathfrak{o}(\xi) < 1$ und $\varphi_\mathfrak{o}(\xi') < 1$, sind also ξ und ξ' zwei Nichteinheiten von $\mathfrak{o}$, so gibt es nach dem Hilfssatz 3 eine Potenz ξ^ϱ von ξ, so daß $\varphi_\mathfrak{o}(\xi)^\varrho \leq \varphi_\mathfrak{o}(\xi')$, und ebenso eine Potenz $\xi'^{\varrho'}$ von ξ', so daß $\varphi_\mathfrak{o}(\xi')^{\varrho'} \leq \varphi_\mathfrak{o}(\xi)$.

Faßt man daher die Elemente von $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{E}_\mathfrak{o}$ als reelle Zahlen auf, so hat man durch die Ergänzung $\varphi_\mathfrak{o}(0) = 0$ in $\varphi_\mathfrak{o}$ eine reelle Funktion in $\mathfrak{K}$, die alle Eigenschaften einer Bewertung hat, eventuell mit Ausnahme der Dreiecksungleichung, und deren „Ganzheitsbereich" $\mathfrak{o}$ ist. Um Satz 1 vollständig zu beweisen, brauchen wir nach dem in der Einleitung erwähnten ARTINschen Satz nur noch die Stetigkeit der Addition bei der durch $\varphi_\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{K}$ erklärten Topologie zu zeigen. Nun ist aber die Stetigkeit in jedem Punkte schon

gezeigt, wenn man sie nur im Nullpunkt gezeigt hat, da das System der $\{a + \mathfrak{o}\, x\}_{a,\, x \in \mathfrak{R},\, x \neq 0}$ ein vollständiges Umgebungssystem bei dieser Topologie ist. Die Stetigkeit im Nullpunkt bedeutet, daß es zu einer Umgebung $\mathfrak{o} \cdot x$ der Null eine Umgebung $\mathfrak{o} \cdot y$ gibt, so daß $\mathfrak{o}\, y + \mathfrak{o}\, y \subseteq \mathfrak{o}\, x$. Dies ist aber eine unmittelbare Folge aus der Eigenschaft (F 3) der Fastordnung $\mathfrak{o}$.

5. Beweis des Zusatzes zu Satz 2.

B. H. NEUMANN hat in seiner Arbeit über geordnete Schiefkörper [6] bewiesen, daß es zu einer vorgegebenen voll und streng geordneten Gruppe $\mathfrak{G}$ stets einen Schiefkörper, nämlich einen formalen Potenzreihenschiefkörper, gibt, der eine nichtkommutative Bewertung [8] mit genau der Wertgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt. Auf Grund dieser Tatsache kann man sich zum Beweis des Zusatzes darauf beschränken, ein Beispiel für eine geordnete Gruppe anzugeben, in welcher die Transformierten eines beliebigen Elementes $a > 1$ unbeschränkt sind. Denn dann ist die Menge der Gruppenelemente $a \leqq 1$ eine maximale invariante multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{G}$ und daher auch der Bewertungsring in dem zu $\mathfrak{G}$ konstruierten Potenzreihenschiefkörper eine maximale invariante Ordnung, obwohl die zugehörige Bewertung keine gewöhnliche, sondern eine nichtkommutative Bewertung ist (sogar unendlichen Ranges).

Ein Beispiel für eine solche geordnete Gruppe bekommt man durch Abänderung aus einem Beispiel für eine geordnete Gruppe, das K. IWASAWA [8, S. 8] angegeben hat.

Die Gruppenelemente sind die im Intervall $[0, 1]$ erklärten und stetigen reellen Funktionen $f(x)$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(a) $f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$

(b) Die die Funktion darstellende Kurve ist ein Streckenzug, dessen Strecken alle positive Steigung haben.

(c) Es gibt ein positives λ, so daß $f(x)$ für alle $x \leqq \lambda$ mit x übereinstimmt, aber $f(x) \neq x$ für $\lambda < x < \lambda + \varepsilon$ bei hinreichend kleinem ε. [Dieses λ wollen wir die charakteristische Zahl von $f(x)$ nennen.]

Die Gruppenoperation sei die Einsetzung. Die Ordnung wird folgendermaßen erklärt:

$f(x) > g(x) =_{Df}$ es gibt ein positives $a < 1$, so daß $f(x) = g(x)$ für alle $0 \leqq x \leqq a$, aber für ein geeignetes ε' $f(x) > g(x)$ für $a < x < a + \varepsilon'$.

Es ist aus dieser Erklärung ersichtlich, daß die charakteristische Zahl der Funktion $f(x)$ gerade die Größenordnung angibt und zwei Funktionen nur dann im archimedischen Sinne miteinander vergleichbar sind, wenn sie dieselbe charakteristische Zahl besitzen. Eine „positive" Funktion $f(x)$ ist bezüglich der erklärten Ordnung „unendlich groß" gegenüber einer anderen $g(x)$, falls $\lambda(f) < \lambda(g)$ ist.

Wir zeigen nun, daß die charakteristische Zahl der mit $g(x)$ transformierten Funktion $f(x)$ die reelle Zahl $g(\lambda(f))$ ist. Da man nun $g(x)$ stets so wählen kann, daß bei festem $\lambda(f) = \lambda\, g(\lambda)$ beliebig klein ist, so ist dann bewiesen, daß man ein festes „positives" Gruppenelement durch innere Auto-

morphismen beliebig „hochtransformieren" kann. Wir beweisen also jetzt

$$\lambda(g\,f\,g^{-1}) = g\big(\lambda(f)\big) = g(\lambda).$$

Da $g(x)$ eine im strengen Sinne monotone Funktion ist, die genau die Zahlen des Intervalles $[0, 1]$ annimmt, so gibt es zu jedem x aus diesem Intervall genau ein μ_x, so daß $g(\mu_x) = x$ ist. Dieses μ_x ist für $x \leq g(\lambda)$ kleiner oder gleich λ und für $x > g(\lambda)$ größer als λ. Daraus folgt

$$g\,f\,g^{-1}(x) = g\,f\,g^{-1}\big(g(\mu_x)\big) = g\,f(\mu_x) \begin{cases} = x & \text{für } x \leq g(\lambda) \\ \neq x & \text{für } g(\lambda) < x < g(\lambda) + \varepsilon', \end{cases}$$

und das war die Behauptung.

Literatur.

[1] Artin-Whaples: Axiomatic characterization of fields by the product formula. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 469—492 (1945). — [2] Iwasawa, K.: On linearly ordered groups. J. Math. Soc. Jap. **1**, 1—9 (1949/50). — [3] Kaplansky, I.: Topological methods in valuation theory. Duke Math. J. **14**, 527—541 (1947). — [4] Krull, W.: Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. II. Math. Z. **31**, 527—557 (1930). — [5] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1932). — [6] Neumann, B. H.: On ordered division rings. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 202—252 (1949). — [7] Preuss, G., u. F. K. Schmidt: Über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Math. Nachr. **4**, 348—365 (1950/51). — [8] Schilling, O. F. G.: Noncommutative valuations. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 297—304 (1945).

Münster, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Mai 1952.)

FISCHER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 94—115 (1952)

Über die Zetafunktion des reell-quadratischen Zahlkörpers.

Von
WILHELM FISCHER.

Einleitung.

Im Jahre 1921 haben HARDY und LITTLEWOOD [2a] gezeigt, daß die RIEMANNsche Zetafunktion $\zeta(s)$, die für $\sigma > 1$ durch eine DIRICHLETsche Reihe und für $\sigma < 0$ vermöge der Funktionalgleichung ebenfalls durch eine konvergente Reihe repräsentiert wird, im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ durch die Partialsummen dieser beiden Reihen approximativ darstellbar ist. Diese approximative Funktionalgleichung, für die sie ein Jahr später einen zweiten Beweis mit einer besseren Restgliedabschätzung veröffentlicht haben [2b], lautet:

Für $s = \sigma + i\,t$, $|t| = 2\pi\,x\,y$, $x > K$, $y > K$, $-H < \sigma < H$ gilt gleichmäßig in x und y

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n<y} n^{s-1} + O(x^{-\sigma}) + O(x^{\frac{1}{2}-\sigma}\, y^{-\frac{1}{2}}),$$

wobei

$$\chi(s) = 2\,(2\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi}{2}\, s\, \Gamma(1-s)$$

der in der Funktionalgleichung der RIEMANNschen Zetafunktion auftretende Faktor ist.

Für den Spezialfall $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ findet sich diese Formel bereits in RIEMANNs Nachlaß und wurde 1931 von SIEGEL [6b] veröffentlicht.

Die approximative Funktionalgleichung läßt sich nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinern; HARDY und LITTLEWOOD [2c] haben eine ähnliche Formel für $\zeta^2(s)$ gefunden, SUETUNA [7] für die L-Reihen und ČUDAKOV [1] für die HURWITZsche Zetafunktion.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir statt der RIEMANNschen Zetafunktion die DEDEKINDsche Zetafunktion eines reell-quadratischen Zahlkörpers K und beweisen den folgenden

Satz 1. *Es sei*

$$s = \sigma + i\,t, \quad t^2 = \frac{4\pi^2}{d} X\,Y, \quad X \geq 1, \quad Y \geq 1, \quad c_1 \leq \frac{X}{Y} \leq c_2, \quad -M < \sigma < M,$$

dann gilt für eine beliebige Idealklasse[1]) $\mathfrak{R}$ *aus* K:

$$\zeta(s, \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} N\mathfrak{a}^{-s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^{-1} \\ N\mathfrak{b} < Y}} N\mathfrak{b}^{s-1} + O(X^{\frac{1}{2}-\sigma}).$$

[1]) Vgl. LANDAU [2], § 8.

Dabei ist

$$\psi(s) = 4d^{\frac{1}{2}-s}(2\pi)^{2(s-1)}\sin^2\frac{\pi s}{2}\Gamma^2(1-s)$$

der in der Funktionalgleichung der DEDEKINDschen *Zetafunktion auftretende Faktor,* $d>0$ *die Diskriminante des Körpers. Die Konstante im Fehlerglied hängt nur von* c_1, c_2, M *und dem Körper ab.*

Die HARDY-LITTLEWOODsche Formel und ihre Verallgemeinerungen haben verschiedene Anwendungen gefunden. HARDY und LITTLEWOOD benutzen sie zur Abschätzung der Anzahl der Nullstellen auf der Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$, sowie zur Abschätzung des Mittelwertes $\int_{-T}^{T}|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^4\,dt$. Die schönste Anwendung ist wohl die von ČUDAKOV [*1*] in seiner Arbeit über die GOLDBACHsche Vermutung.

Die erste und dritte der hier genannten Anwendungen sind wegen der arithmetischen Schwierigkeiten nicht ohne weiteres auf den algebraischen Zahlkörper übertragbar; dagegen läßt sich eine Abschätzung des Mittelwertes auf der kritischen Geraden auch für die DEDEKINDsche Zetafunktion gewinnen. Allerdings ist zu beachten, daß im rationalen Fall die Summation der beiden Reihen nur bis $\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ zu erstrecken ist (für $x=y$), im algebraischen dagegen bis $\frac{t\sqrt{d}}{2\pi}$. Dies hat zur Folge, daß wir statt einer Abschätzung von $|\zeta^4(s)|$ nur eine solche von $|\zeta^2(s)|$ gewinnen können.

Der Beweis unseres Satzes 1 folgt im wesentlichen dem der zweiten HARDY-LITTLEWOODschen Arbeit [*2b*], der seinerseits die Methode des ersten RIEMANNschen Beweises für die Funktionalgleichung der Zetafunktion benutzt. Die durch die Übertragung auf einen algebraischen Zahlkörper hinzukommenden Schwierigkeiten lassen sich kurz folgendermaßen charakterisieren:

1. In den Reihen ist nicht über alle Zahlen, sondern nur über solche zu summieren, die als Norm eines Ideals aus $\mathfrak{R}$ darstellbar sind.

2. Die geometrische Reihe im algebraischen Zahlkörper[2]) ist nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar.

3. Statt einfacher Integrale haben wir Doppelintegrale abzuschätzen.

Über die erste dieser Schwierigkeiten kommt man vermöge des Hilfssatzes 1 verhältnismäßig leicht hinweg; die zweite hat SIEGEL [*6a*] in seinem Beweis der Funktionalgleichung für die DEDEKINDsche Zetafunktion überwunden, indem er statt der geometrischen Reihe eine verallgemeinerte LIPSCHITZsche Formel benutzt. Wir haben für unsere Zwecke diese Formel nochmals zu verallgemeinern (Hilfssatz 2); diese verallgemeinerte Formel zwingt uns, statt der Zetafunktion selbst eine Kombination von zwei Zetafunktionen zu betrachten und zunächst für diese Kombination eine approximative Funktionalgleichung herzuleiten (Satz 2). Der Beweis dieses Satzes 2 umfaßt den Hauptteil der vorliegenden Arbeit (§§ 2—5); Satz 1 ergibt sich dann in § 6

[2]) Vgl. HECKE [*3*], S. 102.

verhältnismäßig leicht. In einem letzten Paragraphen geben wir dann als Folgerung aus Satz 1 eine Abschätzung von $\zeta_K(s)$ im kritischen Streifen, sowie eine Abschätzung des Mittelwertes von $|\zeta_K(s)|^2$ auf der kritischen Geraden.

Zur Bezeichnung sei bemerkt, daß C stets eine positive, nur von c_1, c_2, M und dem Körper abhängige Konstante bedeutet. Ferner verwenden wir in Abschätzungen die drei Bezeichnungen:

$$|f(z)| \leq C\, g(|z|)$$

$$f(z) = O\big(g(|z|)\big)$$

$$f(z) \ll g(|z|)$$

als vollkommen gleichbedeutend nebeneinander. Das Zeichen $\alpha \succ 0$ (lies: α totalpositiv) bedeutet: es ist $\alpha > 0$ und $\alpha' > 0$. $\eta > 1$ ist die totalpositive Grundeinheit[3]) des Körpers. Zur Vereinfachung haben wir angenommen, daß die Grundeinheit des Körpers negative Norm hat (also gleich $\sqrt{\eta}$ ist); alle Überlegungen gelten mutatis mutandis auch im anderen Falle[4]).

Für die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Gegenstande möchte ich Herrn RADEMACHER meinen herzlichen Dank aussprechen.

§1. Zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei $f(u)$ eine im Intervall $0 < x_1 \leq u \leq x_2$ positive, monotone und differenzierbare Funktion, $\mathfrak{R}$ eine Idealklasse des Körpers K. Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ x_1 \leq N\mathfrak{a} \leq x_2}} f(N\mathfrak{a}) = A \int_{x_1}^{x_2} f(u)\, du + O\Big(\int_{x_1}^{x_2} u^{-\frac{1}{2}} f(u)\, du + x_1^{\frac{1}{2}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{2}} f(x_2) \Big), \tag{1.1}$$

wobei A eine nur vom Körper abhängige positive Konstante bedeutet.

Beweis. Es bezeichne $g(m, \mathfrak{R})$ die Anzahl der Ideale aus $\mathfrak{R}$ mit der Norm m; dann ist bekanntlich[5]):

$$\sum_{m < x} g(m, \mathfrak{R}) = G(x, \mathfrak{R}) = A\, x + O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{1.2}$$

Wir wenden nun auf die in (1.1) links stehende Summe partielle Summation an und bemerken, daß wir o. B. d. A. x_1 und x_2 als ganz annehmen dürfen, da der eventuell dadurch entstehende Fehler von geringerer Größen-

[3]) Das heißt gleich der Grundeinheit, wenn diese totalpositiv gewählt werden kann, andernfalls gleich deren Quadrat.

[4]) Auch die Beschränkung auf den quadratischen Zahlkörper ist nicht wesentlich, die im folgenden dargelegte Methode läßt sich ohne weiteres auch auf den totalpositiven Körper n-ten Grades übertragen. Man erhält dann eine entsprechende Formel mit dem Restglied $O\big(X^{1-\frac{1}{n}-\sigma}\big)$.

[5]) Siehe z. B. LANDAU [2], Satz 210.

ordnung als das Fehlerglied ist. Somit ergibt sich wegen (1.2)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqq N\mathfrak{a}\leqq x_2}} f(N\mathfrak{a}) &= \sum_{m=x_1}^{x_2} g(m,\mathfrak{R})\, f(m)\\
&= \sum_{m=x_1}^{x_2-1} G(m,\mathfrak{R})\,[f(m)-f(m+1)]\\
&\qquad - G(x_1-1,\mathfrak{R})\, f(x_1) + G(x_2,\mathfrak{R})\, f(x_2)\\
&= -\sum_{m=x_1}^{x_2-1} G(m,\mathfrak{R}) \int_m^{m+1} f'(u)\,du - G(x_1-1,\mathfrak{R})\, f(x_1) + G(x_2,\mathfrak{R})\, f(x_2)\\
&= -\int_{x_1}^{x_2} G(u,\mathfrak{R})\, f'(u)\,du - A\,(x_1-1)\, f(x_1) + A\,x_2 f(x_2) +\\
&\qquad + O\left(x_1^{\frac{1}{2}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{2}} f(x_2)\right)\\
&= -A\int_{x_1}^{x_2} u\, f'(u)\,du - A\,x_1 f(x_1) + A\,x_2 f(x_2) +\\
&\qquad + O\left(\int_{x_1}^{x_2} u^{\frac{1}{2}} f'(u)\,du + x_1^{\frac{1}{2}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{2}} f(x_2)\right),
\end{aligned}$$

woraus durch partielle Integration (1.1) folgt.

Hilfssatz 2. *Es seien w_1 und w_2 zwei positive Variablen, $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{a}'$ das zu $\mathfrak{a}$ konjugierte Ideal*[6]*). Dann gilt für jedes $X\geq 0$:*

$$(1.3)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{a}\,|\,\mu>0\\ N\mu>X}} (N\mu - X)\, e^{-2\pi(\mu w_1+\mu' w_2)}\\ \displaystyle = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}} \sum_{\mathfrak{a}'\,|\,\lambda} \iint\limits_{\substack{x_1>0\, x_2>0\\ x_1\cdot x_2>X}} (x_1x_2 - X)\, e^{-2\pi(x_1w_1+x_2w_2)}\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\, dx_1\, dx_2. \end{cases}$$

Zum Beweis betrachten wir die Funktion

$$(1.4)\quad \begin{cases} f(x_1,x_2) = [(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_1'x_1+\alpha_2'x_2) - X]^z\, e^{-2\pi[(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)w_1+(\alpha_1'x_1+\alpha_2'x_2)w_2]} \\ \qquad\qquad \text{wenn:} \begin{cases} \alpha_1x_1+\alpha_2x_2>0\\ \alpha_1'x_1+\alpha_2'x_2>0\\ (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_1'x_1+\alpha_2'x_2)>X \end{cases} \\ f(x_1,x_2)=0 \quad \text{sonst}. \end{cases}$$

Dabei ist α_1, α_2 eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ und z ein (zunächst reeller) Parameter.

Diese Funktion $f(x_1, x_2)$ ist für $z>2$ zweimal stetig differenzierbar und nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung absolut ins Unendliche integrierbar. Folglich dürfen wir auf $f(x_1, x_2)$ die Poissonsche Summenformel[7]) anwenden:

$$(1.5)\qquad \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} f(m_1,m_2) = \sum_{l_1,l_2=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(l_1x_1+l_2x_2)} f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

[6]) Das heißt das Ideal, das aus allen Konjugierten der Zahlen aus $\mathfrak{a}$ besteht. Für die spätere Anwendung sei angemerkt, daß $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{R}^{-1}$.

[7]) Hecke [3], S. 110 oder Mordell [5], S. 412f.

und aus der allgemeinen Theorie folgt, daß die rechtsstehende Summe absolut konvergiert.

Auf das Integral (1.5) wenden wir die folgende Variabelntransformation an:

$$\xi_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad x_1 = \frac{1}{\Delta}(\alpha_2' \xi_1 - \alpha_2 \xi_2)$$

$$\xi_2 = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta}(-\alpha_1' \xi_1 + \alpha_1 \xi_2)$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{vmatrix} = \pm N\mathfrak{a}\sqrt{d}.$$

Da in (1.5) beide Reihen absolut konvergieren, dürfen wir diese beliebig umordnen. Setzen wir .

$$\mu = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 \qquad \lambda = l_1 \alpha_2' - l_2 \alpha_1',$$

so läuft die Summe auf der linken Seite über alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$, auf Grund der Definition von $f(x_1, x_2)$ sind aber nur die Glieder mit $\mu > 0$ und $N\mu > X$ von Null verschieden; die Summe rechts ist über alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}'$ erstreckt. Beachtet man schließlich noch, daß:

$$e^{2\pi i(l_1 x_1 + l_2 x_2)} = e^{2\pi i(\lambda \xi_1 - \lambda' \xi_2)},$$

so erhalten wir aus (1.5):

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{a}|\mu>0 \\ N\mu>X}} f(\mu) = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}} \sum_{\mathfrak{a}'|\lambda} \iint\limits_{\substack{\xi_1>0\,\xi_2>0 \\ \xi_1\xi_2>X}} (\xi_1\xi_2 - X)^s \times \\ \\ \times\, e^{-2\pi(\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2)}\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}}(\lambda\xi_1 - \lambda'\xi_2)}\, d\xi_1\, d\xi_2. \end{array} \right.$$

Hier sind nun die Reihen auf beiden Seiten in jedem Streifen $G \geq \Re(z) \geq g > 0$ gleichmäßig in z konvergent und stellen folglich eine in diesem Bereich analytische Funktion dar. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung gilt die zunächst nur für $z > 2$ bewiesene Gl. (1.6) also für alle z mit $\Re(z) > 0$, insbesondere auch für $z = 1$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

§ 2. Vorbereitende Umformungen.

In Hilfssatz 2 waren wir aus Stetigkeitsgründen gezwungen, das Exponentialglied der Summe mit einem Faktor $(N\mu - X)$ zu versehen; das hat zur Folge, daß diese Transformationsformel nicht unmittelbar auf $\zeta(s, \mathfrak{K})$ angewandt werden kann, sondern nur auf eine Kombination von zwei Zetafunktionen, die eben diesen Faktor enthält. Als Vorstufe zu Satz 1 beweisen wir daher zunächst den folgenden

Satz 2. *Es sei*

$$F(X,Y,s)=\zeta(s,\mathfrak{R})-\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} N\mathfrak{a}^{-s}-\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-1}, \tag{2.1}$$

dann gilt unter den in Satz 1 aufgeführten Bedingungen:

$$F(X,Y,s-1)-XF(X,Y,s)=O(X^{1-\sigma}).$$

Zum Beweise setzen wir

$$\Phi(s)=\zeta(s-1,\mathfrak{R})-X\zeta(s,\mathfrak{R})-\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} N\mathfrak{a}^{1-s}+X\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} N\mathfrak{a}^{-s}. \tag{2.2}$$

$\Phi(s)$ ist eine in der ganzen s-Ebene analytische Funktion mit je einem einfachen Pol in $s=1$ und $s=2$. Es sei $\mathfrak{c}$ ein beliebiges, aber im folgenden festgehaltenes Ideal aus der zu $\mathfrak{R}$ inversen Klasse $\mathfrak{R}^{-1}$ und zunächst $s>2$; dann ist:

$$\Phi(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}>X}}\frac{N\mathfrak{a}-X}{N\mathfrak{a}^s}=N\mathfrak{c}^{s-1}\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|(\mu)>0\\ N\mu>XN\mathfrak{c}}}\frac{N\mu-XN\mathfrak{c}}{N\mu^s}$$

$$=\frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)}\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|(\mu)>0\\ N\mu>XN\mathfrak{c}}}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}(N\mu-XN\mathfrak{c})\,e^{-2\pi(\mu z_1+\mu' z_2)}\,dz_1\,dz_2.$$

Dieser Ausdruck wird durch die Substitution

$$z_1=\eta^w y \qquad z_2=\eta^{-w}y \tag{2.3}$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(w,y)}=2y\log\eta$$

übergeführt in

$$\Phi(s)=\frac{2\log\eta\,N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)}\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|(\mu)>0\\ N\mu>XN\mathfrak{c}}}\int_{-\infty}^{\infty}dw\int_0^\infty y^{2s-1}(N\mu-XN\mathfrak{c})\,e^{-2\pi y(\mu\eta^w+\mu'\eta^{-w})}\,dy$$

$$=\frac{2\log\eta\,N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)}\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|(\mu)>0\\ N\mu>XN\mathfrak{c}}}\int_{-\frac12}^{\frac12}dw\int_0^\infty y^{2s-1}(N\mu-XN\mathfrak{c})\,e^{-2\pi y(\mu\eta^w+\mu'\eta^{-w})}\,dy.$$

Da hier alles positiv ist, dürfen wir Summation und Integration vertauschen; auf die dann unter dem Integral stehende Summe wenden wir Hilfssatz 2 an und erhalten:

$$\left\{\begin{aligned}\Phi(s)=\frac{2\log\eta\,N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s}}{\sqrt{d}\,\Gamma^2(s)}\int_{-\frac12}^{\frac12}dw\int_0^\infty y^{2s-1}\,dy\sum_{\mathfrak{c}'|\lambda}\iint_{\substack{x_1>0\\ x_1x_2>XN\mathfrak{c}}}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \times e^{-2\pi y(x_1\eta^w+x_2\eta^{-w})}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2.\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

In dem Glied mit $\lambda = 0$

$$\Phi_0(s) = \frac{2\log\eta\, N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s}}{\sqrt{d}\,\Gamma^2(s)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dw \int_0^\infty y^{2s-1} dy \int_{x_1=0}^\infty \int_{x_2=\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}}^\infty (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c}) \times$$
$$\times e^{-2\pi y(x_1\eta^w + x_2\eta^{-w})}\, dx_1\, dx_2$$

können wir die Integration ausführen; wir substituieren

$$u = x_1 y, \quad v = x_1 x_2, \quad w = w, \quad z = x_2 y;$$

die Funktionaldeterminante dieser Substitution ist:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, w, y)}{\partial(u, v, w, z)} = \frac{1}{2vy},$$

und wir erhalten:

$$\Phi_0(s) = \frac{\log\eta\, N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s}}{\sqrt{d}\,\Gamma^2(s)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dw \int_{XN\mathfrak{c}}^\infty v^{-s}(v - XN\mathfrak{c})\, dv \int_0^\infty u^{s-1} e^{-2\pi\eta^w u}\, du \int_0^\infty z^{s-1} e^{-2\pi\eta^{-w} z}\, dz$$
$$= \frac{\log\eta}{\sqrt{d}}\, N\mathfrak{c}^{s-2} \int_{XN\mathfrak{c}}^\infty v^{-s}(v - XN\mathfrak{c})\, dv = \frac{\log\eta}{\sqrt{d}}\, N\mathfrak{c}^{s-2} \left\{ \frac{X^{2-s} N\mathfrak{c}^{2-s}}{s-2} - \frac{X^{2-s} N\mathfrak{c}^{2-s}}{s-1} \right\}$$

$$\Phi_0(s) = \frac{\log\eta}{\sqrt{d}} \frac{X^{2-s}}{(s-1)(s-2)}. \tag{2.5}$$

Ferner dürfen wir in (2.4) das Summenzeichen vor die Integrale ziehen, da sowohl die Summe als auch das Integral über y absolut konvergieren. Wenden wir außerdem die zu (2.3) inverse Substitution an, so ergibt sich[8]:

$$\begin{cases} \Phi(s) - \Phi_0(s) \\ \quad = \dfrac{(2\pi)^{2s} N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}\,\Gamma^2(s)} \sum_{\mathfrak{c}'\,(\lambda)}{}' \int_0^\infty \int_0^\infty z^{s-1} z_2^{s-1}\, dz_1\, dz_2 \int_{x_1=0}^\infty \int_{x_2=\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}}^\infty (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c}) \times \\ \quad \times e^{-2\pi(z_1 x_1 + z_2 x_2)} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)}\, dx_1\, dx_2. \end{cases} \tag{2.6}$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich der Wert der Integrale in (2.6) nicht ändert, wenn wir die Integrationen über x_1 und x_2 längs Wegen $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ ausführen, die wie folgt definiert sind:

Wenn $\lambda \neq 0$ so sei $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ die positiv imaginäre Achse, und $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ der von $\frac{XN\mathfrak{c}}{x_1}$ längs der negativ imaginären Achse nach ∞ gehende Strahl.

Wenn $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$ so läuft $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ vom Nullpunkt durch den 4. Quadranten (z. B. auf einem Kreisbogen) zum Punkte $\sqrt{\left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right|}\, XN\mathfrak{c}$ und von dort parallel der positiv imaginären Achse nach ∞.

Wenn $\lambda \neq 0$ bzw. $\lambda < 0$, $\lambda' > 0$ ist, so bedeuten $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ die Kurven, die man aus den eben beschriebenen durch Spiegelung an der reellen Achse erhält.

[8]) Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß das Glied mit $\lambda = 0$ auszulassen ist.

Durch diese Verlegung der Integrationswege werden die Integrale über x gleichmäßig in z konvergent; wir dürfen daher die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und erhalten:

$$\Phi(s)-\Phi_0(s)=\frac{(2\pi)^{2s}\,N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}\,\Gamma^2(s)}\sum_{\mathfrak{c}'|(\lambda)}{}'\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times$$
$$\times\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}e^{-2\pi(z_1x_1+z_2x_2)}\,dz_1\,dz_2.$$

Nach Ausführung der Integrationen über z ergibt das:

$$(2.7)\qquad\begin{cases}\Phi(s)-\Phi_0(s)=\dfrac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}}\displaystyle\sum_{\mathfrak{c}'|(\lambda)}{}'\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \qquad\times\, x_1^{-s}x_2^{-s}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2.\end{cases}$$

In dieser Gleichung, die zunächst nur für $s>2$ abgeleitet ist, ist die linke Seite eine in der ganzen (endlichen) s-Ebene analytische (sogar reguläre) Funktion; die Reihe auf der rechten Seite läßt sich für $|s|\leq S$ gleichmäßig durch $\sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{2}}$ majorisieren[9]) und stellt somit ebenfalls eine für alle s reguläre analytische Funktion dar. Auf Grund des Identitätssatzes für analytische Funktionen gilt also (2.7) in der ganzen s-Ebene.

Der weitere Gang des Beweises von Satz 2 ist nun folgender: Wir zeigen zunächst, daß sich aus der rechten Seite von (2.7) die in Satz 2 vorkommenden Glieder herleiten lassen, die in $\Phi(s)$ nicht explizit auftreten. Dazu sind offensichtlich die Glieder der Summe mit $|N\lambda|\geq YN\mathfrak{c}$ nicht brauchbar und gesondert abzuschätzen. Wir setzen daher:

$$(2.8)\qquad\begin{cases}R_1(s)=\dfrac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}}\displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)\\ |N\lambda|\geq YN\mathfrak{c}}}\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \qquad\times\, x_1^{-s}x_2^{-s}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2\end{cases}$$

und haben:

$$(2.9)\qquad\begin{cases}\Phi(s)=\dfrac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}}\displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)\\ |N\lambda|<YN\mathfrak{c}}}\int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)}\int_{\mathfrak{C}_2(\lambda)}(x_1x_2-XN\mathfrak{c})\times\\ \qquad\times\, x_1^{-s}x_2^{-s}\,e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1-\lambda' x_2)}\,dx_1\,dx_2+R_1(s)+\Phi_0(s).\end{cases}$$

[9]) Für den Beweis sei auf § 4 verwiesen; die behauptete Majorante kann aus (4.4) direkt abgelesen werden.

§ 3. Herleitung des Hauptgliedes.

Wir fügen in den Integralen in (2.9) zu $\mathfrak{C}_2(\lambda)$ das Stück von 0 bis $\frac{X N \mathfrak{c}}{x_1}$ zu, d.h. wir setzen

$$(3.1)\quad \left\{ \Phi(s) = \frac{N \mathfrak{c}^{s-1}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}' \mid (\lambda) \\ |N\lambda| < X N \mathfrak{c}}}{}' \int_0^{\pm i\infty} \int_0^{\pm i\infty} (x_1 x_2 - X N \mathfrak{c})\, x_1^{-s} x_2^{-s} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)} \times \right.$$
$$\left. \times\, d x_1\, d x_2 + R_1(s) - R_2(s) + \Phi_0(s), \right.$$

wobei

$$(3.2)\quad R_2(s) = \frac{N \mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}' \mid (\lambda) \\ |N\lambda| < Y N \mathfrak{c}}} \int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)} \int_0^{\frac{X N \mathfrak{c}}{x_1}} (x_1 x_2 - X N \mathfrak{c})\, x_1^{-s} x_2^{-s} e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)} d x_1\, d x_2.$$

Die Integrale in (3.1) und (3.2) sind als verallgemeinerte Integrale aufzufassen[10], d.h. wenn $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist, so ist:

$$(3.3)\quad \int_0 z^{-s} f(z)\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\varepsilon z^{-s} f(z)\, dz + \sum_{q=0}^{[\sigma]-1} a_q \frac{\varepsilon^{q+1-s}}{q+1-s} \right\},$$

wobei die für $\sigma < 1$ leere Summe natürlich Null zu setzen ist, und für ganzes s das letzte Glied durch $a_{s-1} \log \varepsilon$ zu ersetzen ist[11]. Insbesondere wird auf Grund dieser verallgemeinerten Integraldefinition das EULERsche Integral für alle $s = 0, -1, -2, \ldots$ sinnvoll und, wie man sich durch partielle Integration leicht überzeugt, gilt für alle s:

$$(3.4)\quad \int_0^{\infty} e^{-z} z^{s-1}\, dz = \Gamma(s).$$

Vermöge (3.4) lassen sich die Integrationen in (3.1) leicht ausführen; wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\Phi(s) - R_1(s) + R_2(s) - \Phi_0(s) \\
&= \frac{N \mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}' \mid (\lambda) > 0 \\ N\lambda < Y N \mathfrak{c}}} N \lambda^{s-1} \left\{ N \lambda^{-1} [e^{-\pi i s} + 2 + e^{\pi i s}] \left(\frac{2\pi}{N \mathfrak{c} \sqrt{d}} \right)^{2(s-2)} \Gamma^2(2-s) - \right. \\
&\quad \left. - X N \mathfrak{c}\, [e^{-\pi i (s-1)} + 2 + e^{\pi i (s-1)}] \left(\frac{2\pi}{N \mathfrak{c} \sqrt{d}} \right)^{2(s-1)} \Gamma^2(1-s) \right\} \\
&= \frac{4 (2\pi)^{2(s-2)}}{\sqrt{d}^{2s-3}} \sin^2 \frac{\pi}{2} (s-1)\, \Gamma^2(2-s)\, N \mathfrak{c}^{2-s} \sum_{\substack{\mathfrak{c}' \mid (\lambda) > 0 \\ N\lambda < Y N \mathfrak{c}}} N \lambda^{s-2} - \\
&\quad - \frac{4 (2\pi)^{2(s-1)}}{\sqrt{d}^{2s-1}} \sin^2 \frac{\pi s}{2}\, \Gamma^2(1-s)\, X N \mathfrak{c}^{1-s} \sum_{\substack{\mathfrak{c}' \mid (\lambda) > 0 \\ N\lambda < Y N \mathfrak{c}}} N \lambda^{s-1}
\end{aligned}$$

[10] Vgl. [2b], S. 42.

[11] Man überzeugt sich leicht (vgl. auch § 5), daß die Zusatzglieder für die Integrale in (3.1) und für die in (3.2) für jedes $\varepsilon > 0$ den gleichen Wert haben; der Wert der linken Seite von (3.1) wird durch die neue Integraldefinition also nicht geändert.

oder, da $\mathfrak{c}'$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist:

$$(3.5)\quad \Phi(s) = \psi(s-1) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-2} - X\psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-1} + R_1(s) - R_2(s) + \Phi_0(s).$$

Vergleicht man dies mit den Definitionen (2.1) und (2.2), so sieht man, daß (3.5) gleichbedeutend ist mit:

$$(3.6)\qquad F(X, Y, s-1) - XF(X, Y, s) = R_1(s) - R_2(s) + \Phi_0(s).$$

Da ferner nach (2.5)

$$(3.7)\qquad \Phi_0(s) = O(t^{-2} X^{2-\sigma}) = O(X^{1-\sigma}),$$

so ist Satz 2 bewiesen, wenn wir zeigen können, daß $R_1(s)$ und $R_2(s)$ ebenfalls von dieser Größenordnung sind.

§ 4. Abschätzung des ersten Restgliedes.

Da die linke Seite von (3.6) für konjugierte Werte von s den gleichen Betrag hat, genügt es, die Abschätzung für eine Halbebene durchzuführen. In §§ 4 und 5 ist daher stets t positiv, d.h. also $t \geq \frac{2\pi}{\sqrt{d}}$ angenommen. Ferner begnügen wir uns damit den Teil der Summe abzuschätzen, der von den Gliedern mit $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$ herrührt. Die Abschätzung der übrigen Glieder verläuft ganz analog, an einigen Stellen sogar wesentlich einfacher.

Wir betrachten daher statt $R_1(s)$ den Ausdruck:

$$T(s) = \frac{N\mathfrak{c}^{s-2}}{\sqrt{d}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda),\ \lambda>0,\ \lambda'<0\\ |N\lambda|\geq Y N\mathfrak{c}}} \int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)} \int_{\mathfrak{C}_1(\lambda)} (x_1 x_2 - XN\mathfrak{c})\, x_1^{-s} x_2^{-s}\, e^{\frac{2\pi i}{N\mathfrak{c}\sqrt{d}}(\lambda x_1 - \lambda' x_2)}\, dx_1\, dx_2.$$

Durch die Substitution

$$(4.1)\qquad x_1 = \sqrt{\left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right| N\mathfrak{c}\, d}\, z_1 \qquad x_2 = \sqrt{\left|\frac{\lambda}{\lambda'}\right| N\mathfrak{c}\, d}\, z_2$$

ergibt sich daraus

$$(4.2)\quad \begin{cases} T(s) = d^{\frac{1}{2}-s} \sum\limits_{\substack{\mathfrak{c}'|(\lambda)\\ |N\lambda|\geq Y N\mathfrak{c}}} \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \int\limits_{\mathfrak{C}_2} z_1^{-s} z_2^{-s} \left(z_1 z_2 - \frac{X}{d}\right) e^{2\pi i \sqrt{\frac{|N\lambda|}{N\mathfrak{c}}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2 \\ \quad = d^{\frac{1}{2}-s} \sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}\geq Y}} \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \int\limits_{\mathfrak{C}_2} z_1^{-s} z_2^{-s} \left(z_1 z_2 - \frac{X}{d}\right) e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2. \end{cases}$$

Gemäß unseren Festsetzungen in § 2 läuft dabei $\mathfrak{C}_1$ vom Nullpunkt längs eines Kreisbogens zum Punkte $\sqrt{X/d}$ und von dort parallel der positiv imaginären Achse nach ∞, während $\mathfrak{C}_2$ vom Punkte $\frac{X}{d\, z_1}$ ausgehend ebenfalls parallel der positiv imaginären Achse nach ∞ läuft. Wir substituieren nun

$$(4.3)\qquad z_1 = v\, u, \qquad z_2 = \frac{v}{u}, \qquad \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u, v)} = 2\,\frac{v}{u}.$$

Der dabei in der v-Ebene entstehende Weg $\mathfrak{C}'$ hat qualitativ denselben Verlauf wie $\mathfrak{C}_1$, der in der u-Ebene entstehende Weg kann so abgeändert werden, daß er vom Punkte $\sqrt{X/d}$ aus parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten nach ∞ geht. Wir erhalten also:

$$T(s) = 2d^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^{-1} \\ N\mathfrak{b} \geqq Y}} \int_{\mathfrak{C}'} \int_{\sqrt{\frac{X}{d}}}^{e^{\frac{\pi i}{4}}\infty} \left(v^2 - \frac{X}{d}\right) v^{1-2s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}\left(u+\frac{1}{u}\right)v} \frac{du}{u}\, dv.$$

Nun deformieren wir den Weg $\mathfrak{C}'$ so, daß bei Anwendung der Substitution

$$u + \frac{1}{u} = 2 + iy, \qquad \frac{du}{u} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 4iy}}$$

y reell wird. Setzen wir außerdem

$$v = \sqrt{\frac{X}{d}} + e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{d}}\, r = \sqrt{\frac{X}{d}} + \frac{r}{\sqrt{d}} + i\frac{r}{\sqrt{d}}, \qquad dv = \frac{1+i}{\sqrt{d}}\, dr,$$

so erhalten wir:

$$T(s) = \frac{8(1+i)}{\sqrt{d}} \sum_{N\mathfrak{b} \geqq Y} \int_0^\infty e^{-2\pi y \sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{d}}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 4iy}} \int_0^\infty (\sqrt{X}\, r + i\sqrt{X}\, r + ir^2) \times$$
$$\times \left(\sqrt{X} + r + ir\right)^{1-2s} e^{-2\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r(2+y)} e^{2\pi i \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}}(2r + 2\sqrt{X} - yr)} dr.$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} |T(s)| \leq C\, X^{1-\sigma} \sum_{N\mathfrak{b} \geqq Y} \int_0^\infty e^{-2\pi y \sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{d}}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \int_0^\infty r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2+2M} \times \\ \qquad \times e^{2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}+r}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} dr. \end{cases}$$

Das erste Integral läßt sich explizit ausrechnen:

$$(4.5) \qquad \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi \sqrt{\frac{xN\mathfrak{b}}{d}} y} dy = \frac{d^{\frac{1}{4}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}\, X^{\frac{1}{4}} N\mathfrak{b}^{\frac{1}{4}}} = C\, X^{-\frac{1}{4}} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}};$$

für das zweite beachten wir, daß für $r \geqq 0$:

$$(4.6) \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}+r} \leq \frac{r}{\sqrt{X}+r} = \frac{r}{\sqrt{X}} - \frac{r^2}{(\sqrt{X}+r)\sqrt{X}} \leq \frac{r}{\sqrt{X}}$$

und daher für $N\mathfrak{b} \geqq 4Y$:

$$\int_0^\infty \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}+r}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} r\, dr$$
$$\leq \int_0^\infty r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{\frac{4\pi}{\sqrt{d}}(\sqrt{Y} - \sqrt{N\mathfrak{b}})r} dr$$
$$= (\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y})^{-2} \int_0^\infty r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}\,(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y})}\right)^{2(M+1)} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} r} \leq C\,(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y})^{-2}.$$

Bezeichnen wir den Beitrag der Glieder mit $N\mathfrak{b} \geq 4Y$ mit $T_1(s)$, so haben wir

$$|T_1(s)| \leq C X^{\frac{3}{4}-\sigma} \sum_{N\mathfrak{b} \geq 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y}\right)^{-2}$$

und nach Hilfssatz 1:

$$\sum_{N\mathfrak{b} \geq 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{N\mathfrak{b}} - \sqrt{Y}\right)^{-2} \ll \int_{4Y}^{\infty} u^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{u} - \sqrt{Y}\right)^{-2} du$$

$$= Y^{-\frac{1}{4}} \int_{4}^{\infty} v^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{v} - 1\right)^{-2} dv = O\left(Y^{-\frac{1}{4}}\right)$$

folglich:

$$T_1(s) = O\left(X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{-\frac{1}{4}}\right) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{4.7}$$

Den Beitrag der Glieder mit $Y \leq N\mathfrak{b} < 4Y$ bezeichnen wir mit $T_2(s)$ und haben wegen (4.5):

$$|T_2(s)| \leq C X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\infty} r \left(1 + \frac{r}{\sqrt{x}}\right)^{2(M+1)} e^{2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{x}+r}} \sum_{Y \leq N\mathfrak{b} < 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} dr.$$

Die Summe hier wird wieder nach Hilfssatz 1 ausgewertet:

$$\sum_{Y \leq N\mathfrak{b} < 4Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{-4\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}}{d}} r} \ll \int_{Y}^{4Y} u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{4\pi r}{\sqrt{d}} \sqrt{u}} du + Y^{\frac{1}{12}} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \sqrt{Y} r}$$

$$= 2 \cdot \int_{\sqrt{Y}}^{2\sqrt{Y}} v^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{4\pi r}{\sqrt{d}} v} dv + Y^{\frac{1}{12}} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \sqrt{Y} r}$$

$$\ll Y^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \sqrt{Y} r} \left(\frac{1}{r} + 1\right).$$

Für den arc tg verwenden wir jetzt die schärfere Abschätzung in (4.6). Dann bleibt:

$$T_2(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \int_0^{\infty} (1+r) \left(1 + \frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{d}} \frac{\sqrt{Y} r^2}{\sqrt{X}+r}} dr$$

$$\ll X^{1-\sigma} \int_0^{\infty} (1+r)^{2M+3} e^{-C \frac{r^2}{1+r}} dr$$

$$T_2(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{4.8}$$

Aus (4.7) und (4.8) folgt:

$$T(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right)$$

und auf Grund unserer Bemerkung zu Anfang dieses Paragraphen:

$$R_1(s) = O\left(X^{1-\sigma}\right). \tag{4.9}$$

§ 5. Abschätzung des zweiten Restgliedes.

Wir betrachten auch hier nur die Glieder mit $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$, wenden auf die Integrale in (3.2) die Substitution (4.1) an und zerlegen das innere Integral in zwei Teile, indem wir zunächst von 0 nach $-i\frac{X}{2dz_1}$ und dann von $-i\frac{X}{2dz_1}$ nach $\frac{X}{dz_1}$ integrieren.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(5.1)\qquad U(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} \int_{\mathfrak{C}_1} \int_0^{-i\frac{X}{2dz_1}} z_1^{-s} z_2^{-s} e^{2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2 = \sum_{N\mathfrak{b}<Y} I_{\mathfrak{b}}(s)$$

und

$$(5.2)\qquad V(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ N\mathfrak{b}<Y}} \int_{\mathfrak{C}_1} \int_{-i\frac{X}{2dz_1}}^{\frac{X}{dz_1}} z_1^{-s} z_2^{-s}\left(z_1 z_2 - \frac{X}{d}\right) e^{2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}}(z_1+z_2)}\, dz_1\, dz_2,$$

so ist

$$(5.3)\qquad R_2(s) = d^{\frac{1}{2}-s}\, U(s-1) - X\, d^{-\frac{1}{2}-s}\, U(s) + d^{\frac{1}{2}-s}\, V(s) + \cdots,$$

wobei die Punkte andeuten, daß noch analoge Ausdrücke folgen, die von den hier nicht berücksichtigten λ herrühren; die Abschätzung dieser Glieder verläuft analog zu der im folgenden durchgeführten Abschätzung von $U(s)$ und $V(s)$ und ergibt dieselbe Größenordnung.

Zur Abschätzung der Integrale $I_{\mathfrak{b}}(s)$ zerlegt man diese in drei Teile und erhält nach entsprechender Deformation der Integrationswege

$$(5.4)\qquad I_{\mathfrak{b}}(s) = \int_{\mathfrak{C}_1} \int_0^{-i\frac{X}{2dz_1}} = \int_{z_1=0}^{-i\sqrt{\frac{X}{2d}}} \int_{z_2=0}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} + \int_{\mathfrak{L}_1}\int_{\mathfrak{L}_2} + \int_{z_1=0}^{-i\sqrt{\frac{X}{2d}}} \int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{-i\frac{X}{2dz_1}} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Dabei läuft in I_2 der Weg $\mathfrak{L}_1$ längs einer Geraden von $-i\sqrt{\frac{X}{2d}}$ nach $\sqrt{\frac{X}{2d}}$ und von dort parallel der positiv imaginären Achse nach ∞; $\mathfrak{L}_2$ läuft vom Nullpunkt längs eines kleinen Halbkreises durch den ersten Quadranten, schneidet die reelle Achse und geht dann geradlinig zum Punkte $-i\frac{X}{2dz_1}$. Die übrigen Integrationen in (5.4) sind geradlinig zwischen den angegebenen Grenzen auszuführen. Für $\sigma \geqq 1$ sind die Integrale als verallgemeinerte Integrale aufzufassen. Nach (3.3) ist also

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-i\varepsilon}^{-i\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_1^{-s} e^{2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}}z_1}\, dz_1 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!}\,\frac{(-i\varepsilon)^{k+1-s}}{s-1-k}\right\} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_2^{-s} e^{2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}}z_2}\, dz_2 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi i\sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!}\,\frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-1-k}\right\} = I_{11}\cdot I_{12}.$$

Die Abschätzung dieser beiden Integrale bereitet keine Schwierigkeiten; es ist

$$I_{11} = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_1^{-s} e^{2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}}\, z_1} d z_1 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!} \frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-1-k} \right\}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!} \frac{\sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-s+m}}{1-s+m} - \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=[\sigma]}^{\infty} \frac{(2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!} \frac{\varepsilon^{1-s+m}}{1-s+m} \right\}.$$

Da die zweite Summe nach dem Grenzübergang verschwindet, bleibt

$$|I_{11}| \leq e^{-\frac{\pi}{2} t} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|1-s+m|} \frac{\left(2\pi \sqrt{\frac{XY}{2d}}\right)^m}{m!} \leq C\, X^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}.$$

Ebenso ergibt sich

$$|I_{12}| \leq \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|1-s+m|} \frac{\left(2\pi \sqrt{\frac{XY}{2d}}\right)^m}{m!} \leq C\, X^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} t}$$

und daher

$$I_1 = I_{11} \cdot I_{12} = O\left(X^{1-\sigma} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)t}\right) = O(e^{-Ct}). \tag{5.41}$$

In dem zweiten Summanden von (5.4) ist nur das innere Integral verallgemeinert:

$$\left\{ \begin{aligned} I_2 = & \int_{z_1=-i\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{i\infty} z_1^{-s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}\, z_1} d z_1 \times \\ & \times \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{-i\frac{X}{2dz_1}} z_2^{-s} e^{2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}\, z_2} d z_2 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k} \frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-k-1} \right\} \\ = & e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \int_{e^{-\pi i}\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\infty} z_1^{-s} e^{-2\pi \sqrt{N\mathfrak{b}}\, z_1} J_2(z_1)\, d z_1 \end{aligned} \right. \tag{5.42}$$

mit

$$J_2(z_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{e^{\pi i}\varepsilon}^{\frac{X}{2dz_1}} z_2^{-s} e^{-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}}\, z_2} d z_2 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1} \frac{(-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^k}{k!} \frac{(e^{\pi i}\varepsilon)^{k+1-s}}{s-k-1} \right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!\,(m-s+1)} \left(\frac{X}{2dz_1}\right)^{m-s+1}$$

In (5.42) eingesetzt ergibt sich das

$$I_2 = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-s} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{1-s} \int_{e^{-\pi i}}^{\infty} e^{-2\pi \sqrt{\frac{N\mathfrak{b}X}{2d}} z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i \sqrt{N\mathfrak{b}})^m}{m!\,(m-s+1)} \sqrt{\frac{X}{2d}}^{m} \frac{dz}{z^{m+1}}.$$

Nun deformieren wir nochmals den Integrationsweg; wir integrieren zunächst längs eines Halbkreises von $e^{-\pi i}$ nach 1 und dann von 1 längs der positiv reellen Achse nach ∞:

$$|I_2| \leq C e^{-\frac{\pi}{2}t} X^{1-\sigma}\left\{\int_1^\infty e^{-2\pi\sqrt{\frac{NbX}{2d}}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z}+\int_0^\pi e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{2d}}(\cos\varphi-1)}d\varphi\right\}$$

$$\leq C e^{-\frac{\pi}{2}t} X^{1-\sigma}\left\{\int_0^\infty e^{-Cr}\frac{dr}{\sqrt{r^2+4}}+\int_0^\pi e^{\frac{t}{\sqrt{2}}(1-\cos\varphi)}d\varphi\right\}.$$

$$I_2 = O\left(X^{1-\sigma}e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}\right) = O\left(e^{-Ct}\right). \tag{5.43}$$

Im dritten Summanden von (5.4) vertauschen wir die Reihenfolge der Integrationen:

$$\left\{\begin{aligned} I_3 &= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}\int_{z_1=0}^{\sqrt{\frac{X}{2d}}} z_1^{-s}\, e^{2\pi\sqrt{Nb}\,z_1}\int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\frac{X}{2dz_1}} z_2^{-s}\, e^{2\pi i\sqrt{Nb}\,z_2}\,dz_1\,dz_2 \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}\int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\infty} z_2^{-s}\, e^{2\pi i\sqrt{Nb}\,z_2}\int_{z_1=0}^{\frac{X}{2dz_2}} z_1^{-s}\, e^{2\pi\sqrt{Nb}\,z_1}\,dz_1\,dz_2 \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}\int_{z_2=\sqrt{\frac{X}{2d}}}^{\infty} z_2^{-s}\, e^{2\pi i\sqrt{Nb}\,z_2}\,J_3(z_2)\,dz_2 \end{aligned}\right. \tag{5.44}$$

mit

$$J_3(z_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^{\frac{X}{2dz_2}} z_1^{-s}\, e^{2\pi\sqrt{Nb}\,z_1}\,dz_1 - \sum_{k=0}^{[\sigma]-1}\frac{(2\pi\sqrt{Nb})^k}{k!}\,\frac{\varepsilon^{k+1-s}}{s-k-1}\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2\pi\sqrt{Nb})^m}{m!\,(m-s+1)}\left(\frac{X}{2dz_2}\right)^{m-s+1}$$

Also folgt aus (5.44)

$$J_3 = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}\left(\frac{X}{2d}\right)^{1-s}\int_{z=1}^{\infty} e^{2\pi i\sqrt{\frac{XNb}{2d}}\,z}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(2\pi\sqrt{\frac{XNb}{2d}}\right)^m}{m!\,(m-s+1)}\,\frac{dz}{z^{m+1}}.$$

Hier dürfen wir die obere Grenze des Integrals von $+\infty$ nach $i\infty$ verschieben; substituieren wir dann $z = iy$, so ergibt sich, wenn als Integrationsweg wieder zunächst ein Viertelkreis und dann die positiv reelle Achse

gewählt wird:

$$J_3 = e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}\left(\frac{X}{2d}\right)^{1-s}\int_{-i}^{\infty} e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{2d}}y}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-2\pi i\sqrt{\frac{XNb}{2d}}\right)^m}{m!\,(m-s+1)}\frac{dy}{y^{m+1}}$$

$$\ll e^{-\frac{\pi}{2}t}X^{1-\sigma}\left\{\int_1^{\infty} e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{2d}}\left(y-\frac{1}{y}\right)}dy + \int_0^{\pi/2} e^{\frac{t}{\sqrt{2}}(1-\cos\varphi)}\right\}d\varphi.$$

$$I_3 = O\left(X^{1-\sigma}e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t}\right) = O(e^{-Ct}). \tag{5.45}$$

Aus (5.41), (5.43), (5.45) folgt nach (5.4), (5.1) und Hilfssatz 1:

$$U(s) = O(e^{-Ct}). \tag{5.5}$$

Die beiden ersten Glieder in (5.3) liefern also keinen wesentlichen Beitrag zum Restglied.

Es bleibt noch die Abschätzung von $V(s)$, diese verläuft ähnlich wie die von $T(s)$ in § 4. Wir wenden die Substitution (4.3) an und erhalten:

$$V(s) = 4\sum_{Nb<Y}\int_{e^{-\frac{\pi i}{4}}}^{i\infty}\int_1^{\sqrt{\frac{X}{d}}}\left(v^2-\frac{X}{d}\right)v^{1-2s}e^{2\pi i\sqrt{Nb}\,v\left(u+\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u}dv. \tag{5.6}$$

Nun setzen wir:

$$u+\frac{1}{u} = 2+iy, \qquad \frac{du}{u} = \frac{dy}{\sqrt{y^2-4iy}}$$

und

$$v = \sqrt{\frac{X}{d}} - \frac{r}{\sqrt{d}} - i\frac{r}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(\sqrt{X}-(1+i)r\right), \qquad dv = -\frac{1+i}{\sqrt{d}}dr;$$

das ergibt:

$$V(s) = 4d^{s-2}(1+i)\sum_{Nb<Y}\int_0^{\infty} e^{-2\pi\sqrt{\frac{XNb}{d}}y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-4iy}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}}\left(r^2(1+i)^2-2\sqrt{X}(1+i)r\right)\left(\sqrt{X}-(1+i)r\right)^{1-2s}\times$$

$$\times e^{2\pi\sqrt{\frac{Nb}{d}}(2r+yr+2i\sqrt{X}-2ir+iry)}dr \ll X^{1-\sigma}\sum_{Nb<Y}\int_0^{\infty} e^{-\pi\sqrt{\frac{XNb}{d}}y}\frac{dy}{\sqrt{y}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\left(1+\frac{r}{\sqrt{X}}\right)^{2(M+1)} e^{-2t\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\sqrt{X}-r}} e^{4\pi\sqrt{\frac{Nb}{d}}r}dr.$$

Nach (4.5) folgt daraus

$$V(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\,e^{-2t\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\sqrt{X}-r}}\sum_{Nb<Y}Nb^{-\frac{1}{4}}e^{4\pi\sqrt{\frac{Nb}{d}}r}dr. \tag{5.61}$$

Um auf die Summe Hilfssatz 1 anwenden zu können, müssen wir diese in zwei Teile zerlegen. Die Glieder der Summe sind monoton abnehmend, solange $N\mathfrak{b} \leq \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2$; daher setzen wir:

$$V_1(s) = X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\, e^{-2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}-r}} \sum_{N\mathfrak{b} \leq \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}}\, dr.$$

Die Summe hier ist aber leer, sobald $r > \frac{\sqrt{d}}{8\pi}$, daher haben wir

$$V_1(s) \leq X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\sqrt{\frac{d}{8\pi}}} r \sum_{N\mathfrak{b} < \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}}\, dr$$

$$V_1(s) = O(X^{\frac{3}{4}-\sigma}). \tag{5.62}$$

Für $N\mathfrak{b} \geq \left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2$ sind die Glieder der Summe[12]) in (5.61) monoton zunehmend, und wir erhalten nach Hilfssatz 1:

$$\sum_{\left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2 \leq N\mathfrak{b} < Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}} \ll \int_1^Y u^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{u}}\, du + Y^{\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{Y}}$$

$$= 2\int_1^Y v^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}} v}\, dv + Y^{\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{Y}} \ll Y^{\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{Y}} \left(\frac{1}{r}+1\right).$$

Setzt man das in (5.61) ein und beachtet, daß für $0 \leq r \leq \frac{1}{2}\sqrt{X}$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}-r} \geq \frac{r}{\sqrt{X}-r} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sqrt{X}-r}\right)^3 \geq \frac{r}{\sqrt{X}} + \frac{1}{6}\frac{r^2}{X},$$

so erhält man

$$V_2(s) = X^{\frac{3}{4}-\sigma} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} r\, e^{-2t \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{\sqrt{X}-r}} \sum_{\left(\frac{\sqrt{d}}{8\pi r}\right)^2 \leq N\mathfrak{b} < Y} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4\pi r}{\sqrt{d}}\sqrt{N\mathfrak{b}}}\, dr$$

$$\ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{X}} (1+r)\, e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{d}}\left|\frac{Y}{X}\right| r^2}\, dr.$$

$$V_2(s) = O(X^{1-\sigma}). \tag{5.63}$$

Aus (5.62), (5.63), (5.5) und (5.3) folgt

$$R_2(s) = O(X^{1-\sigma}) \tag{5.7}$$

und Satz 2 ist bewiesen.

[12]) Falls die Summe leer ist, gilt die Abschätzung natürlich a fortiori.

§ 6. Beweis von Satz 1.

Satz 1 folgt aus Satz 2 durch Differenzbildung; wir ersetzen X und Y durch $X+\sqrt{X}$ bzw. $Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}$. Nach Satz 2 gilt dann:

$$F(X, Y, s-1)-(X+\sqrt{X})F(X, Y, s)+\sqrt{X}F(X, Y, s)\ll X^{1-\sigma} \tag{6.1}$$

und

$$\begin{cases} F\Big(X+\sqrt{X}, Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}, s-1\Big)- \\ \qquad -\big(X+\sqrt{X}\big)F\Big(X+\sqrt{X}, Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}, s\Big)\ll X^{1-\sigma}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\begin{cases} W(s)=F(X, Y, s)-F\Big(X+\sqrt{X}, Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}, s\Big) \\ \quad =\sum\limits_{\substack{X\leqq N\mathfrak{a}<X+\sqrt{X}\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{R}}} N\mathfrak{a}^{-s}-\psi(s)\sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-1} \end{cases} \tag{6.3}$$

und subtrahieren (6.2) von (6.1). Das ergibt:

$$W(s-1)-\big(X+\sqrt{X}\big)W(s)+\sqrt{X}F(X, Y, s)\ll X^{1-\sigma}$$

oder

$$F(X, Y, s)\ll X^{\frac{1}{2}-\sigma}+\Big|\big(1+\sqrt{X}\big)W(s)-\frac{1}{\sqrt{X}}W(s-1)\Big|. \tag{6.4}$$

Zur Abschätzung der Differenz rechts beachten wir, daß nach der bekannten Abschätzung für $\Gamma(z)$ sowie der Funktionalgleichung der Gammafunktion und des Sinus

$$\psi(s-1)=-d\frac{(s-1)^2}{4\pi^2}\psi(s)+O(e^{-Ct})=(XY+O(t))\psi(s).$$

Daher folgt nach (6.3):

$$\begin{cases} \big(1+\sqrt{X}\big)W(s)-\frac{1}{\sqrt{X}}W(s-1) \\ =\sum\limits_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\leqq N\mathfrak{a}<X+\sqrt{X}}} N\mathfrak{a}^{-s}\Big(1+\sqrt{X}-\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{X}}\Big)-\psi(s)\sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1}\\ \frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y}}\times \\ \quad\times N\mathfrak{b}^{s-2}\big(N\mathfrak{b}\big(1+\sqrt{X}\big)-Y\sqrt{X}\big)+O\Big(|\psi(s)|\sqrt{Y}\sum\limits_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y}N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\Big). \end{cases} \tag{6.5}$$

Hier sind die Beträge der Summanden, je nach dem Werte von σ, monoton, oder bestehen aus zwei monotonen Teilen; in beiden Fällen ergibt sich nach Hilfssatz 1:

$$(6.6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{X\leqq N\mathfrak{a}<X+\sqrt{X}} N\mathfrak{a}^{-\sigma}\left(1+\sqrt{X}-\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{X}}\right)\ll\int_{X}^{X+\sqrt{X}} u^{-\sigma}\left(1+\sqrt{X}-\frac{u}{\sqrt{X}}\right)du \\ =\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{X}}(v+X)^{-\sigma}\left(1-\frac{v}{\sqrt{X}}\right)dv=O(X^{\frac{1}{2}-\sigma}) \end{cases}$$

und

$$(6.7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\left(N\mathfrak{b}\,(1+\sqrt{X})-Y\sqrt{X}\right) \\ \ll\displaystyle\int_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}}^{Y} u^{\sigma-2}\left(u\,(1+\sqrt{X})-\sqrt{X}\,Y\right)du \\ =\dfrac{\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\displaystyle\int_{0}^{\frac{Y}{\sqrt{X}}}\left(Y-v\frac{\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\right)^{\sigma-2}\left(Y-v\sqrt{X}\right)dv=O(Y^{\sigma}X^{-\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Schließlich haben wir für das letzte Glied in (6.5):

$$(6.8)\quad \sqrt{Y}\sum_{\frac{Y\sqrt{X}}{1+\sqrt{X}}\leqq N\mathfrak{b}<Y} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\ll\sqrt{Y}\int_{Y-\frac{Y}{1+\sqrt{X}}}^{Y} u^{\sigma-2}du=O(Y^{\sigma-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}).$$

Setzt man (6.6), (6.7) und (6.8) in (6.5) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{X})\,W(s)-\frac{1}{\sqrt{X}}W(s-1)&=O(X^{\frac{1}{2}-\sigma}X)+O(t^{1-2\sigma}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\sigma})\\&=O(X^{\frac{1}{2}-\sigma})\end{aligned}$$

und nach (6.4) Satz 1.

§ 7. Abschätzung von $|\zeta(\sigma+it)|$ für große t.

Als eine erste Anwendung der approximativen Funktionalgleichung geben wir eine Verbesserung der bekannten[13]) Abschätzung von $|\zeta(s,\mathfrak{K})|$ im kritischen Streifen:

Satz 3. *Für $t\geq C$ gilt gleichmäßig*

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it,\mathfrak{K})|&=O(t^{1-\sigma})\quad\text{für}\quad 0<\delta\leq\sigma\leq 1-\delta\\|\zeta(1+it,\mathfrak{K})|&=O(\log t)\\|\zeta(it,\mathfrak{K})|&=O(t\log t).\end{aligned}$$

[13]) Vgl. LANDAU [2], Satz 171.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1, indem man $X = Y = \frac{t\sqrt{d}}{2\pi}$ setzt und die Summe nach Hilfssatz 1 auswertet.

Als eine weitere Anwendung geben wir eine Abschätzung des Mittelwertes von $|\zeta_K(\frac{1}{2}+it)|^2$.

Satz 4[14]). *Es ist*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\zeta_K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = O(\log T).$$

Zum Beweis gehen wir von der approximativen Funktionalgleichung mit $X = Y = c\,t$ aus:

$$\begin{aligned}\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it) &= \sum_{N\mathfrak{a}<ct} N\mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}-it} + \psi(\tfrac{1}{2}+it)\sum_{N\mathfrak{b}<ct} N\mathfrak{b}^{-\frac{1}{2}+it} + O(1)\\ &= S(t) + \psi\,\overline{S(t)} + O(1).\end{aligned}$$

Da $|\psi(\frac{1}{2}+it)| = 1$, folgt daraus

$$\begin{aligned}|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|^2 &= [S(t)+\psi\,\overline{S(t)}+O(1)]\,[\overline{S(t)}+\bar{\psi}\,S(t)+O(1)]\\ &= 2|S(t)|^2 + \psi\,\overline{S(t)^2} + \bar{\psi}\,S(t)^2 + O(|S(t)|) + O(1)\\ &\leq 4|S(t)|^2 + O(|S(t)|) + O(1).\end{aligned}$$

Mithin ist

$$\int_{-T}^{T}|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt \leq 8\int_{0}^{T}|S(t)|^2\,dt + O\left\{\int_{0}^{T}|S(t)|\,dt\right\}. \tag{7.1}$$

Für das Integral rechts ergibt sich nach der Definition von $S(t)$:

$$\int_0^T|S(t)|^2\,dt = \int_0^T\sum_{\substack{N\mathfrak{a}<ct\\ N\mathfrak{b}<ct}}\frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}}\left(\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right)^{it}dt = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}<cT\\ N\mathfrak{b}<cT}}\frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}}\int_{T_1}^{T}\left(\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right)^{it}dt,$$

wobei

$$T_1 = \frac{1}{c}\max(N\mathfrak{a}, N\mathfrak{b}).$$

Die Integration läßt sich jetzt leicht ausführen, und wir erhalten

$$\int_0^T|S(t)|^2\,dt \leq T\sum_{N\mathfrak{a}<cT}\frac{1}{N\mathfrak{a}} + \sum_{\substack{N\mathfrak{a}<cT\\ N\mathfrak{b}<cT}}{}'\frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}\left|\log\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}\right|}, \tag{7.2}$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die Glieder mit $N\mathfrak{a} = N\mathfrak{b}$ auszulassen sind. Für die erste Summe haben wir nach Hilfssatz 1

$$\sum_{N\mathfrak{a}<cT}\frac{1}{N\mathfrak{a}} = O(\log T). \tag{7.3}$$

[14]) Die Beschränkung auf $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{R}}\zeta(s,\mathfrak{R})$ ist nicht wesentlich, sondern dient nur zur Schreibvereinfachung.

Die zweite Summe macht etwas mehr Mühe; wegen der Symmetrie ist

$$(7.4)\qquad \sum_{\substack{Na<cT\\ Nb<cT}}{}' = 2\cdot \sum_{Nb<cT}\sum_{Na<Nb} = 2\sum_{Nb<cT}\left\{\sum_{Na<\frac{1}{e^2}Nb} + \sum_{\frac{1}{e^2}Nb<Na<Nb}\right\}$$

Die Glieder der inneren Summen sind monoton (im ersten Falle fallend, im zweiten Falle wachsend); wir können daher Hilfssatz 1 anwenden und erhalten

$$(7.5)\qquad \sum_{Na<\frac{1}{e^2}Nb}\frac{1}{\sqrt{Na}\log\frac{Nb}{Na}} \ll \int_1^{\frac{1}{e^2}Nb}\frac{du}{\sqrt{u}\log\frac{Nb}{u}} \leq \int_1^{\frac{1}{e^2}Nb}\frac{du}{\sqrt{u}} = O\left(\sqrt{Nb}\right),$$

$$\sum_{\frac{1}{e^2}Nb<Na<Nb}\frac{1}{\sqrt{Na}\log\frac{Nb}{Na}} \ll \int_{\frac{1}{e^2}Nb}^{Nb-1}\frac{du}{\sqrt{u}\log\frac{Nb}{u}} = \int_1^{Nb\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}\frac{dv}{\sqrt{Nb-v}\log\frac{Nb}{Nb-v}}$$

Nun ist

$$\log\frac{Nb}{Nb-v} = \log\left(1+\frac{v}{Nb-v}\right) \geq C\frac{v}{(Nb-v)}$$

und daher

$$(7.6)\qquad \sum_{\frac{1}{e^2}Nb<Na<Nb}\frac{1}{\sqrt{Na}\log\frac{Nb}{Na}} \ll \int_1^{Nb\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}\sqrt{Nb-v}\,\frac{dv}{v} = O\left(\sqrt{Nb}\log Nb\right).$$

Setzt man (7.5) und (7.6) in (7.4) ein, so ergibt sich

$$(7.7)\qquad \sum_{\substack{Na<cT\\ Nb<cT}}{}' \frac{1}{\sqrt{Na\,Nb}\left|\log\frac{Nb}{Na}\right|} \ll \sum_{Nb<cT}\log Nb = O(T\log T)$$

und somit nach (7.3) und (7.2):

$$(7.8)\qquad \int_0^T |S(t)|^2\,dt = O(T\log T).$$

Der Beweis von Satz 4 folgt nun sofort aus (7.1) unter Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung und (7.8):

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt &\ll (T\log T) + \left\{T\int_0^T|S(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &= O(T\log T) + O\left(T(\log T)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= O(T\log T).\end{aligned}$$

Literatur.

[1] ČUDAKOV, N.: On GOLDBACH-VINOGRADOVs theorem. Ann. Math. (2) **48**, 515—545 (1947). — [2a] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: The zeros of RIEMANNs zetafunction on the critical line. Math. Z. **10**, 283—317 (1921). — [2b] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of DIRICHLET and PILTZ. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **21**, 39—74 (1922). — [2c] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: The approximate functional equations for $\zeta(s)$ and $\zeta^2(s)$. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **29**, 81—97 (1929). — [3] HECKE, E.: Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. I. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1**, 102—126 (1923). — [4] LANDAU, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, 2. Aufl. Leipzig 1928. — [5] MORDELL, L. J.: POISSONs summation formula in several variables and some applications to the theory of numbers. Proc. Cambridge Phil. Soc. **25**, 412—420 (1929). — [6a] SIEGEL, C. L.: Neuer Beweis der Funktionalgleichung der DEDEKINDschen Zetafunktion. Math. Ann. **85**, 123—128 (1922). — [6b] SIEGEL, C. L.: Über RIEMANNs Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie. Quellen u. Studien Geschichte Math. **2**, 45—80 (1931). — [7] SUETUNA, Z.: Über die approximative Funktionalgleichung für DIRICHLETsche L-Funktionen. Jap. J. Math. **9**, 111—116 (1932).

Marburg a. d. Lahn, Rotenberg 21.

(Eingegangen am 10. Juni 1952.)

STOLL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 116—154 (1952)

Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten.

Von

WILHELM STOLL.

In dieser Arbeit werden Hilfsmittel bereitgestellt, die in anschließenden Arbeiten über Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher zum Beweis der beiden *Hauptsätze der Wertverteilungslehre* verwendet werden sollen[1]).

Im Falle einer Veränderlichen wurden die Hauptsätze von H. WEYL, J. WEYL und L. AHLFORS[2]) auf meromorphe Vektorfunktionen $\mathfrak{w}(z)$, die eine RIEMANNsche Fläche über der z-Ebene in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m}$ abbilden, übertragen. Auch im Falle von n unabhängigen Veränderlichen werden spätere Arbeiten im wesentlichen alle Sätze von WEYL [*14*] als gültig erweisen. Insbesondere wird sich später ergeben:

Die $2n$-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ enthalte die (veränderliche) offene Menge G mit Rand Γ, und G seinerseits die (feste) offene Menge g mit Rand γ. Eine meromorphe Fläche $\mathfrak{w}(P) = (w_1(P), \ldots, w_m(P))$ sei dasselbe wie eine Abbildung von $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m}$. Jedem Vektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ sei die Fläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \leqq \mathfrak{M}^{2n}$ der Nullstellen von $\sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\,\alpha_\mu$ zugeordnet. Die meromorphe Fläche $\mathfrak{w}(P)$ habe die später einzuführende Charakteristik $T(G) = \int_G \ldots$, die Schmiegungsfunktion $m(\Gamma, \vec{\alpha}) = \int_\Gamma \ldots$, und die Anzahlfunktion $N(G, \vec{\alpha}) = \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})} \ldots$. Dann gilt der 1. *Hauptsatz*:

$$T(G) = N(G, \vec{\alpha}) + m(\Gamma, \vec{\alpha}) - m(\gamma, \vec{\alpha}) \tag{0.1}$$

für alle Vektoren $\vec{\alpha}$ und alle „*zulässigen*" G. Ebenso gilt unter einigen weiteren Voraussetzungen der 2. *Hauptsatz*:

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(\Gamma, \vec{\alpha}) \leq (m + \varepsilon)\, T(G) \tag{0.2}$$

für alle ganzen $q > 0$, alle $\varepsilon > 0$, und die „*meisten*" zulässigen G.

Als Spezialfall erhält man den 1. Hauptsatz, wie ihn H. KNESER [*6*] für im ganzen $\mathfrak{z}$-Raum meromorphe Funktionen $f(\mathfrak{z}) = f(z_1, \ldots, z_n)$ bewiesen hat. Für Funktionen endlicher Ordnung bewies H. KNESER darüber hinaus eine Verallgemeinerung der WEIERSTRASSschen Produktdarstellung[3]). Er geht in

[1]) Vergleiche [*8*] Kap. VI und IX. Die Nummer [*8*] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Vergleiche H. WEYL und J. WEYL [*14*].

[3]) Vergleiche [*8*] Kap. VIII und [*6*].

ihr — im Falle $n=1$ — zum Logarithmus über: $\log f(y)=g(y)+\sum\ldots$; der Summe entspricht im Falle $n>1$ ein Integral über die Fläche $\mathfrak{N}$ der Pol- und Nullstellen: $\log f(\mathfrak{y})=g(\mathfrak{y})+\int_{\mathfrak{N}}\ldots$. In beiden Fällen ist g ein Polynom. Da die Integraldarstellung jedoch nur in einer Umgebung des Nullpunktes gilt, ist es keineswegs trivial, daß unter der notwendigen Konvergenzvoraussetzung das Integral $\int_{\mathfrak{N}}$ überhaupt den Logarithmus einer im $\mathfrak{y}$-Raum meromorphen Funktion $f(\mathfrak{y})$ liefert, und daß diese auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet bzw. unendlich wird, und zwar mit der vorgeschriebenen Vielfachheit. Der Beweis, den H. KNESER [5] hierfür im Falle $n=2$ gegeben hat, läßt sich anscheinend nicht unmittelbar auf $n>2$ übertragen. Daher wird ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Hierbei, sowie bei den Hauptsätzen, lassen sich drei Beweistypen unterscheiden: 1. Beweise, die genau so wie im Falle $n=1$ verlaufen; 2. Beweise, die keine Analogie zum Falle $n=1$ zeigen; 3. Beweise, die in Anlage und Methode dem Fall $n=1$ ähnlich sind, jedoch in ihrer Durchführung auf größere Schwierigkeiten stoßen. Statt Nullstellen treten nämlich jetzt Nullstellenflächen, statt Randkurven Randflächen, statt Summen Integrale, statt Summenumformungen Integralumformungen auf. Die Integrationsbereiche liegen auf komplexen Mannigfaltigkeiten $\left[\text{z. B.: } T(G)=\int_G\ldots\right]$, auf Nullstellenflächen $\left(\text{z. B.: } N(G,\vec{\alpha})=\int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha})}\ldots \text{ oder } \log f=g+\int_{\mathfrak{N}}\ldots\right)$, die bis auf Singularitäten auch komplexe Mannigfaltigkeiten sind, und auf Randflächen $\left(\text{z. B.: } m(\Gamma,\vec{\alpha})=\int_{\Gamma}\ldots\right)$, die bestenfalls differenzierbare oder reellanalytische Mannigfaltigkeiten sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, diejenigen Sätze der Integrationstheorie bereitzustellen, mit deren Hilfe es in späteren Arbeiten gelingen wird, die erwähnten Schwierigkeiten zu überwinden. In § 1 und § 2 werden die Integrale auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt und ihre Rechenregeln, insbesondere die Sätze von FUBINI und STOKES, bewiesen. Ein Maßbegriff ist auf der Mannigfaltigkeit nicht vorhanden. Da sich eine Mannigfaltigkeit im kleinen wie ein Zahlenraum verhält, soll ein Integral „im kleinen" ein Integral im Zahlenraum sein. Um dabei vom Ortsparameter unabhängig zu sein, muß man als Integranden ein alternierendes Differential oder, was dasselbe ist, eine Dichte wählen. In § 3 werden die Verhältnisse im Vektorraum betrachtet. Die Existenz der Integrale über Nullstellenflächen und gewisse Integralumformungen werden hier auch für den Fall bewiesen, daß die Nullstellenflächen singuläre Stellen enthalten. Dies war bei H. KNESER noch nicht durchgeführt worden.

Im übrigen erheben diese vorbereitenden Sätze keinen Anspruch auf wesentliche Neuheit des Inhaltes; es kommt vielmehr darauf an, ihnen die später gebrauchte Form zu geben. Daher wird auch darauf verzichtet, die Voraussetzungen auf ein Minimum herabzudrücken.

§1. Integrale auf Mannigfaltigkeiten.

Die Theorie der Integrale auf Mannigfaltigkeiten werde hier auf Differenzierbarkeitseigenschaften gegründet:

Definition 1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Ein HAUSDORFF*scher Raum* $\mathfrak{M}^k$ *heiße eine k-dimensionale, l-mal stetig-differenzierbare bzw. reellanalytische Mannigfaltigkeit, wenn jedem Punkt* $P \in \mathfrak{M}^k$ *eine Menge* $\mathfrak{P}_P(\mathfrak{M}^k) = \mathfrak{P}_P \neq \emptyset$ *von Abbildungen* $\alpha = \alpha(t)$ *zugeordnet ist, so daß gilt:*

1. *Zu jedem* $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ *gibt es wenigstens eine „durch* α *uniformisierbare Umgebung* $U(P)$ *von* P" *(abgekürzt:* $U(P|\alpha)$*), d.h.*

a) Eine offene Menge $U'(P)$ *des reellen* $t = (t_1, \ldots, t_k)$*-Raumes wird durch* $\alpha(t)$ *topologisch auf* $U(P)$ *abgebildet, wobei* $\alpha(0) = P$ *ist.*

b) Hat $t_1 = U'(P)$ *den Bildpunkt* $Q = \alpha(t_1)$*, so gehört die Abbildung* $\alpha(t + t_1)$ *zu* $\mathfrak{P}_Q$.

2. *Sind* $\alpha(t)$ *und* $\beta(\mathfrak{x})$ *zwei Abbildungen aus* $\mathfrak{P}_P$*, so ist die Abbildung* $\mathfrak{x}(t) = \beta^{-1}\alpha(t)$ *in einer Nullpunktsumgebung l-mal stetig differenzierbar bzw. reellanalytisch. (Im Falle* $l > 0$ *ist die Funktionaldeterminante* $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \neq 0$.*)*

Im Falle $l > 0$ *heißt die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^k$ *orientiert, wenn außerdem gilt:*

3. *In 2. ist* $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} > 0$.

Die Mengen $\mathfrak{P}_P^-$ der Abbildungen $\alpha(-t_1, \ldots, t_k)$ mit $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_P = \mathfrak{P}_P^+$ erfüllen 1.—3. und orientieren eine orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{M}_+^k$ zu $\mathfrak{M}_-^k$ um.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ heiße *komplex*, wenn $k = 2n$ gerade ist, und für $x_{2\nu-1} + i\, x_{2\nu} = w_\nu$, $t_{2\nu-1} + i\, t_{2\nu} = z_\nu$ die vermittelnde Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{z})$ im Nullpunkt komplexanalytisch ist. Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist wegen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = \left|\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{z}}\right|^2 > 0$ immer orientiert.

Erfüllen die Abbildungsmengen $\mathfrak{P}_P^* \supseteq \mathfrak{P}_P$ die Forderungen 1.—3., so bilden sie eine Erweiterung der $\mathfrak{P}_P$. Die Vereinigung $\tilde{\mathfrak{P}}_P = \bigcup \mathfrak{P}_P^*$ aller Erweiterungen ist eine maximale Erweiterung. Die $\mathfrak{P}_P$ werden weiterhin maximal angenommen.

Werden die Umgebung $U(P)$ durch $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung $U(Q)$ durch $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_Q$ uniformisiert, so ist wegen 1b die Abbildung $\mathfrak{x}(t) = \beta^{-1}\alpha(t)$ für $t \in \alpha^{-1}(U(P) \cap U(Q))$ l-mal stetig differenzierbar, bzw. reellanalytisch, bzw. komplexanalytisch und im Falle der Orientierung $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} > 0$.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ heiße eine *Teilmannigfaltigkeit* von $\mathfrak{M}^k$, wenn gilt:

1. $\mathfrak{N}^q \subseteq \mathfrak{M}^k$ *trägt die aus* $\mathfrak{M}^k$ *induzierte Topologie.*

2. *Zu jedem Punkt* $P \in \mathfrak{N}^q$ *und jeder Abbildung* $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_P(\mathfrak{M}^k)$ *gibt es in* $\mathfrak{M}^k$ *eine Umgebung* $U(P|\alpha)$*, eine Abbildung* $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_P(\mathfrak{N}^q)$ *und eine Umgebung* $V(P|\beta) \subseteq U(P|\alpha) \cap \mathfrak{N}^q$*, so daß* $\alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ *in der Nullpunktsumgebung* $V'(P)$ *stetig ist, dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie* $\mathfrak{N}^q$ *hat und im Falle eines orientierten* $\mathfrak{N}^q$ *die Matrix* $\left(\frac{\partial \alpha^{-1}\beta}{\partial \mathfrak{x}}\right)$ *den Rang q hat.*

Eine Menge M aus $\mathfrak{M}^k$ (bzw. eine komplexwertige Funktion auf M) heiße *meßbar*, *Nullmenge* (bzw. meßbar, l-mal — (stetig) — differenzierbar, reell-analytisch, analytisch), wenn es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und eine Umgebung $U(P|\alpha)$ gibt, so daß das Urbild $\alpha^{-1}(U(P|\alpha) \cap M) = M'$ im Parameterraum meßbar, bzw. eine Nullmenge [bzw. $f(\alpha(t))$ auf M' meßbar usw.] ist. Dies gilt wegen 2b dann für jedes $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und jedes $U(P|\alpha)$. Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Produkt höchstens abzählbar vieler meßbaren Mengen (Nullmengen) sind wieder meßbar (Nullmengen). Die Funktion $f(P)$ ist dann und nur dann meßbar, wenn es alle Mengen $[\Re e\, f(P) \gtrless c]_P$ und $[\Im m\, f(P) \gtrless c]_P$[4]) sind. Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Grenzwert meßbarer Funktionen sind wieder meßbar.

Die Summation über alle m-tupel ganzer Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ mit $1 \leq \nu_1 \leq k, \ldots, 1 \leq \nu_m \leq k$ werde durch $\sum_{\nu|m}^{k}$ abgekürzt. Tritt noch die Einschränkung $1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_m \leq k$ hinzu, so werde $\sum_{\nu|m}^{k}{}'$ geschrieben. Nun definiert man:

Definition 2 (Dichte)[5]). *M sei eine Teilmenge der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ und m eine natürliche Zahl. Jedem Punkt $P \in M$, jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und jedem m-tupel ganzer Zahlen $1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_m \leq k$ sei eine komplexe Zahl $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(P, \alpha)$ zugeordnet, so daß für jede andere Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_P$ mit $\mathfrak{x}(t) = \beta^{-1}\alpha(t)$ gilt:*

$$a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(P, \alpha) = \sum_{\nu|m}^{k}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_m}(P, \beta) \left.\frac{\partial(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_m})}{\partial(t_{\mu_1}, \ldots, t_{\mu_m})}\right|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Dann heiße $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ *Dichte m-ter Stufe*. Eine Dichte k-ter Stufe in einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit heiße kurz „*Dichte*".

Setzt man für einen beliebigen Punkt $Q \in M \cap U(P|\alpha)$ mit $Q = \alpha(t_1)$

$$a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha(t + t_1)), \tag{1.2}$$

so ist $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha)$ bei festen $\alpha, \mu_1, \ldots, \mu_m$ als Funktion von Q auf $M \cap U(P|\alpha)$, eindeutig erklärt. Beim Übergang von einer Abbildung $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_{P_1}$ zu einer anderen $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_2}$ gilt das Transformationsgesetz

$$a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha) = \sum_{\nu|m}^{k}{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_m}(Q, \beta) \frac{\partial(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_m})}{\partial(t_{\mu_1}, \ldots, t_{\mu_m})} \tag{1.3}$$

für

$$\alpha(t) = \beta(\mathfrak{x}) = Q \in M \cap U(P_1|\alpha) \cap U(P_2|\beta).$$

Die Dichte m-ter Stufe $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ habe auf M eine Eigenschaft (Meßbarkeit usw.), wenn es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ eine Umgebung $U_1(P|\alpha)$ gibt, so daß $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha)$ als Funktion von Q auf $U_1(P|\alpha)$ für alle $\mu_1, \ldots, \mu_m$ diese Eigenschaft hat. Es wird abgekürzt: $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q, \alpha) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(Q) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ und $a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(\alpha(t), \alpha) = a_{\mu_1 \ldots \mu_m}(t; \alpha)$.

[4]) $[\mathfrak{A}]_P$ kürzer $[\mathfrak{A}]$, bezeichnet die Menge der Gegenstände P mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}$.

[5]) Für $m = k$ vergleiche [*14*], Kap. III, § 3.

Gilt von zwei Dichten $a_{\mu_1 \dots \mu_m}(P, \alpha) = b_{\mu_1 \dots \mu_m}(P, \alpha)$ für ein α, so gilt die Gleichheit auch für alle Abbildungen α. Es ergibt sich: Gleichheit, Summe $a_{\mu_1 \dots \mu_m} + b_{\mu_1 \dots \mu_m}$, Produkt mit einer Funktion: $f \cdot a_{\mu_1 \dots \mu_m}$, Grenzübergang $a^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_m} \to a_{\mu_1 \dots \mu_m}$ hängen nicht von der Wahl von α ab und liefern wieder eine Dichte. Im Falle $m = k$ und einer orientierten Mannigfaltigkeit gilt das auch noch für Ungleichungen; denn aus $a(Q, \alpha) < b(Q, \alpha)$ folgt $a(Q, \beta) < b(Q, \beta)$ wegen $\frac{\partial \beta^{-1} \alpha}{\partial t} > 0$. Mit $a(Q, \alpha)$ ist auch $|a(Q, \alpha)|$ eine Dichte. Das gestattet auf einer orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ sinnvolle Integrale zu erklären. Die Dichte $a(Q, \alpha)$ heiße über M örtlich integrierbar, falls es zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$ eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und eine Umgebung $U(P|\alpha)$ gibt, für die $a(\alpha(t), \alpha)$ über $\alpha^{-1}(M \cap U(P|\alpha))$ integrierbar ist. Dies gilt dann auch für jede Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$, aber nicht unbedingt für jede Umgebung $U(P|\alpha)$.

Eine Teilmenge einer kompakten Menge heiße *beschränkt*. Eine Menge M heiße *kompakt überdeckbar*, wenn es höchstens abzählbar viele kompakte Mengen K_μ gibt, die M überdecken: $M \subseteqq \bigcup_{\mu=0}^{\infty} K_\mu$. Dabei kann O. B. d. A. $K_0 = \emptyset$ und $K_\mu \subseteqq K_{\mu+1}$ angenommen werden. Das Integral wird zunächst für einen beschränkten, dann für einen kompakt überdeckbaren Integrationsbereich erklärt. Im ersten Fall wird eine „DIEUDONNÉ-Zerlegung" benützt.

Satz 1. DIEUDONNÉ-Zerlegung[6]).

Voraussetzung. *Die Menge K sei ein kompakter Teil der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$. Es sei $V(P_\nu)$ eine offene Umgebung des Punktes $P_\nu \in K$ mit $K \subseteqq \bigcup_{\nu=1}^{n} V(P_\nu)$. Die abgeschlossene Hülle $\overline{V}(P_\nu)$ von $V(P_\nu)$ sei kompakt.*

Behauptung. *Auf $\mathfrak{M}^k$ gibt es stetige Funktionen $\lambda_\nu(P)$ mit:*

a) $0 \leq \lambda_\nu(P) \leq 1$ *für* $P \in \mathfrak{M}^k$ *und* $\lambda_\nu(P) = 0$ *für* $P \notin V(P_\nu)$.

b) $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(P) = 1$ *für* $P \in K$.

c) *Ist $\mathfrak{M}^k$ l-mal stetigdifferenzierbar, so können die $\lambda_\nu(P)$ auch l-mal stetig differenzierbar gewählt werden.*

Wie bei H. WEYL [*14*] Kap. III, § 3, S. 131 zeigt man zunächst, daß der Satz für eine geeignete Überdeckung $W(P_\nu)$ richtig ist. Dabei kann man noch annehmen, daß die $W(P_\nu)$ alle in einer beliebigen, K umfassenden, offenen Menge liegen. Es gibt offene Umgebungen $V_1(P_\nu)$ von P_ν mit $\overline{V}_1(P_\nu) < V(P_\nu)$, die K überdecken: $K \subseteqq \bigcup_{\nu=1}^{n} V(P_\nu)$. Eine DIEUDONNÉ-Zerlegung des kompakten $\overline{V}_1(P_\nu)$ liefert bei geeigneter Wahl der überdeckenden Umgebungen nach b) eine auf $\mathfrak{M}^k$ stetige Funktion $\varrho_\nu(P)$ mit $\varrho_\nu(P) = 1$ für $P \in \overline{V}_1(P_\nu)$ aber $\varrho_\nu(P) = 0$ für $P \notin V(P_\nu)$ und $0 \leq \varrho_\nu(P) \leq 1$ für $P \in \mathfrak{M}^k$. Wie bei WEYL konstruiert man aus den $\varrho_\nu(P)$ die $\lambda_\nu(P)$.

[6]) Vergleiche [*14*] Kap. III, § 3, S. 131 oder [*2*] Bd. III, Kap. IX, § 4, S. 66 oder [*10*] Bd. I, Kap. I, § 2, S. 23.

Satz 2. Integrale über beschränkte Mengen.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ sei orientiert.*

Behauptung. *Zu jeder meßbaren, beschränkten Menge $M \subseteq \mathfrak{M}^k$ und jeder örtlich über M integrierbaren Dichte ψ kann man eine Zahl $\int\limits_M \psi$ als Funktion von M und ψ angeben, die eindeutig durch die Forderungen bestimmt ist:*

1. *Sind a und b auf M konstant, und sind die Dichten ψ und χ über M örtlich integrierbar, so gilt:*

$$\int\limits_M (a\psi + b\chi) = a \int\limits_M \psi + b \int\limits_M \chi. \tag{1.4}$$

2. *Wählt man den Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ die Umgebung $U(P|\alpha)$ beliebig, und ist ψ über M örtlich integrierbar und verschwindet ψ auf $M - U(P|\alpha)$, so gilt mit $M' = \alpha^{-1}(U(P|\alpha) \cap M)$ die Gleichung*

$$\int\limits_M \psi = \int\limits_{M'} \psi(\mathfrak{t}; \alpha)\, dt_1 \dots dt_k. \tag{1.5}$$

$\int\limits_M \psi$ heiße das Integral über M von ψ. Es ist von der kompakten Menge, in die man sich M eingebettet denkt, unabhängig.

Der Beweis wird wie bei [*14*] Kap. III § 3, S. 130–135 geführt. Man wählt ein kompaktes $K \supseteq M$, eine DIEUDONNÉ-Zerlegung λ_ν, $U(P_\nu|\alpha_\nu) = V(P_\nu)$ mit $\alpha_\nu \in \mathfrak{P}_{P_\nu}$ von K, wobei die $U(P_\nu|\alpha_\nu)$ so klein gewählt werden können, daß $\psi(\mathfrak{t}; \alpha_\nu)$ über das Urbild $M'_\nu = \alpha^{-1}(U(P_\nu|\alpha_\nu) \cap M)$ integrierbar ist. Dann zeigt man, daß die Definition

$$\int\limits_M \psi = \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{M'_\nu} \lambda_\nu(\alpha_\nu(\mathfrak{t}))\, \psi(\mathfrak{t}; \alpha_\nu)\, dt_1 \dots dt_k \tag{1.6}$$

die Bedingungen 1 und 2 erfüllt und unabhängig von der Wahl der DIEUDONNÉ-Zerlegung sowie der überdeckenden Menge K ist.

Definition 4. (Integrierbarkeit im großen.) *M sei eine kompakt überdeckbare, meßbare Teilmenge der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$, also: $M \subseteq \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ mit $K_0 = \emptyset$ und kompaktem $K_\nu \subseteq K_{\nu+1}$. Die Dichte ψ sei über jede Menge $M \cap K_\nu$ örtlich integrierbar. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int\limits_{M \cap K_\nu} \psi = \int\limits_M \psi, \tag{1.7}$$

so heiße er das uneigentliche Integral von ψ über M bezüglich der Folge $\{K_\nu\}$; ψ heiße uneigentlich integrierbar. Ist aber auch $|\psi|$ uneigentlich integrierbar über M, so heiße ψ integrierbar über M und $\int\limits_M \psi$ das (eigentliche) Integral über M.

Integrierbarkeit und Integral hängen dann nicht von der Folge $\{K_\nu\}$ ab, wie gleich bewiesen wird.

Satz 3. Rechenregeln für Integrale.

1. *Ist* $|\psi|$ *bezüglich* $\{K_\nu\}$ *über* M *integrierbar, so sind* ψ *und* $|\psi|$ *bezüglich jeder Folge* $\{K'_\nu\}$ *über* M *integrierbar, und die Integrale hängen nicht von* $\{K'_\nu\}$ *ab.* ψ *wird meßbar vorausgesetzt.*

2. *Es gilt* $\int\limits_M 0 = 0$ *für jede meßbare Menge* M *und* $\int\limits_N \psi = 0$ *für jede meßbare Dichte* ψ *und jede Nullmenge* N.

3. *Sind* a *und* b *auf* M *konstant, so ist mit* ψ *und* χ *auch* $a\psi + b\chi$ *über* M *integrierbar. Es gilt*

$$\int\limits_M (a\psi + b\chi) = a\int\limits_M \psi + b\int\limits_M \chi. \tag{1.8}$$

4. *Ist* ψ *über* M *integrierbar, so auch über jedes meßbare* $N \subseteq M$. *Es gilt:*

$$\left|\int\limits_N \psi\right| \leq \int\limits_M |\psi|. \tag{1.9}$$

5. *Ist* ψ *über* M_1 *und* M_2 *integrierbar, so auch über* $M = M_1 \cup M_2$. *Es gilt:*

$$\int\limits_M \psi = \int\limits_{M_1} \psi + \int\limits_{M_2} \psi - \int\limits_{M_1 \cap M_2} \psi. \tag{1.10}$$

6. *Sind* ψ *und* χ *über* M *integrierbar, und ist* $\psi \leq \chi$, *so gilt* $\int\limits_M \psi \leq \int\limits_M \chi$.

7. *Ist* ψ *meßbar auf* M, χ *integrierbar über* M *mit* $|\psi| \leq \chi$, *so ist* ψ *über* M *integrierbar.*

8. *Sind die meßbaren Mengen* M_ν *paarweise punktfremd, und ist die Dichte* ψ *über die Vereinigung* $M = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ *integrierbar, so gilt*

$$\int\limits_M \psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{M_\nu} \psi. \tag{1.11}$$

Beweis. $|\psi|$ sei über $M = \bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} M_\mu$ bezüglich $\{K_\nu\}$ integrierbar; die meßbaren Mengen M_μ seien paarweise punktfremd. $\lambda_\varrho^{(\nu)}$, $\varrho = 1, \ldots, n_\nu$ sei eine DIEUDONNÉ-Zerlegung von K_ν. Setzt man $T_\nu = K_\nu - K_{\nu-1}$ für $\nu \geq 1$, so gilt:

$$\left\{\begin{aligned}
\int\limits_M |\psi| &= \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M\cap K_\nu} |\psi| && = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{M\cap T_\nu} |\psi| \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \int\limits_{M\cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} |\psi| && = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{M_\mu\cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} |\psi| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \int\limits_{M_\mu\cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} |\psi| && = \sum_{\mu=1}^{\infty} \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M_\mu\cap K_\nu} |\psi| \\
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{M_\mu} |\psi|.
\end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

Also ist $|\psi|$ über jedes M_μ bezüglich $\{K_\nu\}$ integrierbar. Daraus folgt 4. und 8. für $|\psi|$. Werden der Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung

$U(P|\alpha)$ beliebig gewählt, setzt man $N = M \cap U(P|\alpha)$, $N' = \alpha^{-1}(N)$ und $K'_\nu = \alpha^{-1}(U(P|\alpha) \cap K_\nu)$, so gilt:

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \int\limits_N |\psi| = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{N\cap K_\nu} |\psi| \\ \qquad = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{N'\cap K'_\nu} |\psi(t;\alpha)|\, dt_1 \dots dt_k = \int\limits_{N'} |\psi(t;\alpha)|\, dt_1 \dots dt_k. \end{cases}$$

$|\psi|$, also auch ψ ist über M örtlich integrierbar. Nach (1.12) gilt:

$$(1.14)\qquad \int\limits_M |\psi| \geq \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{n_\nu} \int\limits_{M_\mu \cap T_\nu} \lambda_\varrho^{(\nu)} \psi \right| = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{M_\mu \cap K_\nu} \psi \right| = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \int\limits_{M_\mu} \psi \right|,$$

Daher ist ψ über jedes M_μ integrierbar. Speziell folgt für $M_1 = M$ und $M_\mu = \emptyset$ für $\mu > 1$ die Integrierbarkeit von ψ über M. Aus (1.14) folgt 4. Nach dem Majorantenkriterium gilt (1.12) dann auch für ψ statt $|\psi|$. Damit ist 8. bewiesen. Überdecken die kompakten Mengen K'_μ die Menge $M \subseteqq \bigcup_{\mu=0}^{\infty} K'_\mu$ mit $K'_0 = \emptyset$ und $K'_\mu \subseteqq K'_{\mu+1}$ und setzt man $M_\mu = M \cap (K'_\mu - K'_{\mu-1})$, so gibt (1.12) die Beziehungen $\int\limits_M |\psi| = \lim\limits_{\mu\to\infty} \int\limits_{M\cap K'_\mu} |\psi|$ und $\int\limits_M \psi = \lim\limits_{\mu\to\infty} \int\limits_{M\cap K'_\mu} \psi$. Also gilt

1. Für beschränktes M stimmen die Integralbegriffe von Satz 2 und Definition 4 überein. Nun folgen mittels der DIEUDONNÉ-Zerlegung $\lambda_\varrho^{(\nu)}$ für $M \cap K_\nu$ und anschließendem Grenzübergang $\nu \to \infty$ unmittelbar die Behauptungen 2.–7. für $|\psi|$ und dann auch für ψ, w. z. b. w.

Satz 4. Grenzwertsätze.

1. Voraussetzung. *χ sei über M integrierbar, ψ_ν sei meßbar, $|\psi_\nu| \leq \chi$ und $\psi_\nu \to \psi$ für $\nu \to \infty$ auf M.*

Behauptung. *ψ, ψ_ν sind über M integrierbar. Es ist*

$$\int\limits_M \psi = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu.$$

2. Voraussetzung. *ψ_ν, χ seien über M integrierbar, $\psi_\nu \geq \chi$. Es sei*

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu = \psi \leq \infty.$$

Behauptung.

a) $\int\limits_M \psi \leq \varliminf\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu \leq \infty$.

b) *Wenn $\varliminf\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu < \infty$ ist, so existiert das Integral $\int\limits_M \psi$, und die ψ_ν konvergieren fast überall auf M gegen ψ.*

3. Voraussetzung. *ψ_ν sei über M integrierbar. Es strebe $\psi_\nu \nearrow \psi \leq \infty$ für $\nu \to \infty$.*

Behauptung. $\int\limits_M \psi = \lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_M \psi_\nu \leq \infty$.

Der Beweis ergibt sich für beschränktes M sofort durch DIEUDONNÉ-Zerlegung. Ist M kompakt überdeckbar, d.h. $M \subseteqq \bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ mit kompaktem $K_\nu \subseteqq K_{\nu+1}$ und $K_0 = \emptyset$, so sei $M_\mu \doteq M \cap (K_\mu - K_{\mu-1})$. In 1. folgt aus $|\psi_\nu| \leq \chi$, also $|\psi| \leq \chi$, die Integrierbarkeit von ψ_ν und ψ über M. Da die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \psi_\nu$ eine von ν unabhängige, konvergente Majorante $\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \chi = \int_M \chi$ besitzt, konvergiert sie gleichmäßig in ν. Also gilt:

$$\int_M \psi = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \psi = \sum_{\mu=1}^{\infty} \lim_{\nu\to\infty} \int_{M_\mu} \psi_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{M_\mu} \psi_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \int_M \psi_\nu .$$

In 2. gilt:

$$\int_{M\cap K_\nu} \psi \leq \varliminf_{\mu\to\infty} \int_{M\cap K_\nu} \psi_\mu \leq \varliminf_{\mu\to\infty} \int_M (\psi_\mu - \chi) + \int_{M\cap K_\nu} \chi .$$

Der Grenzübergang $\nu \to \infty$ gibt a). Ist $\varliminf_{\mu\to\infty} \int_M \psi_\mu < \infty$, so existiert in b) wegen $\psi - \chi \geq 0$ nach der letzten Abschätzung $\int_M (\psi - \chi)$, also auch $\int_M \psi$. Sind der Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung $U(P|\alpha)$ beliebig gewählt, so ist $\infty > \varliminf_{\nu\to\infty} \int_M (\psi_\nu - \chi) \geq \varliminf_{\nu\to\infty} \int_{M\cap U(P|\alpha)} (\psi_\nu - \chi)$. Setzt man die Menge $[\psi = \infty]_P = N$, so ist $\alpha^{-1}(U(P|\alpha) \cap M \cap N)$ also auch $M \cap N$ eine Nullmenge. Damit ist 2. bewiesen. In 3. ist wegen $\psi_\nu \leq \psi$ auch $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \int_M \psi_\nu \leq \int_M \psi$. Mit 2. folgt die 3. Behauptung, w. z. b. w.

Ist $\psi(P, \alpha)$ über $M \subseteqq \mathfrak{M}^k$ integrierbar, so geht bei der im Anschluß an Definition 1 erklärten Umorientierung von $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{M}^k_+$ in $\mathfrak{M}^k_-$ eine Menge $M = M_+$ in M_-, eine Dichte $\psi(P, \alpha)$ in eine Dichte $\psi^*(P, \beta) = \psi(P, \alpha) \left.\frac{\partial \alpha^{-1}\beta}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$ mit $\alpha \in \mathfrak{P}^+_P$, $\beta \in \mathfrak{P}^-_P$ über. Wegen $\frac{\partial \alpha^{-1}\beta}{\partial \xi} < 0$ gilt $\int_{M_+} \psi = -\int_{M_-} \psi^*$.

§ 2. Integrale und Differentiale.

Der Raum der *Tensoren k-ter Dimension und m-ter Stufe* entsteht aus dem $k \cdot m$-dimensionalen Vektorraum über dem Ring der komplexen Zahlen, wenn man die Grundvektoren in der Form $\tilde{e}_{i_1} \tilde{e}_{i_2} \dots \tilde{e}_{i_m}$ mit $1 \leq i_\mu \leq k$, $\mu = 1, 2, \dots, m$ schreibt:

$$A = \sum_{i_m}^{k} a_{i_1 \dots i_m} \tilde{e}_{i_1} \dots \tilde{e}_{i_m} \quad [7]) \qquad (a_{i_1 \dots i_m} \text{ komplex}). \tag{2.1}$$

Ein solcher Tensor heiße eine *Polyade*[7]) *m-ter Stufe*, wenn $a_{i_1 \dots i_m} = \operatorname{sign}\binom{i_1 \dots i_m}{j_1 \dots j_m} a_{j_1 \dots j_m}$ ist. Für $m = 1$ erhält man den k-dimensionalen, komplexen Vektorraum. Das *äußere Produkt* der Vektoren $a_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu^{(\mu)} \tilde{e}_\nu$ sei die „*spezielle*“

[7]) Vergleiche [*14*], Kap. I A, § 1.

Polyade

$$(2.2)\qquad [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m] = \sum_{i\,m}^{k} \begin{vmatrix} a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_m}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_1}^{(m)}, \ldots, a_{i_m}^{(m)} \end{vmatrix} \tilde{\mathfrak{e}}_{i_1} \cdot \tilde{\mathfrak{e}}_{i_2} \ldots \tilde{\mathfrak{e}}_{i_m}.$$

Diese Produkte erzeugen den $\binom{k}{m}$ dimensionalen Vektorraum der Polyaden m-ter Stufe

$$(2.3)\qquad A = \sum_{i|m}^{k} a_{i_1 \ldots i_m} \tilde{\mathfrak{e}}_{i_2} \ldots \tilde{\mathfrak{e}}_{i_m} = \sum_{i|m}^{k\prime} a_{i_1 \ldots i_m} [\mathfrak{e}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{i_m}]\ ^{8}).$$

Eine Polyade 0-ter Stufe sei eine Zahl.

Zwischen den Polyaden wird ein assoziatives und distributives Produkt

$$(2.4)\qquad A \cdot B = \sum_{i|p}^{k\prime} \sum_{j|q}^{k\prime} a_{i_1 \ldots i_p} b_{j_1 \ldots j_q} [\mathfrak{e}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{i_p}, \mathfrak{e}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{j_q}] = (-1)^{pq} B A$$

erklärt. Die Vertauschungsregel $A B = (-1)^{pq} B A$ heiße *alternierend*. Es ist $[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p] [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_q] = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_q]$.

Diese Vektorprodukte dienen zur Definition der *alternierenden Differentiale*[9]). Der reellen unabhängigen Veränderlichen x_ν wird eine neue reelle unabhängige Veränderliche dx_ν zugeordnet. Es sei $\partial x_\nu = dx_\nu\, \mathfrak{e}_\nu$. Wegen $[\partial x_\nu] = \partial x_\nu$ kann man $[\partial x_{\mu_1}, \ldots, \partial x_{\mu_m}] = \partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_m}$ setzen. Sind die Funktionen $a_{\nu_1 \ldots \nu_m}(\mathfrak{x})$ alle auf einer gemeinsamen Menge M erklärt, so bilden die *„alternierenden Differentiale m-ter Stufe" auf M*

$$(2.5)\qquad \partial A^m = \sum_{\nu\,m}^{k\prime} a_{\nu_1 \ldots \nu_m}\, \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m}$$

einen Modul. Ein alternierendes Differential 0-ter Stufe ist eine Funktion. Das Produkt $\partial A^p\, \partial B^q$ ist vermöge (2.4) assoziativ, distributiv und alternierend. Sind die Funktionen f und f_ν auf M differenzierbar, so sind

$$(2.6)\qquad \partial f = \sum_{\nu=1}^{k} f_{x_\nu}\, \partial x_\nu,$$

$$(2.7)\qquad \partial f_1 \ldots \partial f_m = \sum_{\nu|m}^{k\prime} \frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_m})}\, \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m}$$

Beispiele alternierender Differentiale.

Die *Ableitung* eines alternierenden Differentials ∂A^m mit stetigdifferenzierbaren Koeffizienten sei

$$(2.8)\qquad \partial\, \partial A^m = \sum_{\nu|m}^{k\prime} \partial a_{\nu_1 \ldots \nu_m}\, \partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m}.$$

---

[8]) Zur Bezeichnung der Summation vergleiche S. 119.

[9]) Vergleiche zum Begriff des alternierenden Differentials auch [4].

Es gelten die Rechenregeln

$$\partial(\partial A^p \partial B^q) = \partial\partial A^p \partial B^q + (-1)^p \partial A^p \partial\partial B^q \tag{2.9}$$

$$\partial(\partial A^p + \partial B^p) = \partial\partial A^p + \partial\partial B^p \tag{2.10}$$

$$\partial(\partial\partial A^p) = 0, \tag{2.11}$$

wenn ∂A^p in (2.11) zweimal stetigdifferenzierbare Koeffizienten hat.

Die Menge M des $\mathfrak{y}$-Raumes werde durch $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ differenzierbar in die Menge N des $\mathfrak{x}$-Raumes abgebildet. Dann ist die Substitution σ

$$\begin{cases} \sigma\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y}), \quad \sigma\,\partial x_\mu = \partial\sigma\, x_\mu, \quad \sigma f(\mathfrak{x}) = f(\sigma\,\mathfrak{x}), \\ \sigma\,\partial A^m = \sum_{\nu|m}^{k}{}' \sigma a_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot \sigma\,\partial x_{\nu_1} \dots \sigma\,\partial x_{\nu_m} \end{cases} \tag{2.12}$$

ein Homomorphismus der alternierenden Differentiale auf M in die alternierenden Differentiale auf N. Ist $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ zweimal stetigdifferenzierbar, so ist σ bezüglich des Operators ∂ ein Modulhomomorphismus.

Auf einer Menge M einer orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ sei eine Dichte m-ter Stufe $a_{\mu_1 \dots \mu_m}$ gegeben. Werden der Punkt $P \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_P$ und die Umgebung $U(P|\alpha)$ beliebig gewählt, so sei durch

$$\partial A^m(Q, \alpha) = \sum_{\mu|m}^{k}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(Q, \alpha)\, \partial t_{\mu_1} \dots \partial t_{\mu_m} \tag{2.13}$$

mit $Q \in M \cap U(P|\alpha)$ ein *alternierendes Differential m-ter Stufe auf M* erklärt. Es besitze eine gewisse Eigenschaft, wenn der zugehörigen Dichte diese Eigenschaft zukommt. Man kürzt wieder ab:

$$\partial A^m(Q, \alpha) = \partial A^m(Q) = \partial A^m \quad \text{und} \quad \partial A^m(\alpha(\mathfrak{t}), \alpha) = \partial A^m(\mathfrak{t}; \alpha).$$

Wählt man die Abbildungen $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{P_1}$ und $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_2}$, sowie die uniformisierbaren Umgebungen $U(P_1|\alpha)$ und $U(P_2|\beta)$ beliebig, so gilt für $\beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t}) = \mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ nach (1.3) und (2.7)

$$\partial A^m(Q, \alpha) = \sum_{\mu|m}^{k}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(Q, \beta)\, \partial x_{\mu_1}(\mathfrak{t}) \dots \partial x_{\mu_m}(\mathfrak{t}) \tag{2.14}$$

mit $\alpha(\mathfrak{t}) = \beta(\mathfrak{x}) = Q \in U(P_1|\alpha) \cap U(P_2|\beta) \cap M$. Da in (2.12) die Abbildung σ ein Homomorphismus ist, sind Gleichheit, Summe, Produkt, Grenzwert von alternierenden Differentialen unabhängig von der Wahl von α erklärt. Dies gilt auch für die Ableitung, wenn $\mathfrak{M}^k$ zweimal stetigdifferenzierbar ist.

Definition 5. (Stetigdifferenzierbare Abbildungen.) *Durch $\sigma(Q)$ werde die offene Menge W der l-mal stetigdifferenzierbaren, orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ in die l-mal stetigdifferenzierbare, orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ abgebildet. Die Abbildung σ heiße l-mal stetigdifferenzierbar, wenn es zu jedem Punkt $S \in W$ und seinem Bildpunkt $R = \sigma(S)$ eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_R(\mathfrak{M}^k)$, eine Umgebung $U(R|\alpha) \subseteq \mathfrak{M}^k$, eine Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_S(\mathfrak{N}^q)$ und eine Umge-*

bung $U(S|\gamma) \subseteqq \mathfrak{R}^q$ mit $\sigma(U(S|\gamma)) \subseteqq U(R|\alpha)$ gibt, so daß die vermittelnde Abbildung $\mathfrak{t}(\mathfrak{w}) = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ auf der Urbildmenge $U'(S|\gamma)$ l-mal stetigdifferenzierbar ist.

Dies gilt dann auch für alle α, γ, $U(R|\alpha)$, $U(S|\gamma)$.

Satz 5. Substitution in Differentiale.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{R}^q$, $\mathfrak{M}^k$ seien orientiert. Durch $\sigma(Q)$ werde die offene Menge $W \subseteqq \mathfrak{R}^q$ in $\mathfrak{M}^k$ abgebildet. Es sei $M \subseteqq W$. Auf $N \supseteqq \sigma(M)$ sei ein Differential $\partial A^m(P, \alpha)$ erklärt.*

Behauptung. *Wählt man die Bezeichnungen von Definition 5, so wird durch die Abbildung $P = \sigma(Q)$ ein Homomorphismus*

$$\sigma\,\partial A^m(P) = \partial A^m(\sigma(Q), \alpha) = \sum_{\mu|m}^{k}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(P, \alpha)\,\partial t_{\mu_1}(\mathfrak{w}) \dots \partial t_{\mu_m}(\mathfrak{w}) \tag{2.15}$$

gegeben, wobei $Q = \gamma(\mathfrak{w}) \in M \cap U(S|\gamma)$ ist. Wenn $\mathfrak{R}^q$, $\mathfrak{M}^k$ und σ zweimal stetigdifferenzierbar sind, so stellt (2.15) ein Modulhomomorphismus bezüglich des Operators ∂ dar.

Beweis. Sind γ, $U(S|\gamma)$, α, $U(R|\alpha)$, $\mathfrak{t}(\mathfrak{w})$ wie in Definition 5 gewählt, so sei

$$a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma) = \sum_{\mu|m}^{k}{}' a_{\mu_1 \dots \mu_m}(\sigma(Q), \alpha)\,\frac{\partial(t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})}. \tag{2.16}$$

Ist $\tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{w}})$, $U(\tilde{S}|\tilde{\gamma})$, $\tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{t}})$, $U(\tilde{R}|\tilde{\alpha})$ eine zweite zulässige Wahl, und werden $\tilde{\mathfrak{t}}^*(\mathfrak{t}) = \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$, sowie $\tilde{\mathfrak{t}}(\mathfrak{w}) = \tilde{\mathfrak{t}}^*(\alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})) \equiv \tilde{\alpha}^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ abgekürzt, so gilt für jeden Punkt $Q = \gamma(\mathfrak{w})$ in $M_1 = U(S|\gamma) \cap U(\tilde{S}|\tilde{\gamma}) \cap M$ die Gleichung

$$\begin{aligned} a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma) &= \sum_{\mu|m}^{k}{}' \sum_{\varrho|m}^{k}{}' a_{\varrho_1 \dots \varrho_m}(\sigma(Q), \tilde{\alpha})\,\frac{\partial(\tilde{t}^*_{\varrho_1}, \dots, \partial\tilde{t}^*_{\varrho_m})}{\partial(t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_m})}\,\frac{\partial(t_{\mu_1}, \dots, t_{\mu_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})} \\ &= \sum_{\varrho|m}^{k}{}' a_{\varrho_1 \dots \varrho_m}(\sigma(Q), \tilde{\alpha})\,\frac{\partial(\tilde{t}_{\varrho_1}, \dots, \tilde{t}_{\varrho_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Also ist $a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma)$ unabhängig von der Wahl der Abbildung α und der Umgebung $U(R|\alpha)$ definiert. Mit $\tilde{\mathfrak{w}}(\mathfrak{w}) = \tilde{\gamma}^{-1}\gamma(\mathfrak{w})$ und $\hat{\mathfrak{t}}(\mathfrak{w}) = \tilde{\mathfrak{t}}(\gamma^{-1}\tilde{\gamma}(\mathfrak{w})) \equiv \tilde{\alpha}^{-1}\sigma\tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{w}})$ wird

$$\begin{aligned} a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma) &= \sum_{\lambda|m}^{q}{}' \sum_{\varrho|m}^{k}{}' a_{\varrho_1 \dots \varrho_m}(\sigma(Q), \tilde{\alpha})\,\frac{\partial(\hat{t}_{\varrho_1}, \dots, \hat{t}_{\varrho_m})}{\partial(\tilde{w}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{w}_{\lambda_m})}\,\frac{\partial(\tilde{w}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{w}_{\lambda_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})} \\ &= \sum_{\lambda|m}^{q}{}' a^*_{\lambda_1 \dots \lambda_m}(Q, \tilde{\gamma})\,\frac{\partial(\tilde{w}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{w}_{\lambda_m})}{\partial(w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_m})} \end{aligned} \tag{2.18}$$

für $Q \in M_1$. Daher ist $a^*_{\nu_1 \dots \nu_m}(Q, \gamma)$ eine Dichte m-ter Stufe auf $M \subseteqq \mathfrak{R}^q$. Die Homomorphie folgt aus (2.12), w. z. b. w.

Eine orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ von $\mathfrak{M}^k$ mit $q \leq k$ wird durch die identische Abbildung $\sigma(P) = P$ stetigdifferenzierbar in die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ abgebildet. Dadurch wird ein Differential ∂A^m auf $N \subseteq \mathfrak{M}^k$ als Differential auf $N \cap \mathfrak{N}^q = M$ bezüglich der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^q$ erklärt. Hat im Falle $m = q$ das Differential ∂A^q „längs" $\mathfrak{N}^q$ die Dichte ψ, so sei ∂A^q dann und nur dann über M integrierbar, wenn es ψ ist. Das Integral sei

$$\int_M \partial A^q = \int_M \psi. \tag{2.19}$$

Ist $q = k$ in Definition 5, so habe die Abbildung $\sigma(Q)$ eine positive Funktionaldeterminante, wenn $\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{w}} > 0$ ist. Dann wird eine offene Umgebung $V(S)$ des Punktes S topologisch auf eine offene Umgebung $V(R)$ des Bildpunktes R abgebildet. Die Umkehrung von $\sigma(Q)$ auf $V(S)$ sei mit $\sigma_S^{-1}(P)$ bezeichnet. Dann gilt der

Satz 6. Abbildung.

Voraussetzung. *Die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{N}^k$ und $\mathfrak{M}^k$ seien orientiert. Die offene Menge $H \subseteq \mathfrak{N}^k$ werde durch $\sigma(Q)$ stetigdifferenzierbar auf $G \subseteq \mathfrak{M}^k$ abgebildet. Die Abbildung $\sigma(Q)$ habe eine positive Funktionaldeterminante. Es sei*

$$\nu(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(Q) \neq P \\ 1 & \text{für } \sigma(Q) = P. \end{cases} \tag{2.20}$$

Auf der meßbaren Menge $N \subseteq \mathfrak{N}^k$ sei eine Funktion $\varphi(Q)$ und ein Differential $\partial A^k(Q)$ erklärt, deren Produkt $\varphi(Q)\, \partial A^k(Q)$ meßbar ist. Wenn $\sigma(S) = \sigma(T)$ ist, und $V(S)$ bzw. $V(T)$ die soeben beschriebenen Umgebungen sind, so sei

$$\sigma_S^{-1}\, \partial A^k = \sigma_T^{-1}\, \partial A^k \quad \text{auf} \quad \sigma\big(V(S) \cap N\big) \cap \sigma\big(V(T) \cap N\big).$$

Behauptung. *Durch $\partial B^k = \sigma_S^{-1}\, \partial A^k$ wird ein Differential auf $M = \sigma(N)$ eindeutig erklärt. Setzt man noch die Existenz eines der beiden Integrale in der folgenden Gl. (2.21) für $|\varphi|$ statt φ voraus, so existieren beide. Es gilt:*

$$\int_M \Big\{ \sum_{Q \in N} \nu(P, Q)\, \varphi(Q)\, \partial B^k(P) \Big\} = \int_N \varphi(Q)\, \partial A^k(Q). \tag{2.21}$$

Beweis. O. B. d. A. sei $H = \mathfrak{N}^k$ und $G = \mathfrak{M}^k$. Der Punkt $R \in \mathfrak{M}^k$, die Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_R(\mathfrak{M}^k)$, die Umgebung $U(R|\alpha)$ und der Punkt $P \in M \cap U(R|\alpha)$ werden beliebig gewählt. Die Punkte S und T mögen sich in $P = \sigma(S) = \sigma(T)$ abbilden. Wieder wählt man die Abbildungen $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_S(\mathfrak{N}^k)$ und $\delta(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{P}_T(\mathfrak{N}^k)$, sowie die Umgebungen $U(S|\gamma) \subseteq V(S)$ mit $\sigma\big(U(S|\gamma)\big) \subseteq U(R|\alpha)$ und $U(T|\delta) \subseteq V(T)$ mit $\sigma\big(U(T|\delta)\big) \subseteq U(R|\alpha)$ beliebig. Man setzt $\mathfrak{w}(\mathfrak{t}) = \gamma^{-1}\sigma_S^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}) = \delta^{-1}\sigma_T^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$. Für $P = \alpha(\mathfrak{t})$ gilt:

$$\psi\big(\sigma_S^{-1}(P), \gamma\big) \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{t}}\, \partial t_1 \ldots \partial t_k = \sigma_S^{-1}\, \partial A^k = \sigma_T^{-1}\, \partial A^k = \psi\big(\sigma_T^{-1}(P), \delta\big) \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{t}}\, \partial t_1 \ldots \partial t_k.$$

Daher ist $\psi^*(P, \alpha) = \psi\big(\sigma_S^{-1}(P), \gamma\big) \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{t}}$ unabhängig von der speziellen Wahl von S, γ und $U(S|\gamma)$ eindeutig auf $M \cap U(R|\alpha)$ erklärt. Wählt man einen

anderen Punkt $\overline{R} \in \mathfrak{M}^k$, eine andere Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{\overline{R}}(\mathfrak{M}^k)$ und eine Umgebung $U(\overline{R}|\beta)$, liegt im Durchschnitt $U(R|\alpha) \cap U(\overline{R}|\beta) \cap M$ der Punkt $P = \alpha(\mathfrak{t}) = \beta(\mathfrak{x})$, und setzt man $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}) = \beta^{-1}\alpha(\mathfrak{t})$, sowie $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\sigma_S^{-1}\alpha\alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\sigma_S^{-1}\beta(\mathfrak{x})$, so erhält man:

$$\psi^*(P, \alpha) = \psi\left(\sigma_S^{-1}(P), \gamma\right) \frac{\partial \mathfrak{w}^*}{\partial \mathfrak{x}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}} = \psi^*(P, \beta) \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{t}}.$$

Daher ist ψ^* eine Dichte auf M. Sie definiert $\partial B^k = \psi^*(P, \alpha)\, \partial t_1 \dots \partial t_k$, für das $\sigma\, \partial B^k = \partial A^k$ gilt. Die Mengen $\hat{N} = U(S|\gamma) \cap N$, $N' = \gamma^{-1}(\hat{N})$, $M' = \alpha^{-1}\sigma\gamma(N')$ und $\hat{M} = \alpha(M') = \sigma\left(U(S|\gamma) \cap N\right)$ sind alle meßbar. Da $\varphi \cdot \psi$ meßbar ist, ist es auch $\varphi \cdot \psi^*$. Es sei $|\varphi|\, \partial A^k$ über N, also $|\varphi|\psi$ über N, also auch über $\hat{N}$ integrierbar. Dann ist auch $|\varphi\, \psi|$, also $\varphi\, \psi$ über N bzw. $\hat{N}$ integrierbar. Man hat

$$(2.22) \qquad \int_{\hat{N}} \varphi\, \psi = \int_{N'} \varphi\, \psi(\mathfrak{w}; \gamma)\, dw_1 \dots dw_k = \int_{M'} \varphi\, \psi\left(\mathfrak{w}(\mathfrak{t}); \gamma\right) \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{t}}\, dt_1 \dots dt_k = \int_{\hat{M}} \varphi\, \psi^*.$$

Wegen

$$(2.23) \qquad \sum_{Q \in \hat{N}} \nu(P, Q)\, \varphi(Q) = \begin{cases} \varphi\left(\sigma_S^{-1}(P)\right) & \text{für} \quad P \in M \\ 0 & \text{für} \quad P \notin M \end{cases}$$

gilt

$$(2.24) \qquad \int_{\hat{N}} \varphi\, \psi = \int_{M} \left\{ \sum_{Q \in \hat{N}} \nu(P, Q)\, \varphi(Q)\, \psi^*(P) \right\}.$$

Wenn dagegen in (2.21) das linke Integral mit $|\varphi|$ statt φ existiert, so ist auch $\sum_{Q \in N} \nu(P, Q)\, |\varphi(Q)|\, |\psi^*|$ über M integrierbar. Wegen $|\varphi\left(\sigma_S^{-1}(P)\right) \psi^*(P)| \leq \sum_{Q \in N} \nu(P, Q)\, |\varphi(Q)|\, |\psi^*|$ auf $\hat{M}$ ist auch die meßbare Dichte $\varphi\, \psi^*$ über $\hat{M}$ integrierbar. Also kann man (2.22) in umgekehrter Reihenfolge berechnen, woraus mit (2.23) wieder (2.24) folgt.

Zu einer beliebigen kompakten Menge $K \subseteq \mathfrak{N}^q$ wählt man eine DIEUDONNÉ-Zerlegung λ_μ, $U(S_\mu|\gamma_\mu)$. Da $\lambda_\mu(Q)$ außerhalb von $U(S_\mu|\gamma_\mu)$ verschwindet, so folgt aus (2.24) mit Satz 3,3

$$(2.25) \qquad \begin{aligned} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N \cap K} \nu(P, Q)\, \varphi(Q)\, \psi^*(P) \right\} &= \sum_{\mu=1}^{n} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N \cap K} \nu(P, Q)\, \lambda_\mu(Q)\, \varphi\, \psi^* \right\} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \int_N \lambda_\mu \varphi\, \psi = \int_N \varphi\, \psi. \end{aligned}$$

Nun wählt man eine Folge kompakter Mengen $K_\nu \subseteq K_{\nu+1}$ mit $K_0 = \emptyset$, die $N \subseteq \bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ überdecken. Wendet man (2.25) auf $|\varphi|\, |\psi|$ an, so ist

$$(2.26) \qquad \begin{aligned} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N} \nu(P, Q)\, |\varphi(Q)|\, |\psi^*| \right\} &= \lim_{\nu \to \infty} \int_M \left\{ \sum_{Q \in N \cap K_\nu} \nu(P, Q)\, |\varphi|\, |\psi^*| \right\} \\ &= \lim_{\nu \to \infty} \int_{N \cap K_\nu} |\varphi\, \psi| = \int_N |\varphi\, \psi|, \end{aligned}$$

denn es existiert in (2.26) wenigstens das erste oder letzte Integral. Gemäß Satz 4,1 gilt (2.26) nachträglich auch ohne Betragszeichen, w. z. b. w.

Um den Satz von FUBINI auf Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^k$ übertragen zu können, wird $\mathfrak{M}^k$ durch eine Abbildung $\sigma(P)$ von $\mathfrak{M}^k$ in $\mathfrak{N}^l$ in „*Schichten* $\sigma(P) = const$" zerlegt. Der Satz hat die formale Gestalt

$$\int_{\mathfrak{M}^k} = \int_{Q \in \mathfrak{N}^l} \int_{\sigma(P)=Q} .$$

Von der Abbildung $\sigma(P)$, die die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ in Schichten zerlegt, werde verlangt:

Die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ werde durch $\sigma(P)$ stetig in die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^l$ abgebildet, so daß gilt:

1. *Das Urbild $\mathfrak{M}_Q = \sigma^{-1}(Q)$ eines jeden Punktes $Q \in \mathfrak{N}^l$ ist entweder leer oder eine s-dimensionale, orientierte Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^k$ mit $s = k - l > 0$.*

2. *Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}^k$ gibt es eine Umgebung $U(P_0) \subseteq \mathfrak{M}^k$, eine offene Nullpunktsumgebung $\mathfrak{V}(P_0)$ eines $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_s)$-Raumes und zum Bildpunkt $Q_0 = \sigma(P_0) \in \mathfrak{N}^l$ eine offene Umgebung $\mathfrak{Q}(Q_0) \subseteq \mathfrak{N}^l$, so daß das Produkt $\mathfrak{Q}(Q_0) \times \mathfrak{V}'(P_0)$ durch eine Abbildung $\tau(Q, \mathfrak{v}) = \tau_{P_0}(Q, \mathfrak{v})$ topologisch auf $U(P_0)$ abgebildet wird.*

3. *Es gibt eine $\mathfrak{Q}(Q_0)$ uniformisierende Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$, so daß $\tau(\alpha(\mathfrak{t}), \mathfrak{v}) = \zeta(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$ zu $\mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ gehört und $U(P_0)$ uniformisiert.*

4. *Ist der Punkt Q_1 in $\mathfrak{Q}(Q_0)$ beliebig gewählt, so uniformisiert $\tau(Q_1, \mathfrak{v}) = \varrho(\mathfrak{v})$ bei festem Q_1 die Umgebung $\mathfrak{V}_{Q_1}(P_0) = \mathfrak{M}_{Q_1} \cap U(P_0)$ von $P_1 = \tau(Q_1, 0)$.*

1. Beispiel. Der Produktraum $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{N}^l \times \mathfrak{R}^s$ der Punkte $P = (Q, R)$ wird durch die Projektion $\sigma(P) = Q$ in Schichten $\mathfrak{M}_Q = [P = (Q, R)]_P$ zerlegt.

2. Beispiel. Eine einmal stetigdifferenzierbare Abbildung $\sigma(P)$, die in der Bezeichnungsweise von Definition 5 eine Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{w}}\right)$ vom Rang l hat, zerlegt $\mathfrak{M}^k$ in Schichten, wie gleich bewiesen werden wird. Um die Orientierung von $\mathfrak{M}_Q$ festzulegen, wählt man die Abbildungen $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}_Q)$, $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_Q(\mathfrak{N}^l)$ und $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ beliebig und setzt $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_l) = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ bzw. $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) = \gamma^{-1}\beta(\mathfrak{x})$. Dann ist die Schicht $\mathfrak{M}_Q$ so zu orientieren, daß die Determinante

$$(\text{grad}\, t_1, \ldots, \text{grad}\, t_l, \mathfrak{w}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{w}_{x_s}) > 0 \tag{2.27}$$

ist. Die Gradienten sind bei $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ zu bilden.

Beweis. Wählt man die Abbildungen α und γ wie in Definition 5, so hat die Matrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{w}}\right)$ den Rang l. Man kann $\mathfrak{t} = \alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})$ nach l geeigneten der Koordinaten $w_1, \ldots, w_k$ auflösen. Man erhält die Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$, die bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ die Nullpunktsumgebung $\mathfrak{Q}'(Q_0) \times \mathfrak{V}'(P_0) = [|t_\nu| < \varepsilon]_\mathfrak{t} \times [|v_\nu| < \varepsilon]_\mathfrak{v}$ topologisch und beiderseits stetigdifferenzierbar auf eine Nullpunktsumgebung $U'(P_0)$ des $\mathfrak{w}$-Raumes abbildet. Wählt man die $\mathfrak{v}$-Koordinaten geeignet, so ist $\frac{\partial \mathfrak{w}(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})}{\partial(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})} > 0$. Daher wird bei hinreichend kleinem

$\varepsilon > 0$ durch die Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}(t, \mathfrak{v}))$ eine Umgebung $U(P_0) = \gamma(U'(P_0))$ uniformisiert. Mit $\mathfrak{Q}(Q_0) = \alpha(\mathfrak{Q}'(Q_0))$ und $\tau_{P_0}(Q, \mathfrak{v}) = \tau(Q, \mathfrak{v}) = \gamma(\mathfrak{w}(\alpha^{-1}(Q), \mathfrak{v}))$ werden 2. und 3. erfüllt. Bei festem $Q_1 \in \mathfrak{Q}(Q_0)$ bildet $\tau(Q_1, \mathfrak{v})$ die Nullpunktsumgebung $\mathfrak{V}'(P_0)$ topologisch auf $\mathfrak{V}_{Q_1}(P_0) = \mathfrak{M}_{Q_1} \cap U(P_0)$ ab und werde als solches mit $\varrho(\mathfrak{v}) = \varrho_{P_0}(\mathfrak{v})$ bezeichnet. Die Willkür, die noch in der Konstruktion der $U(P_0)$, $\mathfrak{Q}(Q_0)$, $\mathfrak{V}'(P_0)$, $\mathfrak{V}_Q(P_0)$, $\tau(Q, \mathfrak{v})$, $\alpha(t)$ lag, werde beseitigt, indem man für jedes P_0 eine beliebige, zulässige Konstruktion fest wählt.

Um 1. auch zu erfüllen, müssen noch die Abbildungsmengen $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$ zu jedem Punkt $Q_1 \in \mathfrak{N}^l$ mit $\mathfrak{M}_{Q_1} \neq \emptyset$ und jedem Punkt $P_1 \in \mathfrak{M}_{Q_1}$ definiert werden. Q_1 und P_1 seien fest, P_0 variabel. Dann sei $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$ die Menge aller Abbildungen $\varrho_{P_0}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$ für die der Punkt P_1 zu $U(P_0) \cap \mathfrak{M}_{Q_1} = \mathfrak{V}_{Q_1}(P_0)$ gehört und $P_1 = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}_1)$ mit $\mathfrak{v}_1 \in \mathfrak{V}'(P_0)$ gilt. Die Forderungen von Definition 1 sind erfüllt. Es gilt nämlich:

1a) $\varrho_{P_0}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$ bildet die um $\mathfrak{v}_1$ verschobene Umgebung $\mathfrak{V}'(P_0) - \mathfrak{v}_1$ auf $\mathfrak{V}_{Q_1}(P_0)$ topologisch ab, wobei $\varrho_{P_0}(0 + \mathfrak{v}_1) = P_1$ ist.

1b) Hat $\mathfrak{v}_2 \in \mathfrak{V}'(P_0) - \mathfrak{v}_1$ den Bildpunkt $P_2 = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}_2)$, so gehört wegen $\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 \in \mathfrak{V}'(P_0)$ auch die Abbildung $\tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1) = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_3)$ zu $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$.

2. Sind $\tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$ und $\tau_{\bar{P}_0}(Q_1, \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}_1)$ zwei Abbildungen aus $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}_{Q_1})$, so gibt es nach Konstruktion Abbildungen $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$ und $\bar{\alpha}(\bar{t}) \in \mathfrak{P}_{\bar{Q}_0}(\mathfrak{N}^l)$ mit $P_1 = \alpha(t_1) = \bar{\alpha}(\bar{t}_1)$ und mit $Q_0 = \sigma(P_0)$, $\bar{Q}_0 = \sigma(\bar{P}_0)$, so daß die Abbildungen $\tau_{P_0}(\alpha(t + t_1), \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1)$ und $\tau_{\bar{P}_0}(\bar{\alpha}(\bar{t} + \bar{t}_1), \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}_1)$ zu $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{M}^k)$ gehören. Zwischen ihnen vermittelt die Transformation

$$\bar{t} = \bar{t}(t), \quad \text{definiert durch} \quad \bar{\alpha}(\bar{t} + \bar{t}_1) = \alpha(t + t_1) = Q$$
$$\bar{\mathfrak{v}} = \bar{\mathfrak{v}}_Q(\mathfrak{v}), \quad \text{definiert durch} \quad (Q, \bar{\mathfrak{v}} + \bar{\mathfrak{v}}_1) = \tau_{\bar{P}_0}^{-1} \tau_{P_0}(Q, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1).$$

Sie ist stetigdifferenzierbar und hat eine positive Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\bar{t}, \bar{\mathfrak{v}})}{\partial(t, \mathfrak{v})} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_Q}{\partial \mathfrak{v}} > 0$. Wegen $\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} > 0$ ist auch $\frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_Q}{\partial \mathfrak{v}} > 0$. Dasselbe gilt insbesondere für $t = \bar{t} = 0$. Dann vermittelt aber $\bar{\mathfrak{v}}_{Q_1}(\mathfrak{v}) = \varrho_{\bar{P}_0}^{-1} \varrho_{P_0}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) - \bar{\mathfrak{v}}_1$ mit $\frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_{Q_1}}{\partial \mathfrak{v}} > 0$ gerade zwischen den Abbildungen $\varrho_{\bar{P}_0}$ und ϱ_{P_0}. Somit sind alle Forderungen von Definition 1 erfüllt. $\mathfrak{M}_Q$ ist eine s-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit, für die 4. gilt. Somit sind die Bedingungen 1.—4. nachgewiesen, die an die Schichtzerlegung $\sigma(P)$ gestellt werden.

Die Forderung (2.27) legt eine und nur eine Orientierung fest. Sie ist genau dann erfüllt, wenn sie bereits für ein Tripel α, β, γ erfüllt ist. Wählt man speziell $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$, $\gamma(\mathfrak{w}) = \tau(\alpha(t), \mathfrak{v})$, $\beta(\mathfrak{x}) = \tau(Q_0, \mathfrak{v})$ d. h. $\mathfrak{w} \equiv (t, \mathfrak{v})$, $\mathfrak{t} \equiv t$, $\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{v}$ so wird $(\operatorname{grad} t_1, \ldots, \operatorname{grad} t_l, \mathfrak{w}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{w}_{x_s}) = 1 > 0$, w. z. b. w.

Behält man die Bezeichnungen der Bedingungen 1.—4. bei, so kann man den folgenden Satz formulieren:

Satz 7. Schichtweise Integration (Fubini).

Voraussetzung. *Von den orientierten, kompakt überdeckbaren Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^k$ und $\mathfrak{N}^l$ werde $\mathfrak{M}^k$ durch $\sigma(P)$ in $\mathfrak{N}^l$ stetig abgebildet und gemäß*

den Bedingungen 1.—4. in s-dimensionale Schichten $\mathfrak{M}_Q = [\sigma(P) = Q]_P$ *zerlegt. Es sei* $s = k - l > 0$. *Die Dichte* ψ *sei über die meßbare Menge* M *integrierbar.*

Behauptung.

1. *Zu jedem festen Punkt* $Q_0 \in \mathfrak{N}^l$ *als Parameter und jeder festen Abbildung* $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$ *als Parameter wird auf* $\mathfrak{M}_Q \cap M$ *eine Dichte*

$$\psi^*(P_0, \beta | Q_0, \alpha) = \psi(P_0, \zeta) \frac{\partial \varrho^{-1} \beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}} \tag{2.28}$$

als Funktion des Punktes $P_0 \in M \cap \mathfrak{M}_{Q_0}$ *und der Abbildung* $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}_{Q_0})$ *definiert. In (2.28) ist* $\varrho(\mathfrak{v}) = \tau_{P_0}(Q_0, \mathfrak{v})$ *und* $\zeta = \zeta(t, \mathfrak{v}) = \tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})$ *abgekürzt. Für* $Q_1 = \alpha(t_1) \subseteqq \mathfrak{Q}(Q_0)$ *und* $P_1 = \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}_1)$ *gilt*

$$\psi^*\big(P_1, \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) \,|\, Q_1, \alpha(t + t_1)\big) = \psi(P_1, \zeta). \tag{2.29}$$

2. *Es gibt eine Nullmenge* $N < \mathfrak{N}^l$, *so daß für jeden Punkt* $Q_0 \in \mathfrak{N}^l - N$ *und jede Abbildung* $\alpha(t) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{N}^l)$ *die Dichte* $\psi^*(P | Q_0, \alpha)$ *über* $M \cap \mathfrak{M}_{Q_0}$ *integrierbar ist.*

3. *Das Integral* $\int\limits_{\mathfrak{M}_Q \cap M} \psi^*(P | Q, \alpha)$ *stellt eine über* $\mathfrak{N}^l - N$ *integrierbare Dichte dar, für die die Gleichung*

$$\int\limits_M \psi(P) = \int\limits_{Q \in \mathfrak{N}^l - N} \; \int\limits_{P \in \mathfrak{M}_Q \cap M} \psi^*(P)$$

besteht. Statt $\mathfrak{N}^l - N$ *werde auch kurz* $\mathfrak{N}^l$ *geschrieben.*

Beweis. Ist $\bar{\beta}(\bar{\mathfrak{x}})$ eine zweite Abbildung aus $\mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}_{Q_0})$, so gilt nach (2.28)

$$\begin{aligned}
\psi^*(P_0, \underline{\beta} | Q_0, \alpha) &= \psi(P_0, \zeta) \left. \frac{\partial \varrho^{-1} \bar{\beta} \bar{\beta}^{-1} \beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}} \right|_{\mathfrak{x}=0} \\
&= \psi(P_0, \zeta) \left. \frac{\partial \varrho^{-1} \bar{\beta}(\bar{\mathfrak{x}})}{\partial \bar{\mathfrak{x}}} \right|_{\bar{\mathfrak{x}}=0} \left. \frac{\partial \bar{\beta}^{-1} \beta(\mathfrak{x})}{\partial \mathfrak{x}} \right|_{\mathfrak{x}=0} \\
&= \psi^*(P_0, \bar{\beta} | Q_0, \alpha) \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}} \right|_{\mathfrak{x}=0}
\end{aligned}$$

Nach Definition 2 ist ψ^* eine Dichte auf $M \cap \mathfrak{M}_{Q_0}$. Ihr Definitionsbereich bezüglich β kann so erweitert werden, daß auch (1.2) und (1.3) gelten. Die Gl. (2.29) folgt aus:

$$\begin{aligned}
&\psi^*\big(P_1, \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) | Q_1, \alpha(t + t_1)\big) \\
&\quad = \psi^*\big(P_1, \tau_{P_1}(Q_1, \mathfrak{v}) | Q_1, \alpha(t + t_1)\big) \left. \frac{\partial \varrho_{P_1}^{-1} \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v})}{\partial \mathfrak{v}} \right|_{\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1} \\
&\quad = \psi\big(P_1, \tau_{P_1}(\alpha(t + t_1), \mathfrak{v})\big) \left. \frac{\partial \tau_{P_1}^{-1} \tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})}{\partial (t, \mathfrak{v})} \right|_{t=t_1, \mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1} \\
&\quad = \psi\big(P_1, \tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})\big).
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Wird die Abbildung $\tilde{\alpha}(\tilde{t})$ in $\mathfrak{P}_{Q_1}(\mathfrak{R}')$ beliebig gewählt, so gehört mit $\tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})$ auch die Abbildung $\tau_{P_0}(\tilde{\alpha}(\tilde{t}), \mathfrak{v})$ zu $\mathfrak{P}_{P_1}(\mathfrak{R}')$. Also wird

$$\psi\left(P_1, \tau_{P_0}(\alpha(t), \mathfrak{v})\right) = \psi\left(P_1, \tau_{P_0}(\tilde{\alpha}(\tilde{t}), \mathfrak{v})\right) \frac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \tag{2.30}$$

oder

$$\psi^*\left(P_1, \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \,|\, Q_1, \alpha(t+t_1)\right) = \psi\left(P_1, \tau_{P_0}(\tilde{\alpha}(\tilde{t}), \mathfrak{v})\right) \frac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \tag{2.31}$$

Es sei $M' = \zeta^{-1}\left(U(P_0) \frown M\right)$ und $\alpha^{-1}\left(\mathfrak{Q}(Q_0)\right) = \mathfrak{Q}'(Q_0)$. Bei festem $t_1 \in \mathfrak{Q}'(Q_0)$ weder der Querschnitt $[(t_1, \mathfrak{v}) \in M']_{\mathfrak{v}} = M_{t_1}$ gesetzt. Nach FUBINI gilt:

$$\int\limits_{M \frown U(P_0)} \psi = \int\limits_{M'} \psi = \int\limits_{\mathfrak{Q}'(Q_0)} \left\{ \int\limits_{M_t} \psi\left(\zeta(t, \mathfrak{v}), \zeta\right) d v_1 \dots d v_s \right\} d t_1 \dots d t_l \tag{2.32}$$

wobei das innere Integral

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{M_{t_1}} \psi\left(\zeta(t_1, \mathfrak{v}), \zeta\right) d v_1 \dots d v_s \\ \displaystyle = \int\limits_{M_{t_1}} \psi^*\left(\tau(Q_1, \mathfrak{v}), \tau(Q_1, \mathfrak{v}) \,|\, Q_1, \alpha(t+t_1)\right) d v_1 \dots d v_s \\ \displaystyle = \int\limits_{M_{t_1}} \psi^*\left(\tau(Q_1, \mathfrak{v}), \tau(Q_1, \mathfrak{v}) \,|\, Q_1, \tilde{\alpha}(\tilde{t})\right) d v_1 \dots d v_s \frac{\partial \tilde{\alpha}^{-1}\alpha(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \end{cases} \tag{2.33}$$

für alle $t_1 \in \mathfrak{Q}'(Q_0) - N'(P_0)$ existiert. $N'(P_0)$ ist ei e Nullmenge, deren Bild $N(P_0) = \alpha\left(N'(P_0)\right)$ ist. In $U(P_0)$ werden offene, beschränkte Umgebungen $U_2(P_0)$, $U_3(P_0)$ von P_0 mit $\overline{U}_3(P_0) \subset U_2(P_0)$, $\overline{U}_2(P_0) \subset U(P_0)$ gewählt. Sind der Punkt $Q_1 \in \mathfrak{Q}(Q_0) - N(P_0)$ und die Abbildung $\tilde{\alpha}(\tilde{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_1}(\mathfrak{R}')$ beliebig gewählt, so gibt es zu jedem Punkt $P_1 \in \mathfrak{M}_{Q_1} \frown \overline{U}_2(P_0)$ eine Umgebung $\mathfrak{W} \subseteqq \mathfrak{V}_{Q_1}(P_0)$ von P_1, bzw. zu jedem Punkt $P_1 \in \mathfrak{M}_{Q_1} - \overline{U}_2(P_0)$ eine Umgebung $\mathfrak{W} \subseteqq \mathfrak{M}_{Q_1} - \overline{U}_2(P_0)$. Da im ersten Fall (2.33) gilt, im zweiten Fall $M \frown \mathfrak{W} \frown \overline{U}_2(P_0)$ leer ist, ist $\psi^*\left(\tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}),\ \tau_{P_0}(Q_1, \mathfrak{v}) \,|\, Q_1, \tilde{\alpha}\right)$ über $M \frown \mathfrak{W} \frown \overline{U}_2(P_0)$ integrierbar. Daher ist $\psi^*(P, \beta \,|\, Q_1, \tilde{\alpha})$ über $M \frown \mathfrak{M}_{Q_1} \frown \overline{U}_2(P_0)$ örtlich, also auch „global" integrierbar. Ist aber $Q_1 \notin \mathfrak{Q}(Q_0)$, so ist $\overline{U}_2(P_0) \frown \mathfrak{M}_{Q_1}$ leer; denn für jeden Punkt $P_1 \in \overline{U}_2(P_0) \frown \mathfrak{M}_{Q_1}$ gilt $P_1 = \tau(Q_1, \mathfrak{v}_1)$ mit $Q_1 = \sigma(P_1) \in \mathfrak{Q}(Q_0)$. Wenn also $Q \in \mathfrak{R}' - N(P_0)$ und $\tilde{\alpha}(\tilde{t}) \in \mathfrak{P}_Q(\mathfrak{R}')$ beliebig gewählt sind, und $M_Q = M \frown \mathfrak{M}_Q$ gesetzt wird, so existiert das Integral

$$\chi(Q, \tilde{\alpha}) = \int\limits_{M_Q \frown \overline{U}_2(P_0)} \psi^*(P \,|\, Q, \tilde{\alpha}).$$

Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

Wenn $\bar{\alpha}(\bar{t})$ eine zweite Abbildung aus $\mathfrak{P}_Q(\mathfrak{R}')$ ist, so folgt aus (2.33)

$$\chi(Q, \bar{\alpha}) = \chi(Q, \tilde{\alpha}) \frac{\partial \bar{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\Big|_{\tilde{t}=0}.$$

Daher ist $\chi(Q, \tilde{\alpha})$ eine Dichte auf $\mathfrak{R}^l - N(P_0)$. Schreibt man (2.32) für $\overline{U}_2(P_0)$ statt $U(P_0)$ an, so wird

$$\int\limits_{M \cap \overline{U}_2(P_0)} \psi(P) = \int\limits_{Q \in \mathfrak{R}^l - N(P_0)} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap \overline{U}_2(P_0)} \psi^* \right\}. \tag{2.34}$$

Abzählbar viele $U_1(P_\nu)$ überdecken die Menge M. Es ist $N^* = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N(P_\nu)$ wieder eine Nullmenge. Die kompakten Mengen $K_\varrho = \bigcup_{\nu=1}^{\varrho} \overline{U}_3(P_\nu)$ wachsen monoton: $K_\varrho \subseteqq K_{\varrho+1}$. Nach Satz 3 ist ψ^* für jedes $Q \in \mathfrak{R}^l - N$ über $M_Q \cap K_\varrho$ integrierbar. Bezüglich der Überdeckung $U_2(P_\nu)$ von K_ϱ werde eine DIEUDONNÉ-Zerlegung $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$ gewählt. Die Gl. (2.34) gilt mit demselben $N(P_0)$ auch für $\lambda_\nu \psi^*$ bzw. $\lambda_\nu \psi$ und $M_Q \cap K_\varrho$ statt ψ^* bzw. ψ und M_Q. Es ist

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{M_Q \cap \overline{U}_2(P_\nu) \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi^* = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi^* = \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \psi^*$$

als Summe endlich vieler Dichten wieder eine Dichte auf $\mathfrak{R}^l - N^*$. Daher gilt

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{M \cap K_\varrho} \psi = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{M \cap \overline{U}_2(P_\nu) \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \int\limits_{\mathfrak{R}^l - N^*} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap \overline{U}_2(P_\nu) \cap K_\varrho} \lambda_\nu \psi^* \right\} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{R}^l - N^*} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} \psi^* \right\}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Wendet man (2.35) auf $|\psi|$ statt ψ an, so gilt nach Satz 4

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_M |\psi| = \lim_{\varrho \to \infty} \int\limits_{M \cap K_\varrho} |\psi| = \lim_{\varrho \to \infty} \int\limits_{\mathfrak{R}^l - N^*} \left\{ \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} |\psi|^* \right\} \\ \qquad = \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{R}^l - N} \lim_{\varrho \to \infty} \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} |\psi^*| = \int\limits_{\mathfrak{R}^l - N} \int\limits_{M_Q} |\psi^*|. \end{cases} \tag{2.36}$$

Dabei ist $\lim\limits_{\varrho \to \infty} \int\limits_{M_Q \cap K_\varrho} |\psi^*|$ für alle $Q \in \mathfrak{R}^l - N$ vorhanden und als Grenzwert einer Dichte wieder eine Dichte. Die Nullmenge N umfaßt N^*. Die Dichte $\psi^*(P|Q, \alpha)$ ist über M_Q für jedes feste $Q \in \mathfrak{R}^l - N$ und $\alpha \in \mathfrak{P}_Q(\mathfrak{R}^l)$ integrierbar. Wegen $\left| \int\limits_{M_Q \cap K} \psi^* \right| \leq \int\limits_{M_Q} |\psi^*|$ gilt (2.36) mit demselben N für ψ und ψ^*, w. z. b. w.

Zusatz 1. *Die meßbare Dichte ψ ist sicher über die meßbare Menge M integrierbar, wenn $|\psi^*|$ über fast alle M_Q integrierbar ist und $\int\limits_{\mathfrak{R}^l} \int\limits_{M_Q} |\psi^*|$ existiert.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem entsprechenden Fall des gewöhnlichen Satzes von FUBINI.

Zusatz 2. *Ist ψ die Dichte eines über M integrierbaren Differentials $\partial \varphi^s(P)\, \partial \xi^l(\sigma(P))$, so gilt*

$$\int\limits_M \partial \varphi^s(P)\, \partial \xi^l(\sigma(P)) = (-1)^{l\,s} \int\limits_{Q \in \mathfrak{R}^l - N} \left\{ \int\limits_{P \in M_Q} \partial \varphi^s(P) \right\} \partial \xi^l(Q), \tag{2.37}$$

wobei $N = N_1 \cup N_2$ ist. N_1 ist eine Nullmenge und $N_2 = [\partial\xi^l(Q) = 0]_Q$. Das innere Integral existiert sicher für jedes $Q \in \mathfrak{R}^l - N$.

Beweis. Wählt man die Abbildungen $\gamma(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ und $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{Q_0}(\mathfrak{R}^l)$ mit $Q_0 = \sigma(P_0)$ beliebig, so gilt auf M

$$\partial\varphi^s(P) = \sum_{\mu|s}{}' \varphi_{\mu_1,\ldots,\mu_s}(P,\gamma)\,\partial w_{\mu_1}\ldots\partial w_{\mu_s}$$

$$\partial\xi^l(Q) = \xi(Q,\alpha)\,\partial t_1\ldots\partial t_l,$$

$$\partial\xi^l(\sigma(P)) = \xi(\sigma(P),\alpha)\sum_{\nu|l}{}' \frac{\partial\alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})}{\partial(w_{\nu_1},\ldots,w_{\nu_l})}\,\partial w_{\nu_1}\ldots\partial w_{\nu_l},$$

$$\psi(P,\gamma) = \sum_{\nu|l}{}' \pm\varphi_{\mu_1,\ldots,\mu_s}(P,\gamma)\,\xi(\sigma(P),\alpha)\,\frac{\partial\alpha^{-1}\sigma\gamma(\mathfrak{w})}{\partial(w_{\nu_1},\ldots,w_{\nu_l})},$$

wobei $\mu_1,\ldots,\mu_s,\nu_1,\ldots,\nu_l$ eine Permutation der Zahlen $1,2,\ldots,k$ mit $\nu_1<\ldots<\nu_l, \mu_1<\ldots<\mu_s$ ist. Speziell kann man $\gamma(\mathfrak{w}) = \tau(\alpha(\mathfrak{t}),\mathfrak{v})$ mit $\mathfrak{w} = (\mathfrak{t},\mathfrak{v})$ wählen. Dann wird

$$\psi^*(P,\tau(Q,\mathfrak{v})|Q,\alpha) = (-1)^{ls}\varphi_{l+1,\ldots,k}(P,\gamma)\,\xi(Q,\alpha).$$

Dabei ist $\varphi_{l+1,\ldots,k}(P,\gamma)$ die Dichte von $\partial\varphi^s$ längs $\mathfrak{M}_Q$. Man hat

$$\int_M \psi = \int_{\mathfrak{R}^l}\left\{\int_{M_Q}(-1)^{ls}\varphi_{l+1,\ldots,k}\,\xi(Q,\alpha)\right\} = (-1)^{ls}\int_{\mathfrak{R}^l-N}\left\{\int_{M_Q}\partial\varphi^s(P)\right\}\xi(Q,\alpha),$$

wobei das Integral $\int_{M_Q}\partial\varphi^s$ für alle Q mit $\xi(Q,\alpha)\neq 0$ bis auf eine Nullmenge existiert, w. z. b. w.

Auf Mannigfaltigkeiten wird der Gaussʃche *Integralsatz*, der dann auch Stokesʃcher *Integralsatz* genannt werden kann, benötigt werden. Zunächst sind noch einige Vorbereitungen zu treffen.

Die orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ enthalte die orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{k-1}$. Zum Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}^{k-1}$ gibt es in $\mathfrak{M}^k$ eine Umgebung $U(P_0)$, die durch eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ uniformisiert wird, und für die $U(P_0) \cap \mathfrak{R}^{k-1}$ durch eine Abbildung $\beta(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{R}^{k-1})$ uniformisiert wird. Das Urbild $\mathfrak{R}'^{k-1} = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap \mathfrak{R}^{k-1})$ wird durch $\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = \alpha^{-1}\beta(\mathfrak{x})$ uniformisiert, wobei die Vektoren $\mathfrak{t}_{x_1},\ldots,\mathfrak{t}_{x_{k-1}}$ linear unabhängig sind. Setzt man für die Vektoren

$$\mathfrak{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_\mu^\nu\,\tilde{\mathfrak{e}}_\nu$$

$$(2.38)\qquad {}^*[\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{k-1}] = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} \tilde{\mathfrak{e}}_1, & \ldots, \tilde{\mathfrak{e}}_k \\ a_1^1, & \ldots, a_1^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k-1}^1, & \ldots, a_{k-1}^k \end{vmatrix},$$

so wird die Normale $\mathfrak{n}$ im Punkt $\mathfrak{t}(\mathfrak{x})$ durch

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{x}) = \frac{{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}]}{|{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}]|} \tag{2.39}$$

gegeben. Da die Determinante $(\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}) = |\mathfrak{n}|^2 \, |{}^*[\mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}]| > 0$ ist; bilden $\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{t}_{x_{k-1}}$ ein Rechtssystem.

Es liege $\mathfrak{R}^{k-1} \cap U(P_0)$ auf dem Rand der offenen Menge G. Dann besitze $\mathfrak{R}^{k-1}$ in P_0 eine *äußere Normale bezüglich* G, wenn es zu jeder Wahl von $\alpha \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{M}^k)$ und $\beta \in \mathfrak{P}_{P_0}(\mathfrak{P}^{k-1})$ ein $\tau_0 > 0$ gibt, so daß das Bild $\alpha(S^+)$ der Strecke $S^+ = [\mathfrak{y} = \mathfrak{n}(0)\,\tau$ mit $0 < \tau \leq \tau_0]_{\mathfrak{y}}$ außerhalb G und das Bild $\alpha(S^{-1})$ der Strecke $S^- = [\mathfrak{y} = \mathfrak{n}(0)\,\tau$ mit $-\tau_0 \leq \tau < 0]_{\mathfrak{y}}$ innerhalb G liegt. Offensichtlich reicht es, dies von einem Paar von Abbildungen α, β zu verlangen. Entsprechend definiert man die *innere Normale*. Liegt $\mathfrak{R}^{k-1}$ auf dem Rand der offenen Menge G, so sind die Mengen N_i der Punkte mit innerer Normalen und N_a der Punkte mit äußerer Normalen offen und fremd. Ist $Rd\,G = Rd\,\overline{G}$, so ist $N_i \cup N_a = \mathfrak{R}^{k-1}$, und ein zusammenhängendes $\mathfrak{R}^{k-1}$ besteht entweder nur aus N_i oder nur aus N_a; $\mathfrak{R}^{k-1}$ läßt sich also „nach außen" einheitlich (um)orientieren.

Den GAUSSschen Integralsatz hat G. G. LORENTZ [7] so formuliert: Die offene, beschränkte Menge G des n-dimensionalen Vektorraumes habe einen Rand F mit endlichem CARATHÉODORY-Maß der Dimension $k-1$ (μ-Maß). Bis auf eine μ-Nullmenge habe F eine äußere Normale $\mathfrak{n}$ bezüglich G. Die Funktionen $a_\nu(\mathfrak{x})$ seien in $\overline{G}$ stetig. Die rechte obere Derivierte $\overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ von a_ν nach x_ν sei in G endlich und über jeden kompakten Teil von G integrierbar. $\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ sei über G integrierbar. Dann ist

$$\int_F \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu a_\nu(\mathfrak{x}) \cos(\mathfrak{n}, \tilde{\mathfrak{e}}_\nu)\, d_\mu F = \int_G \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu \, dx_1 \ldots dx_k, \tag{2.40}$$

wobei $d_\mu F$ das Oberflächenelement bezüglich des μ-Maßes ist.

In [7] wird der Satz zwar mit der partiellen Ableitung $a_{\nu x_\nu}$ statt $\overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ bewiesen. Auf Grund eines Satzes von CARATHÉODORY [Reelle Funktionen, S. 597, Hauptsatz der Integralrechnung: $f(x) = f(a) + \int_a^x \overline{D}^+ f(x)\, dx$, wenn das Integral existiert, wenn $f(x)$ in $a \leq x \leq b$ stetig und $|\overline{D}^+ f(x)| < \infty$ bis auf abzählbar viele x ist] läßt sich der Beweis aber genau so für $\overline{D}^+_{x_\nu} a_\nu$ führen. Von jetzt an sollen die $a_\nu(\mathfrak{x})$ in jedem kompakten Teil K von G eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllen. Dann ist $a_{\nu x_\mu}$ fast überall in G vorhanden, über K integrierbar und $|\overline{D}^+_{x_\mu} a_\nu| < \infty$. Setzt man

$$\partial \Phi^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu(\mathfrak{x})\, \partial x_1 \ldots \partial x_{\nu-1} \partial x_{\nu+1} \ldots \partial x_k, \tag{2.41}$$

liegt die nach außen orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^{k-1}$ auf dem Rand F, und ist $F_1 = F - \mathfrak{N}^{k-1}$ eine μ-Nullmenge, so geht (2.40) in

$$\int_{\mathfrak{N}^{k-1}} \partial \Phi^{k-1} = \int_G \partial\, \partial \Phi^{k-1} \tag{2.42}$$

über.

Ist das Differential (2.41) auf einer orientierten Mannigfaltigkeit gegeben, so erfülle es in einer offenen Menge G eine LIPSCHITZ-Bedingung, wenn es zu jedem Punkt P_0 von G und jeder Abbildung $\alpha(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P}_{P_0}$ eine Umgebung $U(P_0)$ gibt, in der

$$|a_\nu(\alpha(\mathfrak{x}), \alpha) - a_\nu(\alpha(\mathfrak{x}'), \alpha)| \leq L\, |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'|$$

gilt. L darf von α und P_0 abhängen. Eine Menge F auf $\mathfrak{M}^k$ habe ein endliches μ-Maß, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in F$ und jeder Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}_{P_0}$ eine Umgebung $U(P_0)$ gibt, so daß das Urbild $\alpha^{-1}(U(P_0) \cap F)$ ein endliches μ-Maß hat.

Satz 8. Der Integralsatz von STOKES.

Voraussetzung. *Die orientierte, zweimal stetigdifferenzierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ enthalte die offene, beschränkte Menge G. Der Rand F von G enthalte die orientierte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^{k-1}$ von $\mathfrak{M}^k$, die bezüglich G eine äußere Normale habe. $F_1 = F - \mathfrak{N}^{k-1}$ sei eine Nullmenge des $(k-1)$-dimensionalen* CARATHÉODORY-*Maßes (μ-Maß). F habe ein endliches μ-Maß. Das auf G stetige Differential $\partial \Phi^{k-1}$ erfülle in G eine* LIPSCHITZ-*Bedingung. Seine Ableitung $\partial\, \partial \Phi^{k-1}$ sei über G integrierbar.*

Behauptung. *Es gilt*

$$\int_{\mathfrak{N}^{k-1}} \partial \Phi^{k-1} = \int_G \partial\, \partial \Phi^{k-1}. \tag{2.43}$$

Beweis. Zu jedem Punkt P_0 von $\overline{G}$ werden 3 offene Umgebungen bestimmt. Es gibt eine Abbildung $\alpha(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{P}_{P_0}$ und eine durch α uniformisierbare Umgebung $U(P_0)$ mit $\alpha^{-1}(U(P_0)) = U_3' = [|t_\nu| < 3]_\mathfrak{t}$. Weiter werden die Urbilder $G' = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap G)$ und $F' = \alpha^{-1}(U(P_0) \cap F)$ eingeführt. Da F' ein endliches μ-Maß, also das LEBESGUEsche Maß Null hat, gibt es ein τ_ν mit $1 < \tau_\nu < 3$, so daß die Hyperebenen $t_\nu = \pm \tau_\nu$ aus F' eine Nullmenge des $(k-1)$-dimensionalen LEBESGUEschen Maßes, also eine μ-Nullmenge ausschneiden. Nun setzt man $U_2' = [|t_\nu| < \tau_\nu]_\mathfrak{t}$ und $U_2(P_0) = \alpha(U_2')$. Weiter sei $G^* \equiv G^*(P_0) = G' \cap U_2'$ und $F^* \equiv F^*(P_0) = \overline{G}^* - G^* \equiv Rd\, G^*$. Für F^* gilt die Abschätzung

$$F^* \subseteq \{F' \cap U_2'\} \cup \{F' \cap Rd\, U_2'\} \cup \{G' \cap Rd\, U_2'\}.$$

Auf $F' \cap U_2'$ existiert fast überall eine äußere Normale bezüglich G', die auch eine bezüglich G^* ist. Der Schnitt $F' \cap Rd\, U_2'$ ist eine μ-Nullmenge. Auf $G' \cap Rd\, U_2'$ ist, abgesehen von den Würfelkanten, die äußere Normale des Würfels auch äußere Normale bezüglich G^*. Der Rand F^* hat ein endliches μ-Maß. Es sei $U_1' = [|t_\nu| < 1]_\mathfrak{t}$ und $U_1(P_0) = \alpha(U_1')$. Endlich viele $U_1(P_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$ überdecken das kompakte $\overline{G}$. Zu $U(P_\nu)$ gehöre die Abbildung α_ν.

Zu $U_1(P_\nu)$ wählt man eine stetigdifferenzierbare DIEUDONNÉ-Zerlegung λ_ν von $\overline{G}$. Dann ist nach dem Integralsatz von GAUSS:

$$\begin{aligned}\int_G \partial(\lambda_\nu \partial\Phi^{k-1}) &= \int_{G\cap U_1(P_\nu)} \partial(\lambda_\nu \partial\Phi^{k-1}) \\ &= \int_{G^*(P_\nu)} \partial\{\lambda_\nu \partial\Phi^{k-1}(\alpha_\nu(t),\alpha_\nu)\} \\ &= \int_{F^*(P_\nu)} \lambda_\nu \partial\Phi^{k-1}(\alpha_\nu(t),\alpha_\nu) \\ &= \int_{\mathfrak{R}^{k-1}} \lambda_\nu \partial\Phi^{k-1}(P).\end{aligned}$$

Durch Summation erhält man

$$\int_G \partial\partial\Phi^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_G \partial(\lambda_\nu \partial\Phi^{k-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\mathfrak{R}^{k-1}} \lambda_\nu \partial\Phi^{k-1} = \int_{\mathfrak{R}^{k-1}} \partial\Phi^{k-1}$$

w. z. b. w.

Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $\mathfrak{M}^k$ wird also lediglich gebraucht, um die Eindeutigkeit der Ableitung $\partial\partial\Phi^{k-1}$ zu sichern. Zwar ließen sich die gemachten Voraussetzungen noch abschwächen, jedoch wird auch so der Satz 8 für das Folgende ausreichen.

§ 3. Hyperkugel und Nullstellenflächen.

a) Vektordifferentiale.

Sind die Differentiale ∂A_ν^m auf einer gemeinsamen Menge M der orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^k$ erklärt; so sei

$$\partial\mathfrak{A}^m = (\partial A_1^m, \ldots, \partial A_n^m) \tag{3.1}$$

ein *Vektordifferential m-ter Stufe der Dimension n*. Für $m=0$ ist $\partial A_\nu^0 = A_\nu$ eine Funktion, also $\mathfrak{a}=(A_1,\ldots,A_n)$ ein Vektor. Mit der *Summen*definition

$$\partial\mathfrak{A}^m + \partial\mathfrak{B}^m = (\partial A_1^m + \partial B_1^m; \ldots, \partial A_n^m + \partial B_n^m) \tag{3.2}$$

bilden die $\partial\mathfrak{A}^m$ einen Modul. Man setzt

$$\partial\mathfrak{A}^p \cdot \partial\mathfrak{B}^q = (\partial C^p \partial A_1^q, \ldots, \partial C^p \partial A_n^q) \tag{3.3}$$

$$= (-1)^{pq}(\partial A_1^q \partial C^p, \ldots, \partial A_n^q \partial C^p). \tag{3.4}$$

Diese [illegible] distributiv und alternierend. Jedoch darf in jedem Produkt ein Vektor sein. Setzt man $\mathfrak{e}_\nu = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{\nu},0\ldots0)$[10]), so erhält man $\partial\mathfrak{A}^m = \sum_{\nu=1}^{n} \partial A_\nu^m \mathfrak{e}_\nu$. Jedes Differential läßt sich eindeutig in Real- und Imaginärteil zerlegen: $\partial A^m = \partial A_{Re}^m + i\,\partial A_{Im}^m$ mit reellen ∂A_{Re}^m und ∂A_{Im}^m. Das *konjugiert-komplexe Differential* ist $\overline{\partial A^m} =$

[10]) Die Vektoren $\mathfrak{e}_\nu$ haben nichts mit den Vektoren $\tilde{\mathfrak{e}}_\nu$ von § 2 (2.1) bis (2.4) zu tun.

$\partial A^m_{Re} - i\,\partial A^m_{Im}$. Entsprechend sei $\overline{\partial \mathfrak{A}^m} = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\partial A^m_\nu}\,\mathfrak{e}_\nu$. Wegen $\overline{\partial\,\partial A^m} = \partial\,\overline{\partial A^m}$ ist der Übergang zum Konjugiert-Komplexen ein Modulautomorphismus.

Das *skalare Produkt* wird mittels einer positiv definiten HERMITEschen Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\, z_\mu\, \bar{z}_\nu$ erklärt:

$$(\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\, \partial A^p_\mu\, \overline{\partial B^q_\nu}. \tag{3.5}$$

Es gilt:

$$(\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) = (-1)^{pq}\, (\overline{\partial \mathfrak{B}^q} \,|\, \overline{\partial \mathfrak{A}^p})$$

$$(\partial \mathfrak{A}^p_1 + \partial \mathfrak{A}^p_2 \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) = (\partial \mathfrak{A}^p_1 \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) + (\partial \mathfrak{A}^p_2 \,|\, \partial \mathfrak{B}^q)$$

$$\partial C^r\, (\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) = (\partial C^r\, \partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q)$$

$$(\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q)\, \partial C^r = (\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q\, \overline{\partial C^r}).$$

Die *Ableitung* wird durch $\partial\,\partial \mathfrak{A}^m = \sum_{\nu=1}^{n} \partial\,\partial A^m_\nu\, \mathfrak{e}_\nu$ erklärt. Es gilt:

$$\partial\,(\partial \mathfrak{A}^m_1 + \partial \mathfrak{A}^m_2) = \partial\,\partial \mathfrak{A}^m_1 + \partial\,\partial \mathfrak{A}^m_2$$

$$\partial\,(\partial C^p \cdot \partial \mathfrak{A}^q) = \partial\,\partial C^p\, \partial \mathfrak{A}^q + (-1)^p\, \partial C^p\, \partial\,\partial \mathfrak{A}^q$$

$$\partial\,(\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) = (\partial\,\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial \mathfrak{B}^q) + (-1)^p\, (\partial \mathfrak{A}^p \,|\, \partial\,\partial \mathfrak{B}^q).$$

Für die Vektoren $\mathfrak{e}_\mu$ ist speziell $g_{\mu\nu} = (\mathfrak{e}_\mu \,|\, \mathfrak{e}_\nu)$. Vom „Koordinatensystem" $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ kann man durch eine lineare Transformation $\mathfrak{e}'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}\, \mathfrak{e}_\nu$ mit $\det(c_{\mu\nu}) \neq 0$ zu einem anderen Koordinatensystem $\mathfrak{e}'_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ mit $g'_{\mu\nu} = (\mathfrak{e}'_\mu \,|\, \mathfrak{e}'_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases}$ übergehen. Ein solches Koordinatensystem heißt *normal*. Da es immer ein normales Koordinatensystem gibt, kann man bereits $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ als normal voraussetzen. Der Vektor $\mathfrak{w}$ hat den Betrag $|\mathfrak{w}| = \sqrt{(\mathfrak{w} \,|\, \mathfrak{w})}$.

Man setzt nun

$$\partial v_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2}\,(\partial \mathfrak{w} \,|\, \partial \mathfrak{w}) = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \partial w_\nu\, \partial \overline{w}_\nu, \tag{3.6}$$

$$\partial \omega_2(\mathfrak{w}) = \frac{i}{2}\,|\mathfrak{w}|^{-4}\,\{(\mathfrak{w} \,|\, \mathfrak{w})\,(\partial \mathfrak{w} \,|\, \partial \mathfrak{w}) - (\partial \mathfrak{w} \,|\, \mathfrak{w})\,(\mathfrak{w} \,|\, \partial \mathfrak{w})\}, \tag{3.7}$$

$$\partial v_{2k}(\mathfrak{w}) = \frac{1}{k!}\,(\partial v_2)^{k\,11}), \qquad \partial \omega_{2k}(\mathfrak{w}) = \frac{1}{k!}\,(\partial \omega_2)^{k\,12}). \tag{3.8}$$

Ist die Funktion g differenzierbar, so gilt $\partial \omega_2(g \cdot \mathfrak{w}) = \partial \omega_2(\mathfrak{w})$. Auf jeder komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2k}$ *des Raumes* $\mathfrak{R}^{2n}$ *der komplexen Vektoren* $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ ist das Differential $\partial v_{2k}(\mathfrak{z})$ das *euklidische Oberflächenelement*[11]),

[11]) Vergleiche [6], § 1.
[12]) Vergleiche [6], § 2.

und das Differential $\partial\omega_{2k}(\mathfrak{z})$ das *projektive*[11]). Deutet man durch $\overset{\mu}{\|}$ das Fehlen des Produktes $\partial z_\mu\,\partial\bar z_\mu$ an, so gilt:

$$(3.9)\qquad \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{\mu=1}^{n}\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n,$$

$$(3.10)\qquad \begin{cases} \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\sum\limits_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} z_\mu\bar z_\nu\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n + \\ \qquad + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\sum\limits_{\mu=1}^{n} z_\mu\bar z_\mu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n. \end{cases}$$

Beweis. Zunächst gilt:

$$(3.11)\qquad (\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^k = \sum_{\mu|k}^{n}\partial z_{\mu_1}\,\partial\bar z_{\mu_1}\ldots\partial z_{\mu_k}\,\partial\bar z_{\mu_k} = k!\sum_{\nu|n-k}^{n}{}'\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\nu_1\ldots\nu_k}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n.$$

Aus (3.6), (3.8) und (3.11) folgt (3.9). Zudem ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\{\partial\omega_2(\mathfrak{z})\}^{n-1}}{(n-1)!} &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-4n+4}\sum_{\mu+\nu=n-1}\frac{1}{\mu!\,\nu!}\,|\mathfrak{z}|^{2\mu}\,(\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^\mu\,\{(\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})\,(\partial\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})\}^\nu \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n+2}\,\frac{(\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\,\frac{(\partial\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})^{n-2}}{(n-2)!}\,(\mathfrak{z}\,|\,\partial\mathfrak{z})\,(\partial\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z}) \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}|\mathfrak{z}|^{-2n}\Big\{\sum_{\mu,\nu=1}^{n} z_\mu\bar z_\mu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n + \\ &\quad + \sum_{\mu<\nu}(z_\mu\bar z_\mu\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_\mu + z_\nu\bar z_\nu\,\partial\bar z_\nu\,\partial z_\nu)\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n + \\ &\quad + \sum_{\mu<\nu}(z_\mu\bar z_\nu\,\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu + z_\nu\bar z_\mu\,\partial\bar z_\nu\,\partial z_\mu)\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n\Big\} \\ &= \text{Behauptung,} \qquad \text{w. z. b. w.}\end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ Parameterdarstellung einer komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n-2}$, und deutet $|^\mu$ das Fehlen von z_μ an, so gilt:

$$(3.12)\qquad \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = \sum_{\mu=1}^{n}\left|\frac{\partial(z_1,\ldots,\overset{\mu}{|},\ldots,z_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_{n-1})}\right|^2\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}),$$

$$(3.13)\qquad \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = |\mathfrak{z}|^{-2n}\,|(\mathfrak{z},\mathfrak{z}_{u_1},\ldots,\mathfrak{z}_{u_{n-1}})|^2\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}).$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) &= |\mathfrak{z}|^{-2n}\sum_{\mu\neq\nu} z_\mu\bar z_\nu\,\frac{\partial(\bar z_\mu, z_\nu, z_1,\bar z_1,\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\overset{\nu}{\|}\ldots,z_n,\bar z_n)}{\partial(u_1,\bar u_1,\ldots,u_{n-1},\bar u_{n-1})}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}) + \\ &\quad + |\mathfrak{z}|^{-2n}\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu\bar z_\mu\,\frac{\partial(z_1,\bar z_1,\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots,z_n,\bar z_n)}{\partial(u_1,\bar u_1,\ldots,u_{n-1},\bar u_{n-1})}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}) \\ &= |\mathfrak{z}|^{-2n}\,|(\mathfrak{z},\mathfrak{z}_{u_1},\ldots,\mathfrak{z}_{u_{n-1}})|^2\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}).\end{aligned}$$

Auf jeder komplexen, $(2n-2)$ dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{R}^{2n}$ hat also die projektive Maßbestimmung $\partial\omega_{2n-2}$ eine nichtnegative Dichte. Sie verschwindet nur in den Punkten, deren Tangentialraum durch den Nullpunkt geht.

b) Hyperkugel und projektiver Raum.

Der komplexe projektive Raum $\mathfrak{P}^{2n-2}$ der Punkte $\mathfrak{v}=(v_1:v_2:\ldots:v_{\mu-1}:1:0:\ldots:0)$ mit $\mu=1,2,\ldots,n-1$ wird durch[13])

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{a}(\mathfrak{v})=\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{v_\nu}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathfrak{e}_\nu+\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,\mathfrak{e}_\mu;\qquad v=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\mu-1}|v_\nu|^2} \tag{3.14}$$

eineindeutig und stetig auf eine *Teilmenge* Q der Einheitskugel abgebildet. Die Abbildung $\mathfrak{a}(\mathfrak{v})$ ist auf jeder der Mengen $A_\mu=[v_{\mu+1}=\cdots=v_n=0]_{\mathfrak{v}}$, $1\leq\mu\leq n$ reellanalytisch und topologisch. Die Umkehrung auf der Menge $Q_\mu=\mathfrak{a}(A_\mu)$ ist

$$v_\nu=\frac{q_\nu}{q_\mu}\quad\text{für}\quad\nu=1,\ldots,\mu-1. \tag{3.15}$$

Der Produktraum $\mathfrak{P}^{2n-2}\times[|z|<\infty]$ wird durch die Abbildung $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{a}(\mathfrak{v})$ stetig auf $\mathfrak{R}^{2n}$ abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $A_\mu\times[0<|z|<\infty]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung ist dort $v_\nu=\frac{z_\nu}{z_\mu}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $z=\frac{z_\mu}{|z_\mu|}\,|\mathfrak{z}|$. Der Produktraum $\mathfrak{P}^{2n-2}\times[0\leq\varphi<2\pi]$ wird durch $\mathfrak{z}=e^{i\varphi}\,\mathfrak{a}$ stetig auf die Einheitskugel abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $A_\mu\times[0\leq\varphi<2\pi]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung ist dort: $v_\nu=\frac{z_\nu}{z_\mu}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $\varphi=\arg z_\mu$ mit $0\leq\varphi<2\pi$. Weiter bildet

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{u})=\sum_{\nu=1}^{n-1}u_\nu\,\mathfrak{e}_\nu+\sqrt{1-u^2}\,\mathfrak{e}_n\quad\text{mit}\quad u=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n-1}|u_\nu|^2} \tag{3.16}$$

die Menge $Q'_\mu=[u=1,u_\mu>0,u_{\mu+1}=\cdots=u_n=0]_{\mathfrak{u}}$ für $\mu<n$ bzw. $Q'_n=[u<1]_{\mathfrak{u}}$ für $\mu=n$ topologisch und reellanalytisch auf Q ab. Die Vereinigung $Q'=\bigcup_{\mu=1}^{n}Q'_\mu$ wird eineindeutig und stetig auf Q abgebildet. Durch $\mathfrak{z}=e^{i\varphi}\,\mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ wird die Menge $Q'\times[0\leq\varphi<2\pi]$ eineindeutig und stetig auf die Einheitskugel abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $Q'_\mu\times[0\leq\varphi<2\pi]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung ist $u_\nu=\frac{|z_\mu|}{z_\mu}\frac{z_\nu}{|\mathfrak{z}|}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $\varphi=\arg z_\mu$ mit $0\leq\varphi<2\pi$. Durch $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ wird die Menge $Q'\times[|z|<\infty]$ stetig auf $\mathfrak{R}^{2n}$ abgebildet. Die Abbildung ist auf jeder der Mengen $Q'_\mu\times[0<|z|<\infty]$ topologisch und reellanalytisch. Die Umkehrung lautet $u_\nu=\frac{|z_\mu|}{z_\mu}\frac{z_\nu}{|\mathfrak{z}|}$ für $\nu=1,\ldots,\mu-1$ und $z=\frac{z_\mu}{|z_\mu|}\,|\mathfrak{z}|$.

[13]) Zu den Gln. (3.14) bis (3.22) vergleiche [6], § 3.

Die Menge Q ist ein Repräsentant des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2n-2}$ im $\mathfrak{R}^{2n}$. Ein Integral über $M \subseteq Q$ werde als Integral über die Teilmenge $M \cap Q_n$ der reellanalytischen Teilmannigfaltigkeit Q_n von $\mathfrak{R}^{2n}$ erklärt.

Wegen $|\mathfrak{q}| = 1$, ist $(\partial\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{q}) + (\mathfrak{q}\,|\,\partial\mathfrak{q}) = 0$. Setzt man die Parameterdarstellung $\mathfrak{z} = z \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ in das Differential $\partial v_{2n}(\mathfrak{z})$ ein, und berücksichtigt, daß $\mathfrak{q}(\mathfrak{u})$ nur von $(2n-2)$ Veränderlichen abhängt, so erhält man wegen $\partial\mathfrak{z} = z\,\partial\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\,\partial z$ die Gleichungen

$$\partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\right)^n \{\partial z\,\partial\bar{z} + (z\,\partial\bar{z} - \bar{z}\,\partial z)\,(\partial\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{q}) + z\bar{z}\,(\partial\mathfrak{q}\,|\,\partial\mathfrak{q})\}^n$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{|z|^{2n-2}}{(n-1)!}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,(\partial\mathfrak{q}\,|\,\partial\mathfrak{q})^{n-1} = \frac{i}{2}\,|z|^{2n-2}\partial z\,\partial\bar{z}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}),$$

$$\partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\,|z|^{2n-2}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \frac{i}{2}\,|z|^{2n-2}\,\partial z\,\partial\bar{z}\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}). \tag{3.17}$$

Ist $\partial v_{2n-1}(\mathfrak{v})$ das euklidische Oberflächenelement der Kugel $[|\mathfrak{v}| = r]$, so wird

$$\partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \partial r\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{v}), \tag{3.18}$$

$$\partial v_{2n-1}(re^{i\varphi}\mathfrak{q}) = r^{2n-1}\partial\varphi\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}) = r^{2n-1}\partial\varphi\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}), \quad (r = \text{const}), \tag{3.19}$$

$$\partial v_{2n-2}(e^{i\varphi}\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(e^{i\varphi}\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}). \tag{3.20}$$

Wegen $\partial q_n = \partial\bar{q}_n$ gilt nach (3.16)

$$\partial\omega_2(\mathfrak{q}) = \partial v_2(\mathfrak{q}) = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\partial q_\nu\,\partial\bar{q}_\nu = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\partial u_\nu\,\partial\bar{u}_\nu = \partial v_2(\mathfrak{u}).$$

Also wird

$$\partial v_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial v_{2n-2}(\mathfrak{u}). \tag{3.21}$$

Identifiziert man in der Hyperkugel $\mathfrak{k}[|\mathfrak{u}| \leq 1]$ alle Punkte $|\mathfrak{u}| = 1$ die auf derselben 2-dimensionalen analytischen Ebene durch den Nullpunkt liegen, so entsteht ein Modell des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2n-2}$. Die projektive Maßbestimmung $\partial\omega_{2n-2}$ ist die euklidische Maßbestimmung dieses Modelles. Daraus ergeben sich induktiv die Inhalte:

$$\begin{cases} W_{2n-2} = \displaystyle\int_Q \partial\omega_{2n-2} = \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} \\ V_{2n-1}(r) = \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \partial v_{2n-1} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}\,r^{2n-1} \\ V_{2n}(r) = \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|\leq r} \partial v_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}\,r^{2n}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Zum Beweis hätte auch der folgende Hilfssatz dienen können.

Hilfssatz 1[14]. *Wenn in den folgenden Gl.* (3.23) *bzw.* (3.24) *je eines der beiden Integrale existiert, so existieren beide.*

[14]) Vergleiche [*14*], Kap. III, § 2 (2.8).

a) *Wenn* $F(\mathfrak{z}) = F(\lambda\,\mathfrak{z})$ *für alle* $\lambda > 0$ *ist, so gilt*:

$$\frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} F(\mathfrak{z})\,\partial v_{2n-1} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{|\mathfrak{z}|<\infty} F(\mathfrak{z})\, e^{-|\mathfrak{z}|^2}\,\partial v_{2n}. \tag{3.23}$$

b) *Wenn* $F(\mathfrak{z}) = F(\lambda\,\mathfrak{z})$ *für alle komplexen* $\lambda \neq 0$ *ist, so gilt*:

$$\frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{z}\in Q} F(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{|\mathfrak{z}|<\infty} F(\mathfrak{z})\, e^{-|\mathfrak{z}|^2}\,\partial v_{2n}. \tag{3.24}$$

Beweis. Wenn das Ausgangs- oder Endintegral existiert, so gilt:

$$\frac{1}{\pi^n} \int\limits_{|\mathfrak{z}|<\infty} e^{-|\mathfrak{z}|^2} |F(\mathfrak{z})|\,\partial v_{2n} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_0^\infty r^{2n-1} e^{-r^2}\,dr \cdot \int\limits_{|\mathfrak{z}|=1} |F|\,\partial v_{2n-1}$$

$$= \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int\limits_{|\mathfrak{z}|=r} |F|\,\partial v_{2n-1}$$

im Fall b) rechnet man weiter

$$= \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_Q \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{z})|\,\partial\varphi \right\} \partial\omega_{2n-2} = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_Q |F|\,\partial\omega_{2n-2}.$$

Nachträglich gilt die Rechnung auch für F statt $|F|$, w. z. b. w.

c) Nullstellenflächen.

Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ des Gebietes G heißt eine *Nullstellenfläche*[15]) (analytische Fläche, charakteristische Fläche), wenn es zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{N}$ eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ und eine in $U(\mathfrak{z}_0)$ analytische Funktion $g(\mathfrak{z}) \not\equiv 0$ gibt, so daß $\mathfrak{N} \cap U(\mathfrak{z}_0) = [g(\mathfrak{z}) = 0] \cap U(\mathfrak{z}_0)$ ist. Dabei kann man $U(\mathfrak{z}_0)$ und $g(\mathfrak{z})$ immer so wählen, daß bezüglich jeden Punktes $\mathfrak{z}_1 \in U(\mathfrak{z}_0) \cap \mathfrak{N}$ die Funktion g im Integritätsbereich der in $\mathfrak{z}_1$ regulären Funktionen nur in einfache Primfaktoren zerfällt. Der Punkt $\mathfrak{z}_0$ heiße gewöhnlich, wenn $\partial g \neq 0$ in $\mathfrak{z}_0$ ist. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von g und $U(\mathfrak{z}_0)$ ab. Die gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ bilden eine $(2n-2)$ dimensionale, komplexe *Teilmannigfaltigkeit* $\hat{\mathfrak{N}}$ *von* $\mathfrak{R}^{2n}$.

Der Ausdruck $(\mathfrak{z}_0; g_0)$ mit $g_0(\mathfrak{z}_0) = 0$ heiße ein *Flächenelement*, wenn die analytische Funktion g_0 im Punkt $\mathfrak{z}_0$ irreduzibel ist. Zwei Flächenelemente $(\mathfrak{z}_0; g_0)$, $(\mathfrak{z}_1; g_1)$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_1$ und $g_0 \cdot g_1^{-1} \neq 0$ und regulär in $\mathfrak{z}_0$ ist. Das Flächenelement $(\mathfrak{z}_0; g_0)$ gehört dann und nur dann zur Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{N}$ ist, und g_0 die Funktion g im Punkt $\mathfrak{z}_0$ teilt, die $\mathfrak{N}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ darstellt. *Reduzibel* heißt eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$, wenn sie in zwei Nullstellenflächen zerfällt, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ die kein gemeinsames Flächenelement haben, andernfalls heißt die Nullstellenfläche *irreduzibel*. Wenn eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ im Gebiet $G_1 > G$ irreduzibel ist, so kann $\mathfrak{N} \cap G$ reduzibel im Gebiet G sein.

[15]) Vergleiche [3], Kap. II, § 2, S. 280—281 und Kap. V, § 2, S. 314—315.

Um die *Vielfachheit der a-Stelle* einer meromorphen Funktion $f(\mathfrak{z})$ im Punkt $\mathfrak{z}_0$ zu definieren, setzt man $a=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $f(\mathfrak{z})=\frac{w_1(\mathfrak{z})}{w_2(\mathfrak{z})}$ mit in $\mathfrak{z}_0$ regulären und teilerfremden Funktionen w_1 und w_2. Der Wert $a=\infty$ wird durch $\alpha_1=0,\ \alpha_2\neq 0$ erfaßt. Dann entwickelt man $\alpha_1 w_2\cdot(f-a)=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2=\sum_{\mu=\nu}^{\infty} f_\mu(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)$ nach homogenen Polynomen f_μ um $\mathfrak{z}_0$. Das Polynom f_μ hat den Grad μ. Das Polynom f_ν mit kleinstem Grad verschwinde nicht identisch. Dann ist $\nu=\nu(\mathfrak{z}_0, a)=\nu(\mathfrak{z}_0, a, f)$ die Vielfachheit der „a-Stelle" $\mathfrak{z}_0$ bezüglich f. Ist $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2\equiv 0$, so sei $\nu(\mathfrak{z}_0, a, f)=\infty$. Die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0, a)\gtrless 0$ ist dann und nur dann positiv, wenn $f(\mathfrak{z}_0)=a$ ist, oder wenn die Funktion f in $\mathfrak{z}_0$ eine Unbestimmtheitsstelle hat. Besitzt die nichtkonstante Funktion f eine a-Stelle, so ist die Menge $\mathfrak{N}(a)=[\nu(\mathfrak{z}, a)>0]_{\mathfrak{z}}$ eine abgeschlossene Nullstellenfläche im Meromorphiegebiet von f und heiße die *a-Stellenfläche* der Funktion f. Betrachtet man die Funktion f längs der komplexen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2k}$ von $\mathfrak{R}^{2n}$, und wählt man zum Punkt $\mathfrak{z}_0\in\mathfrak{M}^{2k}$ eine beliebige Abbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})\in\mathfrak{P}_{\mathfrak{z}_0}(\mathfrak{M}^{2k})$, so ist die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0, a, f; \mathfrak{M}^{2k})=\nu\big(0, a, f(\mathfrak{z}(\mathfrak{u}))\big)$ der a-Stelle bezüglich der Funktion f *längs* $\mathfrak{M}^{2k}$ unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ erklärt. Ist $\Omega\neq 0$ und regulär in $\mathfrak{z}_0$, so haben die Funktionen f und $f\cdot\Omega$ die gleiche Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}_0$.

Eine Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ besteht im Gebiet G aus größten irreduziblen Teilen $\mathfrak{N}_\mu$ also $\mathfrak{N}=\bigcup_{\mu=1}^{s}\mathfrak{N}_\mu$ mit $1\leqq s\leqq\infty$. Jedem $\mathfrak{N}_\mu$ werde eine *„globale" Vielfachheit* $\mathfrak{p}_\mu$ zugeordnet. Die *„örtliche" Vielfachheit* von $\mathfrak{N}$ im Punkt $\mathfrak{z}_0$ werde wie folgt erklärt. Ist $\mathfrak{z}_0\notin\mathfrak{N}$, so sei $\nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N})=0$ und $\nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N}; \mathfrak{M}^{2k})=0$. Ist $\mathfrak{z}_0\in\mathfrak{N}$, so seien $\mathfrak{N}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{N}_{\mu_t}$ mit $1\leqq t<\infty$ gerade die durch den Punkt $\mathfrak{z}_0$ gehenden größten irreduzibeln Teile von $\mathfrak{N}$. Zu jedem solchen Teil $\mathfrak{N}_\mu$ gibt es eine in $\mathfrak{z}_0$ analytische Funktion g_μ, deren Nullstellen in einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ gerade den dortigen Bestandteil von $\mathfrak{N}_\mu$ abgeben, und die in jedem Punkt dieser Umgebung keine mehrfachen Primfaktoren hat. Dann ist die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0)\equiv\nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N})=\sum_{\tau=1}^{t}\mathfrak{p}_{\mu_\tau}\nu(\mathfrak{z}_0, 0, g_{\mu_\tau})$ bzw. $\nu(\mathfrak{z}_0; \mathfrak{M}^{2k})\equiv\nu(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{N}; \mathfrak{M}^{2k})=\sum_{\tau=1}^{t}\mathfrak{p}_{\mu_\tau}\nu(\mathfrak{z}_0, 0, g_{\mu_\tau}; \mathfrak{M}^{2k})$ unabhängig von der Wahl der Funktionen g_μ erklärt. In diesem und nur in diesem Sinne sagt man, man habe dem Punkt $\mathfrak{z}_0\in\mathfrak{N}$ eine Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z}_0)$ bzw. $\nu(\mathfrak{z}_0; \mathfrak{M}^{2k})$ zugeordnet. Da in jedem gewöhnlichen Punkt $\mathfrak{z}_0$ der Nullstellenfläche die Gleichung $\nu(\mathfrak{z}_0)=\mathfrak{p}_\mu$ für genau ein μ gilt, sind umgekehrt die globalen Vielfachheiten $\mathfrak{p}_\mu$ durch die örtliche Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ eindeutig bestimmt. Insbesondere darf man der a-Stellenfläche $\mathfrak{N}(a)$ einer Funktion f die Vielfachheit $\nu\big(\mathfrak{z}, \mathfrak{N}(a)\big)=\nu(\mathfrak{z}, a, f)$ zuordnen.

Wenn $\mathfrak{M}^{2k}$ die zweidimensionale Ebene $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{a}$ mit konstantem Vektor $\mathfrak{a}\neq 0$ ist, so werde $\nu(\mathfrak{z}; \mathfrak{M}^{2k})=\nu(z; \mathfrak{a})$ abgekürzt. Wenn $\mathfrak{M}^{2k}$ die zweidimensionale Ebene $z_\varrho=b_\varrho,\ \varrho=1, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, n$ ist, so werde $\nu(\mathfrak{z}; \mathfrak{M}^{2k})=\nu_\mu(\mathfrak{z})$ abgekürzt.

Mit $\mathfrak{O}$ werde die Menge der offenen Mengen des Gebietes G bezeichnet. Mit $\mathfrak{F}$ werde die Menge der Funktionen f, die auf einer, von f abhängigen offenen Menge $O \in \mathfrak{O}$ analytisch sind, bezeichnet. Eine COUSINsche *Verteilung* (II. Art)[16]) ist eine Teilmenge $F_G \subset \mathfrak{F} \times \mathfrak{O}$, für die gilt:

1. *Wenn* $(f, O) \in F_G$ *ist, so ist die Funktion* f *auf* O *analytisch.*

2. *Zu jedem Punkt* $P \in G$ *gibt es ein* $(f, O) \in F_G$ *mit* $P \in O$.

3. *Gehören* (f_1, O_1) *und* (f_2, O_2) *zu* F_G, *so ist* $f_1 f_2^{-1} \neq 0$ *und regulär im Durchschnitt* $O_1 \cap O_2$.

Ist die Funktion f im Gebiet G analytisch, so ist beispielsweise die Menge mit dem einzigen Element (f, G) eine COUSINsche Verteilung. Es sei F_G irgendeine COUSINsche Verteilung. Zum Punkt $\mathfrak{z}_0 \in G$ wählt man $(f, O) \in F_G$ mit $\mathfrak{z}_0 \in O$ beliebig. Die Vielfachheit der „Nullstelle" $\mathfrak{z}_0$ von F_G ist dann durch $\nu(\mathfrak{z}_0) \equiv \nu(\mathfrak{z}_0, F_G) = \nu(\mathfrak{z}_0, 0, f)$ unabhängig von der Wahl von (f, O) erklärt. Die Menge $[\nu(\mathfrak{z}) > 0]_{\mathfrak{z}}$ ist im Gebiet G eine abgeschlossene Nullstellenfläche mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Umgekehrt gibt es zu jeder im Gebiet G abgeschlossenen Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ eine COUSINsche Verteilung, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$, und zwar mit der vorgeschriebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ verschwindet.

Wenn die Nullstellenflächen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ kein Flächenelement gemeinsam haben, so besteht ihr Durchschnitt $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ nach dem zweiten WEIERSTRASSschen Satz[17]) aus höchstens abzählbar vielen komplexen Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen kleiner als $2n-2$, wobei in jedem kompakten Teil von $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ nur endlich viele liegen. Bezeichnet man, wie in der ganzen Arbeit, die Teilmannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ mit $\hat{\mathfrak{N}}$, so unterscheiden sich $\hat{\mathfrak{N}}$ und $\hat{\mathfrak{N}}_1 \cup \hat{\mathfrak{N}}_2$ nur um eine Nullmenge auf $\hat{\mathfrak{N}}_1 \cup \hat{\mathfrak{N}}_2 \geqq \hat{\mathfrak{N}}$. Daher ist die Integraldefinition

$$\int_{\mathfrak{N} \cap M} \partial \chi^{2n-2} = \int_{\hat{\mathfrak{N}} \cap M} \partial \chi^{2n-2} \tag{3.25}$$

sinnvoll. Die Sätze 3 bis 7 gelten. Mit der Existenzaussage in Satz 2 verhält es sich dagegen nicht so. Wenn nämlich M in einer kompakten Teilmenge K von $\mathfrak{N}$ liegt, also auf $\mathfrak{N}$ beschränkt ist, so braucht $K \cap \hat{\mathfrak{N}}$ nicht kompakt, also $M \cap \hat{\mathfrak{N}}$ auf $\hat{\mathfrak{N}}$ nicht beschränkt zu sein. Ist ein Differential $\partial \chi^{2n-2}$ über eine auf $\mathfrak{N}$ beschränkte Menge M örtlich integrierbar, so braucht es nicht über M integrierbar zu sein. Daß dies in den wichtigsten Fällen doch richtig ist, wäre leicht sofort zu zeigen, ergibt sich aber später in Satz 11 von selbst.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie sich die Begriffe: „Nullstellenfläche, Vielfachheit einer a-Stelle, COUSINsche Verteilung und Integral über eine Nullstellenfläche gemäß (3.25)" übertragen, wenn man statt des umgebenden $\mathfrak{z}$-Raumes $\mathfrak{R}^{2n}$ eine $2n$-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ wählt.

[16]) Vergleiche [3], Kap. V, § 4, Satz 33, S. 321.
[17]) Vergleiche [9], Kap. II, § 17, S. 131—134 und [11], S. 79.

Es braucht darauf nicht weiter eingegangen zu werden. Nun folgen einige Hilfssätze über die Verhältnisse im $\mathfrak{z}$-Raum.

Hilfssatz 2. *Mit Q werde die Darstellung des projektiven Raumes von § 3 b, mit $\hat{\mathfrak{R}}$ die Menge der gewöhnlichen Punkte der Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Dann projiziert sich eine Nullmenge N von $\hat{\mathfrak{R}}$ in eine Nullmenge $\dot{N}=[\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}\in Q]_{\mathfrak{q}}$ von Q.*

Hilfssatz 3. *Die komplexe Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2k}$ von $\mathfrak{R}^{2n}$ mit $2k<2n-2$ projiziert sich in eine Nullmenge $\dot{\mathfrak{M}}=[\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{q}\in\mathfrak{M}^{2k}]_{\mathfrak{q}}$ von Q.*

Beweise. In Hilfssatz 3 sei $\dot{N}=\dot{\mathfrak{M}}$ und $N\equiv\hat{\mathfrak{R}}=\mathfrak{M}^{2k}$ gesetzt. Die Menge $N_1=N\cap[z_n=0]$ projiziert sich in eine Nullmenge $\dot{N}_1$ von Q. Die Projektion von $N_2=N-N_1$ sei $\dot{N}_2$. Nun wählt man den Punkt $\mathfrak{y}\in\hat{\mathfrak{R}}-[z_n=0]$, die Abbildung $\alpha(\mathfrak{w})=\mathfrak{z}(\mathfrak{w})\in\mathfrak{P}_{\mathfrak{y}}(\hat{\mathfrak{R}})$ und die Umgebung $U(\mathfrak{y}|\alpha)\subseteqq\hat{\mathfrak{R}}-[z_n=0]$ beliebig. Durch α wird $N_2'=\alpha^{-1}\big(U(\mathfrak{y}|\alpha)\cap N_2\big)$ auf die Menge $N_2\cap U(\mathfrak{y}|\alpha)$ abgebildet, diese wird auf $\dot{N}_2^*$ in Q projiziert, und $\dot{N}_2^*$ durch die Umkehrung von $\mathfrak{a}(\mathfrak{v})$ auf $\dot{N}_2'=\mathfrak{a}^{-1}(\dot{N}_2^*)$ abgebildet. Nach (3.14) wird N_2' durch $\mathfrak{v}(\mathfrak{w})=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{z_\nu(\mathfrak{w})}{z_n(\mathfrak{w})}\mathfrak{e}_\nu$ auf $\dot{N}_2'$ abgebildet. Da diese analytische Abbildung meßbar ist, ist im Falle von Hilfssatz 2 mit N_2' auch $\dot{N}_2'$ eine Nullmenge. Im Falle von Hilfssatz 3 ist $\dot{N}_2'$ eine $2k<2n-2$ dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit des $\mathfrak{R}^{2n-2}$ also eine Nullmenge. In beiden Fällen ist die Projektion $\dot{N}_2^*=\mathfrak{a}(\dot{N}_2')$ von $U(\mathfrak{y}|\alpha)\cap N$ eine Nullmenge auf Q. Abzählbar viele $\dot{N}_2^*$ überdecken die Projektion $\dot{N}_2$ von N_2. Daher ist $\dot{N}=\dot{N}_1\cup\dot{N}_2$ eine Nullmenge auf Q, w. z. b. w.

Der Durchschnitt der Teilmenge M von $\mathfrak{R}^{2n}$ mit der Kugelschale $[r\leqq|\mathfrak{z}|\leqq s]$ werde mit $M_{r,s}$ bezeichnet.

Hilfssatz 4. *$\hat{\mathfrak{R}}_{r,r}$ ist eine Nullmenge auf $\hat{\mathfrak{R}}$. Die Projektion $\dot{N}=[r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{q}\in\mathfrak{R}_{r,r}$ mit $\mathfrak{q}\in Q]_{\mathfrak{q}}$ ist eine Nullmenge auf Q.*

Beweis. Die Funktion $\varphi(z)$ sei analytisch und die Zahl ϱ konstant. Wäre nun $|\varphi(z)|^2+|z|^2\equiv\varrho^2$, so wäre $4|\varphi'|^2+4=\Delta(|\varphi|^2+|z|^2)\equiv 0$, was unmöglich ist. Also besteht die meßbare Menge $[|\varphi(z)|^2+|z|^2=\varrho^2]$ aus höchstens abzählbar vielen analytischen Kurven, ist also eine Nullmenge der z-Ebene. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems läßt sich in einer Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ eines Punktes $\mathfrak{z}_0\in\hat{\mathfrak{R}}_{r,r}$ die Mannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{R}}$ durch $z_n=\varphi(z_1,\ldots,z_{n-1})$ darstellen. Dabei ist φ eine analytische Funktion. Auf $\mathfrak{R}_{r,r}$ gilt $|\varphi(z_1,\ldots,z_{n-1})|^2+\sum_{\nu=1}^{n-1}|z_\nu|^2=r^2$. Bei festem $z_2,\ldots,z_{n-1}$ definiert das eine Nullmenge der z_1-Ebene. Also ist auf $\hat{\mathfrak{R}}$ das meßbare $\hat{\mathfrak{R}}_{r,r}\cap U(\mathfrak{z}_0)$ eine Nullmenge. Dasselbe gilt dann von $\hat{\mathfrak{R}}_{r,r}$. Die Projektion von $\hat{\mathfrak{R}}_{r,r}$ auf Q ist nach Hilfssatz 2 und die von $\mathfrak{R}_{r,r}-\hat{\mathfrak{R}}_{r,r}$ nach Hilfssatz 3 eine Nullmenge, w. z. b. w.

Eine Menge M heiße *sternförmig* (zum Nullpunkt), wenn mit dem Punkt $\mathfrak{z}_0\in M$ für ein $\varepsilon>0$ auch alle Punkte $\lambda\,\mathfrak{z}_0$ mit $1-\varepsilon<\lambda<1+\varepsilon$ zu M gehören.

Hilfssatz 5.

Voraussetzung. *$\mathfrak{N}$ sei eine irreduzible Nullstellenfläche. Der Ursprung gehöre nicht zur Menge $\hat{\mathfrak{N}}$ der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$.*

Behauptung.

a) *Dann und nur dann ist $\hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig, wenn es ein Flächenelement $(\mathfrak{z}_0; h)$ von $\hat{\mathfrak{N}}$ und eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ von $\mathfrak{z}_0$ gibt, in der gilt:*

$$U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}} \subseteq U(\mathfrak{z}_0) \cap \left[\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu} \cdot z_\nu = 0\right]_{\mathfrak{z}}. \tag{3.26}$$

b) *Wenn $\hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig ist, so gilt (3.26) für jedes Flächenelement von $\hat{\mathfrak{N}}$, und das Differential $\partial\omega_{2n-2}$ verschwindet längs $\hat{\mathfrak{N}}$.*

c) *Wenn $\hat{\mathfrak{N}}$ nicht sternförmig ist, so ist die Menge der Punkte $\mathfrak{z}$, zu denen es ein Flächenelement $(\mathfrak{z}_0; h)$ aus $\hat{\mathfrak{N}}$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu}(\mathfrak{z}_0)\, z_\nu^{(0)} = 0$ gibt, eine auf $\hat{\mathfrak{N}}$ abgeschlossene Nullmenge.*

Beweis. Zum Flächenelement $(\mathfrak{z}_0; h)$ von $\hat{\mathfrak{N}}$ werde $\delta > 0$ so klein gewählt, daß die Gleichung $h(\mathfrak{z}) = 0$ sich in $U(\mathfrak{z}_0) = [|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta,\ \nu = 1, \ldots, n]_{\mathfrak{z}}$ nach einem z_ν, etwa z_1, durch $z_1 = \varphi(\mathfrak{x})$ mit $\mathfrak{x} = (z_2, \ldots, z_n)$ eindeutig auflösen läßt, wobei $\mathfrak{x}$ die Menge $U'(\mathfrak{z}_0) = [|z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \delta$ für $\nu = 2, \ldots, n]_{\mathfrak{x}}$ durchläuft, daß ferner $h_{z_1} \neq 0$ in $U(\mathfrak{z}_0)$ ist, und daß $U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ gilt. Ist nun $\hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig, so ist $h(\lambda\,\mathfrak{z}) = h(\mathfrak{z}) = 0$ für jeden Punkt $\mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{N}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ und $|\lambda - 1| < \varepsilon$. Auf $\hat{\mathfrak{N}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ folgt $\frac{\partial}{\partial \lambda} h(\lambda\,\mathfrak{z})|_{\lambda=1} = \sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu}(\mathfrak{z})\, z_\nu = 0$. Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß es einen Punkt $\mathfrak{z}_2 \in U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ und ein $\eta > 0$ gibt, so daß $\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu} \cdot z_\nu$ längs der Menge $[h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} \cap [|z_\nu - z_\nu^{(2)}| < \eta$ für $\nu = 1, \ldots, n]_{\mathfrak{z}} \subseteq U(\mathfrak{z}_0)$ identisch verschwindet, so gelten in der Menge $[|z_\nu - z_\nu^{(2)}| < \eta$ für $\nu = 2, \ldots, n]_{\mathfrak{x}}$ die Gleichungen:

$$h_{z_1}\varphi + \sum_{\nu=2}^{n} h_{z_\nu} \cdot z_\nu = 0 \quad \text{und} \quad h_{z_1}\varphi_{z_\nu} + h_{z_\nu} = 0. \tag{3.27}$$

Die Gln. (3.27) gelten dann auch in $U'(\mathfrak{z}_0)$. Zu jedem Punkt $\mathfrak{x} \in U'(\mathfrak{z}_0)$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{x}) > 0$, so daß für $|\lambda - 1| < \varepsilon(\mathfrak{x})$ gilt:

$$\varphi(\lambda\,\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=2}^{n} \varphi_{z_\nu}(\lambda\,\mathfrak{x}) \cdot \lambda\, z_\nu = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(\lambda\,\mathfrak{x}) \quad \text{d.h.} \quad \lambda\varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(\lambda\,\mathfrak{x}). \tag{3.28}$$

Dahei ist $U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig. Wenn zum Flächenelement $(\mathfrak{z}_1; h_1)$ ganz entsprechend die Umgebung $U(\mathfrak{z}_1)$ bestimmt wird, und wenn der Durchschnitt $U(\mathfrak{z}_0) \cap U(\mathfrak{z}_1) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ nicht leer ist, so ist die offene Teilmenge $U(\mathfrak{z}_0) \cap U(\mathfrak{z}_1) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ von $U(\mathfrak{z}_1)$ sternförmig. Längs ihr verschwindet $\sum_{\nu=1}^{n} h_{1\,z_\nu} \cdot z_\nu$ identisch, also ist $U(\mathfrak{z}_1) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ sternförmig. Die zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{N}}$ ist daher

ebenfalls sternförmig. Ist $\hat{\mathfrak{R}}$ sternförmig, $(\mathfrak{z}_0; h)$ ein Flächenelement von $\hat{\mathfrak{R}}$, so werden $U(\mathfrak{z}_0)$ und φ wie oben bestimmt. Da der Punkt $\mathfrak{z}_0$ vom Ursprung verschieden ist, gibt es nach (3.28) ein $z_\nu^{(0)} \neq 0$ für $\nu \geq 2$, etwa $z_2^{(0)} \neq 0$. Die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ werde so verkleinert, daß $z_2 \neq 0$ auf $U(\mathfrak{z}_0)$ ist. Setzt man $\mathfrak{y}(u_3, \ldots, u_n) = \varphi(1, u_3, \ldots, u_n)\, \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \sum_{\nu=3}^{n} u_\nu \mathfrak{e}_\nu$, so wird durch $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = u_2 \mathfrak{y}(u_3, \ldots, u_n)$ eine Parameterdarstellung der Fläche $\hat{\mathfrak{R}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ gegeben. Da $\mathfrak{y}$ nur von $(2n-4)$ Parametern abhängt, verschwindet $\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{y}) = 0$ identisch. Die Behauptungen a) und b) sind bewiesen. In c) kann man für alle Punkte einer Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ dieselbe Funktion h wählen. Daher besteht N_1 nach dem zweiten WEIERSTRASSschen Satz aus höchstens abzählbar vielen, komplexen Teilmannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k < 2n-2$. Also ist N_1 eine abgeschlossene Nullmenge, w. z. b. w.

Satz 9. Eine Integralumformung.

Voraussetzung. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Die Funktion $\psi(\mathfrak{z})$ sei auf $\mathfrak{R}_{r_0 r}$ mit $0 \leq r_0 < r \leq \infty$ meßbar.*

Behauptung. *Wenn in der folgenden Gl. (3.29) wenigstens eines der beiden Integrale für $|\psi|$ statt ψ existiert, so existieren beide für ψ. Es ist*

$$(3.29)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{r_0 r}} \nu(\mathfrak{z})\, \psi(\mathfrak{z})\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \int_{\mathfrak{a} \in Q} \Big\{ \sum_{r_0 < |z| < r} \nu(z; \mathfrak{a})\, \psi(z\,\mathfrak{a}) \Big\}\, \partial\omega_{2n-2}$$ [18])

Beweis. Für $r_1 > 0$ ist $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_{0 r_1}$ eine Nullstellenfläche, die nicht durch den Ursprung geht. Es sei $\mathfrak{R}^{(1)}$ die Vereinigung der sternförmigen irreduziblen Nullstellenflächen aus $\mathfrak{R}^*$. Die Darstellung Q des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{2n-2}$ sei wie in § 3b bestimmt. Die Projektion von $\mathfrak{R}^{(1)}$ auf Q ist eine Nullmenge. Zu den irreduzibeln Teilen der Nullstellenfläche $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}^{(1)}$ werden die Nullmengen von Hilfssatz 5c bestimmt, deren Vereinigung N_1^* sei. Die Projektion der Menge $L = \{\mathfrak{R}^{(1)} \cup N_1^* \cup (\mathfrak{R} - \hat{\mathfrak{R}}) \cup [z_n = 0]_{\mathfrak{z}}\} \cap [r_1 \leq |\mathfrak{z}| \leq r]_{\mathfrak{z}}$ in Q ist eine Nullmenge. Da das Differential $\partial\omega_{2n-2}$ längs $\mathfrak{R}^{(1)}$ verschwindet, gilt:

$$(3.30)\qquad \int_L \nu(\mathfrak{z})\, \psi(\mathfrak{z})\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = 0 = \int_{\mathfrak{a} \in Q} \Big\{ \sum_{z\,\mathfrak{a} \in L} \nu(z; \mathfrak{a})\, \psi(z\,\mathfrak{a}) \Big\}\, \partial\omega_{2n-2}.$$

Auf die komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{R}^* - L\} \cap [r_1 < |\mathfrak{z}| < r]_{\mathfrak{z}}$ wird Satz 6 angewandt. Zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{M}$ gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ mit $U(\mathfrak{z}_0) \cap L = \emptyset$ und eine in $U(\mathfrak{z}_0)$ reguläre Funktion $h(\mathfrak{z})$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} h_{z_\nu}(\mathfrak{z})\, z_\nu \neq 0$ auf $U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_{\mathfrak{z}} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \mathfrak{M}$. Setzt man $z_\nu = x_\nu u$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $z_n = u$, definiert man $g(\mathfrak{x}, u) = h(u\,x_1, \ldots, u\,x_{n-1}, u)$, so ist $g_u = \sum_{\nu=1}^{n-1} h_{z_\nu} \cdot x_\nu + h_{z_n} \neq 0$ längs $\mathfrak{M} \cap U(\mathfrak{z}_0)$. Die Gleichung $g(\mathfrak{x}, u) = 0$ läßt sich also nach u durch $u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(\mathfrak{x})$ auflösen. Man setzt $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi(\mathfrak{x})\, x_\nu \mathfrak{e}_\nu + \varphi(\mathfrak{x})\, \mathfrak{e}_n$,

[18]) Zu $\nu(z; \mathfrak{a})$ vergleiche S. 144 unten.

sowie $x_\nu = w_{2\nu-1} + i\, w_{2\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$. Es sei $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{z}_0$. Wählt man $U(\mathfrak{z}_0)$ hinreichend klein, so wird durch die Abbildung $\gamma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{z}_0}(\mathfrak{M})$ die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0|\gamma) = U(\mathfrak{z}_0) \cap \mathfrak{M}$ uniformisiert. Durch $\sigma(\mathfrak{z}) = \mathfrak{q} = z^{-1}\mathfrak{z}$ mit $z = \frac{z_n}{|z_n|}\,|\mathfrak{z}|$ wird der Punkt $\mathfrak{z}$ in Q projiziert. Definiert man die reellanalytische Mannigfaltigkeit Q_n wie in § 3 b, setzt man $v_\nu = t_{2\nu-1} + i\, t_{2\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und ist $\mathfrak{r} = \sigma(\mathfrak{z}_0) = \mathfrak{a}(\mathfrak{v}_0)$, so wird Q_n durch $\alpha(\mathfrak{t}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{r}}(Q_n)$ uniformisiert. Nun hat man

$$\sigma\,\mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) = \frac{|\varphi(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0)|}{|\mathfrak{y}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0)|} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} (x_\nu + x_\nu^{(0)})\, \mathfrak{e}_\nu + \mathfrak{e}_n \right\} = \mathfrak{q}$$

und

$$\mathfrak{v} = \alpha^{-1}\sigma\,\gamma = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{q_\nu}{q_n} - \frac{r_\nu}{r_n} \right) \mathfrak{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} \{(x_\nu + x_\nu^{(0)}) - x_\nu^{(0)}\}\, \mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{x}.$$

Die Identität $\alpha^{-1}\sigma\,\gamma$ hat eine positive Funktionaldeterminante. $h(\mathfrak{z})$ und $h(z\,\mathfrak{a})$ haben auf $\mathfrak{M}$ nur einfache Nullstellen. Setzt man $\mathfrak{z} = z\,\mathfrak{a} = Q$ und $P = \mathfrak{a}$, so gilt also $\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z})\,\nu(P, Q) = \nu(z; \mathfrak{a})$. Setzt man $\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0 = \mathfrak{a}^{-1}(\mathfrak{q})$ und $z(\mathfrak{q}) = \frac{\varphi(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0)}{|\varphi(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0)|}\,|\mathfrak{y}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_0)|$, schreibt man $S = \mathfrak{z}_0$, so ist die örtliche Umkehrung von σ die Abbildung $\sigma_S^{-1}(\mathfrak{q}) = z(\mathfrak{q})\,\mathfrak{q}$. Ist $\sigma(S) = \sigma(T)$, so ist $\partial\omega_{2n-2}(\sigma_S^{-1}(\mathfrak{q})) = \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{q}) = \partial\omega_{2n-2}(\sigma_T^{-1}(\mathfrak{q}))$. Wegen (3.30) ist entweder $\nu(\mathfrak{z})\,|\psi|\,\partial\omega_{2n-2}$ über $\mathfrak{M}$ oder $\sum_{z\,\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \nu(z; \mathfrak{a})\,|\psi|\,\partial\omega_{2n-2}$ über Q integrierbar. Die Voraussetzungen von Satz 6 sind erfüllt. Mit (3.30) und (2.21) erhält man

$$\int_{\mathfrak{R}_{r_1 r}} \psi(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2} = \int_Q \left\{ \sum_{r_1 < |z| < r} \nu(z; \mathfrak{a})\,\psi(z\,\mathfrak{a}) \right\} \partial\omega_{2n-2}; \tag{3.31}$$

denn $\mathfrak{R}_{rr}$ und $\mathfrak{R}_{r_1 r_1}$ sind Nullmengen. Ist $r_0 > 0$, so sei $r_0 = r_1$. Wenn $r_0 = 0$ ist, so gilt (3.31) auch für $|\psi|$ statt ψ. Läßt man $r_1 \to 0$ streben, so erhält man (3.31) nach Satz 4 auch für $r_1 = 0$. Nachträglich kann man nach Satz 4,1 den Grenzübergang auch für ψ statt $|\psi|$ ausführen, w. z. b. w.

Hilfssatz 6. *Wenn die Funktion $f \not\equiv 0$ und meromorph im Gebiet G ist, so ist der Quotient $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ über jeden kompakten Teil des Gebietes G integrierbar.*

Beweis. Es reicht, zu jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in G$ eine Umgebung anzugeben, über die $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ integrierbar ist. Dabei darf man noch die Funktion f regulär voraussetzen. Ist $f(\mathfrak{z}_0) \neq 0$, so gibt es sicher eine solche Umgebung. Ist $f(\mathfrak{z}_0) = 0$, so kann man das Koordinatensystem so wählen, daß bezüglich jeder Koordinate z_μ der Vorbereitungssatz anwendbar ist. Für $\mu = n$ gibt es beispielsweise ein $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$, eine ganze Zahl q, Funktionen $a_\varrho(z_1, \ldots, z_{n-1})$ mit $|z_n^{(0)} - a_\varrho| < \varepsilon$ für alle $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und eine Funktion $g(\mathfrak{z})$, die bei festem $z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ in $|z_n - z_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon$ analytisch ist. Es gilt in $|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - z_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon$ die Gleichung:

$$f_{z_n} f^{-1} = \sum_{\varrho=1}^{q} (z_n - a_\varrho)^{-1} + g(\mathfrak{z}). \tag{3.32}$$

Das Maximum von $|f_{z_n} f^{-1}|$ auf der Mantelfläche $[|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$, für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - z_n^{(0)}| = 2\varepsilon]_\mathfrak{z}$ sei M. Da $|g(\mathfrak{z})|$ sein Maximum auf dem Rand annimmt, gilt in dem Polyzylinder $U_n = [|z_\nu - z_\nu^{(0)}| \leq \delta$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - z_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon]_\mathfrak{z}$ die Abschätzung $|g(\mathfrak{z})| \leq M + q\,\varepsilon^{-1} = M_1$. Ist K der Kreis $[|z_n - z_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon]_{z_n}$ und K_ϱ der Kreis $[|z_n - a_\varrho| < 4\varepsilon]_{z_n}$, so gilt:

$$\int_K |f_{z_n} f^{-1}|\, dz_n\, d\bar{z}_n \leq M_1\, 4\pi\, \varepsilon^2 + \sum_{\varrho=1}^{q} \int_{K_\varrho} |z_n - a_\varrho|^{-1}\, dz_n\, d\bar{z}_n$$

$$\leq 4\pi\, \varepsilon^2 M_1 + 8\pi\, \varepsilon\, q = M_2,$$

$$\int_{U_n} |f_{z_n} f^{-1}|\, \partial v_{2n} \leq M_2 (\pi \delta^2)^{n-1}.$$

Entsprechend beweist man die Integrierbarkeit von $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ über eine Umgebung U_μ für jedes $\mu = 1, \ldots, n-1$. Über den Durchschnitt $\bigcap_{\mu=1}^{n} U_\mu$ sind alle $|f_{z_\mu} f^{-1}|$ integrierbar. Diese Aussage ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes, w. z. b. w.

Hilfssatz 7.

Voraussetzung. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ im Gebiet G habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Die Funktion $\psi(\mathfrak{z})$ sei auf der meßbaren Menge $M \subseteq \mathfrak{N}$ meßbar. $\nu_n(\mathfrak{z})$ sei wie auf S. 144 erklärt. In der folgenden Gl. (3.33) existiere wenigstens eines der beiden Integrale für $|\psi|$ statt ψ.*

Behauptung. *Ist Z der Raum der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{n-1}$, so gilt:*

$$(3.33)\quad \int_M \psi(\mathfrak{z})\, \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1} = \int_Z \Big\{ \sum_{\mathfrak{z} \in M} \nu_n(\mathfrak{z})\, \psi(\mathfrak{z}) \Big\} \partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1}.$$

Beweis. Zu jedem gewöhnlichen Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \hat{\mathfrak{N}}$ gibt es eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ und eine dort reguläre, in $\mathfrak{z}_0$ irreduzible Funktion $h(\mathfrak{z})$ mit $U(\mathfrak{z}_0) \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]_\mathfrak{z} = U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$. Der Punkt $\mathfrak{z}_0$ gehöre dann und nur dann zur Menge A, wenn $h_{z_n} \equiv 0$ längs $\hat{\mathfrak{N}} \cap U(\mathfrak{z}_0)$ ist. In diesem Fall läßt sich die Gleichung $h(\mathfrak{z}) = 0$ nach einem z_ν mit $\nu < n$, etwa z_1, durch $z_1 = \varphi(z_2, \ldots, z_n)$ auflösen, wobei $h_{z_1} \neq 0$ ist. Aus $h(\varphi, z_2, \ldots, z_n) \equiv 0$ folgt $h_{z_1} \varphi_{z_n} \equiv 0$ d. h. $\varphi_{z_n} \equiv 0$. Da φ nicht von z_n abhängt, steht die Menge A senkrecht auf der Ebene $[z_n = 0]$. Setzt man $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, so ist die Projektion $\dot{A}$ von A in den $\mathfrak{x}$-Raum eine Nullmenge. Das Differential $\partial z_1\, \partial \bar{z}_1 \ldots \partial z_{n-1}\, \partial \bar{z}_{n-1}$ verschwindet längs A.

Der Punkt $\mathfrak{z}_0 \in \hat{\mathfrak{N}}$ gehöre dann und nur dann zu B, wenn $h_{z_n}(\mathfrak{z}_0) = 0$ aber $h_{z_n}(\mathfrak{z}) \not\equiv 0$ längs $U(\mathfrak{z}_0) \cap \hat{\mathfrak{N}}$ ist. Verkleinert man die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ genügend, so ist $U(\mathfrak{z}_0) \cap B = U(\mathfrak{z}_0) \cap [h_{z_n}(\mathfrak{z}) = 0] \cap [h(\mathfrak{z}) = 0]$. Dieser Durchschnitt ist eine Nullmenge. Nach dem zweiten WEIERSTRASSschen Satz besteht er, also auch seine Projektion $\dot{B}^*$ in den Raum Z, aus endlich vielen komplexen Teil-

mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $2k<2n-2$. Daher ist $\dot{B}^*$ eine Nullmenge im Raum Z, woraus dasselbe für die Projektion $\dot{B}$ von B folgt.

Ebenso ist die Projektion $\dot{C}$ von $C=\mathfrak{N}-\hat{\mathfrak{N}}$ eine Nullmenge. Liegt der Punkt $\mathfrak{z}_0$ in $\mathfrak{N}-A-B-C=D$, so läßt sich die Gleichung $h=0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ durch eine analytische Funktion $z_n=\xi(\mathfrak{x})$ nach z_n auflösen. Man setzt $\mathfrak{y}(\mathfrak{x})=\sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu \mathfrak{e}_\nu+\xi(\mathfrak{x})\,\mathfrak{e}_n$, sowie $x_\nu=w_{2\nu-1}+i\,w_{2\nu}$ für $\nu=1,\ldots,n-1$. Es sei $\mathfrak{y}(\mathfrak{x}_0)=\mathfrak{z}_0$. Wählt man $U(\mathfrak{z}_0)$ hinreichend klein, so wird durch die Abbildung $\gamma(\mathfrak{w})=\mathfrak{y}(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0)\in\mathfrak{P}_{\mathfrak{z}_0}(\hat{\mathfrak{N}})$ die Umgebung $U(\mathfrak{z}_0|\gamma)=U(\mathfrak{z}_0)\cap\hat{\mathfrak{N}}$ uniformisiert. Durch $\mathfrak{x}=\sigma(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=1}^{n-1} z_\nu\,\mathfrak{e}_\nu$ wird der Punkt $\mathfrak{z}$ in den $\mathfrak{x}$-Raum Z projiziert. Der Raum Z wird durch $\alpha(\mathfrak{x})=\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0\in\mathfrak{P}_{\mathfrak{x}_0}(Z)$ uniformisiert. Dann ist $\alpha^{-1}\sigma\,\gamma(\mathfrak{w})=\alpha^{-1}\sigma\,\mathfrak{y}(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0)=\mathfrak{x}$ die Identität. Sie besitzt eine positive Funktionaldeterminante. $h(\mathfrak{z})$ und $h(\mathfrak{x},z_n)$ haben auf $U(\mathfrak{z}_0)\cap\hat{\mathfrak{N}}$ nur einfache Nullstellen. Setzt man $Q=\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+z_n\,\mathfrak{e}_n$ und $P=\mathfrak{x}$, so gilt mit den Bezeichnungen von Satz 6 $\nu(\mathfrak{z})=\nu(\mathfrak{z})\cdot\nu(P,Q)=\nu_n(\mathfrak{z})$. Schreibt man $S=\mathfrak{z}_0$, so ist die Abbildung $\sigma_S^{-1}(\mathfrak{x})=\mathfrak{y}(\mathfrak{x})$ die örtliche Umkehrung von σ. Ist $\sigma(S)=\sigma(T)$, so ist $\sigma_S^{-1}(\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar{z}_{n-1})=\partial x_1\,\partial\bar{x}_1\ldots\partial x_{n-1}\,\partial\bar{x}_{n-1}=\sigma_T^{-1}(\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar{z}_{n-1})$. Die Voraussetzungen von Satz 6 sind erfüllt. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{M\cap D}\psi(\mathfrak{z})\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar{z}_{n-1}\\&=\int\limits_{\mathfrak{x}<\infty}\Big\{\sum_{(\mathfrak{x},z_n)\in M}\nu_n(\mathfrak{x},z_n)\,\psi(\mathfrak{x},z_n)\Big\}\,\partial x_1\,\partial\bar{x}_1\ldots\partial x_{n-1}\,\partial\bar{x}_{n-1}.\end{aligned}\right\}\tag{3.34}$$

Da die entsprechenden Integrale über $M\cap(A\cup B\cup C)$ verschwinden, folgt unmittelbar die Behauptung (3.33), w. z. b. w.

Ein Integral über den Durchschnitt $M_{rs}=M\cap[r\leq|\mathfrak{z}|\leq s]$ werde mit $\int_{rM}^{s}$ bezeichnet.

Satz 10. Integralumformung.

Voraussetzung. *Die Funktionen $g(\mathfrak{z})$ und $f(\mathfrak{z})$ seien in $|\mathfrak{z}|<R\leq\infty$ analytisch. Die Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}$ bezüglich f sei $\nu(\mathfrak{z})$. Die Nullstellenfläche der Funktion f sei $\mathfrak{N}$.*

Behauptung. *Für r in $0<r<R$ gilt:*

$$V_{2n-2}(r)^{-1}\int\limits_{0\mathfrak{N}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,g(\mathfrak{z})\,\partial v_{2n-2}=W_{2n-2}^{-1}\int\limits_{0\mathfrak{N}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,g(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}+\nu(0)\,g(0).\tag{3.35}$$

Beweis. Es sei $f'(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=1}^{n} f_{z_\nu}\cdot z_\nu$ und $\dot{f}(z\,\mathfrak{a})=\frac{\partial}{\partial z}f(z\,\mathfrak{a})$. Nach Hilfssatz 6 ist die Funktion $f^{-1}f'g$ über jede Kugel $[|\mathfrak{z}|\leq r<R]$ integrierbar. Nach Satz 7 ist sie für fast alle r über den Kugelrand $[|\mathfrak{z}|=r]$ integrierbar. Aus

(3.19), (3.22), Satz 7 und 9 folgt:

$$(3.36)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)}\displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} g(\mathfrak{z})\,\frac{f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})}\,\partial v_{2n-1} = \dfrac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\,\frac{f'(r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a})}{f(r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a})}\,d\varphi\right\}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) \\ \quad = \dfrac{1}{W_{2n-2}}\displaystyle\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} g\,\frac{f'(z\,\mathfrak{a})}{f(z\,\mathfrak{a})}\,dz\right\}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) \\ \quad = \dfrac{1}{W_{2n-2}}\displaystyle\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\sum_{0<|z|\leqq r}\nu(z;\mathfrak{a})\,g(z\,\mathfrak{a})\right\}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) + \nu(0)\,g(0)\ ^{19}) \\ \quad = \dfrac{1}{W_{2n-2}}\displaystyle\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,g(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu(0)\,g(0). \end{cases}$$

Diese Rechnung gilt zunächst für $g\equiv 1$. Daraus folgt die Existenz des Integrales $\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}$. Dann existiert aber das letzte Integral in (3.36) für g und $|g|$. Also gilt (3.36) für eine beliebige analytische Funktion g.

Der Quotient $z_\mu\frac{f_{z_\mu}g}{f}$ ist für fast alle r über $|\mathfrak{z}|\leq r$ integrierbar. Ist $\mathfrak{a}\in Q$ und $\mathfrak{z}=z\,\mathfrak{a}$, so gilt längs des Kugelrandes $|\mathfrak{z}|=r$

$$\begin{aligned} f_{z_\mu}\cdot z_\mu\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{z}) &= r^{2n-1} f_{z_\mu}\,z\,a_\mu\,\partial\varphi\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) \\ &= -i\,r^{2n-1} f_{z_\mu}\,\partial(z\,a_\mu)\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) \\ &= -i\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} r\,f_{z_\mu}\,\partial z_\mu\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\overset{\mu}{\|}\ldots\partial z_n\,\partial\bar z_n. \end{aligned}$$

Daraus folgt z. B. für $\mu=n$ und $\mathfrak{x}=(z_1,\ldots,z_{n-1})$ mit $\varrho=\sqrt{r^2-|\mathfrak{x}|^2}$ die Umformung

$$(3.37)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)}\displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} g\,\frac{f_{z_n}}{f}\cdot z_n\,\partial v_{2n-1} \\ \quad = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)}\displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} g\,f^{-1}f_{z_n}\,\partial z_n\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar z_{n-1} \\ \quad = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)}\displaystyle\int_{|\mathfrak{x}|\leq r}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_n|=\varrho} g\,f^{-1}f_{z_n}\,dz_n\right\}\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x}) \\ \quad = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)}\displaystyle\int_{|\mathfrak{x}|\leq r}\left\{\sum_{|z_n|\leqq\varrho}\nu_n(\mathfrak{x},z_n)\,g(\mathfrak{x},z_n)\right\}\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x}) \\ \quad = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)}\displaystyle\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,g(\mathfrak{z})\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar z_{n-1}. \end{cases}$$

Diese Rechnung gilt zunächst für $g\equiv 1$. Daraus folgt die Existenz des Integrales $\int_{0\mathfrak{R}}^{r}\nu(\mathfrak{z})\,\partial z_1\,\partial\bar z_1\ldots\partial z_{n-1}\,\partial\bar z_{n-1}$. Dann existiert das letzte Integral in (3.37) auch für eine beliebige analytische Funktion g und $|g|$. Also gilt (3.37) allgemein. Entsprechende Formeln gelten für $\mu=1,\ldots,n-1$. Aus (3.36)

[19]) Denn für fast alle $\mathfrak{a}\in Q$ ist $\nu(0;\mathfrak{a})=\nu(0)$.

und (3.37) folgt (3.35) für *fast* alle Werte r. Wählt man speziell $g \equiv 1$, so existieren beide Integrale in (3.35) für *alle* r in $0 < r < R$, da die Differentiale ∂v_{2n-2} und $\partial\omega_{2n-2}$ längs der Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ eine nichtnegative Dichte haben. Dann existieren aber beide Integrale in (3.35) für *jede* analytische Funktion g und für *jedes* r in $0 < r < R$. Wegen $\int_{r\mathfrak{N}}^{r} = 0$ sind sie sogar stetig in r. Daher gilt (3.35) *allgemein*, w. z. b. w.

Satz 10 wurde von H. KNESER [6] § 3 für den Fall, daß $g \equiv 1$ und $\mathfrak{N}$ eine $2k$-dimensionale, komplexe Teilmannigfaltigkeit mit $2k \leq 2n-2$ ist, die in der Vollkugel $[|\mathfrak{z}| < R]$ abgeschlossen ist und nicht durch den Nullpunkt geht, bewiesen. Die Vollkugel $[|\mathfrak{z}| < R]$ ist ein COUSINsches Gebiet. Ist also die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ in dieser Vollkugel abgeschlossen, so folgt die Existenz der in Satz 10 vorausgesetzten Funktionen f von selbst.

Mit Satz 10 ist der folgende, schon angekündigte Satz bereits im wesentlichen bewiesen.

Satz 11. Existenz von Integralen über Nullstellenflächen.

Voraussetzung. *Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ enthalte die kompakte Menge K. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N}$ sei $\hat{\mathfrak{N}}$. Die meßbare Menge M sei in $K \cap \hat{\mathfrak{N}}$ enthalten. Das Differential*

$$(3.38)\quad \left\{\begin{aligned} \partial\chi^{2n-2} = &\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}\,\partial\bar{z}_\mu\,\partial z_\nu\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial\bar{z}_n \\ &+ \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}\,\partial z_1\,\partial\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \partial z_n\,\partial\bar{z}_n \end{aligned}\right.$$

sei längs $\hat{\mathfrak{N}}$ meßbar auf M. Für $\mathfrak{z} \in M$ gelte die Abschätzung

$$(3.39)\qquad |a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})| \leq L.$$

Behauptung. *Das Differential $\partial\chi^{2n-2}$ ist über die Menge M integrierbar.*

Beweis. Um jeden Punkt $\mathfrak{y} \in K$ gibt es eine Kugel U, so daß das Integral $\int_{K\cap U} \partial v_{2n-2}$ existiert. Wählt man den Punkt $\mathfrak{x} \in \hat{\mathfrak{N}} \cap K \cap U$ und die Abbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{x}}(\hat{\mathfrak{N}})$ beliebig, ist χ die Dichte des Differentials $\partial\chi^{2n-2}$ und ψ die Dichte des Differentials ∂v_{2n-2} längs $\hat{\mathfrak{N}}$, so schätzt man ab:

$$\begin{aligned} |\chi| &\leq \sum_{\mu\neq\nu} |a_{\mu\nu}| \left|\frac{\partial\left(\bar{z}_\mu, z_\nu, z_1, \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots, z_n, \bar{z}_n\right)}{\partial(u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}, \bar{u}_{n-1})}\right| + \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{n} |a_{\mu\mu}| \left|\frac{\partial\left(z_1, \bar{z}_1, \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots, z_n, \bar{z}_n\right)}{\partial(u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}, \bar{u}_{n-1})}\right| \\ &\leq L \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial\left(z_1, \ldots \overset{\mu}{|} \ldots, z_n\right)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right| \left|\frac{\partial\left(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n\right)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right| \\ &\leq n\,L \sum_{\mu=1}^{n} \left|\frac{\partial\left(z_1, \ldots \overset{\nu}{|} \ldots, z_n\right)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right|^2 = n\,L\,\psi. \end{aligned}$$

Mit der Dichte ψ ist daher auch die Dichte χ über $M \cap K \cap U$ integrierbar. Mittels einer DIEUDONNÉ-Zerlegung der kompakten Teilmenge K von $\mathfrak{R}^{2n}$ folgt, daß χ über M integrierbar ist, w. z. b. w.

Satz 11 hätte man auch direkt beweisen können. Übrigens verschwinden alle Differentiale $\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_r \partial \bar{z}_1 \dots \partial \bar{z}_s$ mit $r \neq s$ und $r + s = 2n - 2$ längs $\hat{\mathfrak{R}}$; denn die Parameterdarstellungen $z_\lambda(u)$ sind analytisch.

Literatur.

[1] AHLFORS, L.: The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. fenn. nova, Ser. A **3**, 31 (1941). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale. Paris: Hermann 1948. — [3] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, S. 251—371. Berlin 1934. — [4] KÄHLER, H.: Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Hamburger math. Einzelschriften 16. H. 1934. — [5] KNESER, H.: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. Sonderausgabe a. d. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **31**, 19 (1936). — [6] KNESER, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. D.M.V. **48**, 1—28 (1938). — [7] LORENTZ, G. G.: Beweis des Gaussschen Integralsatzes. Math. Z. **51**, 61 (1949). — [8] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 46. 1936. — [9] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 2. Lieferung, 2. Auflage 1929. — [10] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, Bd. 1. 1950. — [11] WEIERSTRASS, K.: Werke Bd. 3. — [12] WEYL, H., and J. WEYL: Meromorphic curves. Ann. Math. (2) **39**, 516—538 (1938). — [13] WEYL, J.: Analytic curves. Ann. Math. (2) **42**, 371—408 (1941). — [14] WEYL, H., and J. WEYL: Meromorphic functions and analytic curves. Princeton university press 1943. (Annals of mathematics studies.)

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 9. Juni 1952.)

ACKERMANN, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 155—166 (1953)

Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II.

Von
WILHELM ACKERMANN.

In einer vorhergehenden Arbeit mit dem gleichen Haupttitel[1]) habe ich ein Axiomensystem für eine typenfreie Logik aufgestellt und den zugehörigen Widerspruchsfreiheitsbeweis gegeben. In dem vorliegenden zweiten Teil sollen die ersten Ableitungen aus dem Axiomensystem erfolgen, die die Gewinnung der Mathematik betreffen. Dabei wird hier noch nicht das genannte Axiomensystem voll verwendet, sondern nur ein Teilsystem, das von der Implikation keinen Gebrauch macht. Auf die frühere Arbeit wird in einigen Punkten, z. B. was den Beweis der Widerspruchsfreiheit anbetrifft, verwiesen; im allgemeinen ist ihre Kenntnis nicht wesentlich.

§ 1. Ein vereinfachtes Axiomensystem.

Das im ersten Teil aufgestellte Axiomensystem, das wir mit $\sum$ bezeichnen wollen, enthält die Aussageverknüpfungen &, $\vee$, $-$, $\rightarrow$. Für die Ableitung eines wesentlichen Teiles der Mathematik ist nun ein Ausschnitt aus dem System ausreichend, der die Verknüpfung $\rightarrow$ nicht enthält. Da die Axiome in § 2 von Teil I aber sämtlich unter Verwendung von $\rightarrow$ formuliert sind, ist es am einfachsten, wenn wir uns zur Beschreibung dieses Ausschnitts der zweiten, in § 3 von Teil I angegebenen Form des Axiomensystems bedienen. Ein vereinfachtes System entsteht daraus, indem wir die Ableitungsschemata und die Grundformeln, die $\rightarrow$ enthalten, fortlassen. Die Widerspruchsfreiheit ist also auch jetzt gewährleistet. Damit ist das System schon beschrieben; wir wollen die Grundformeln und Schemata unten zusammenstellen. Die Begriffe „Formel" und „Term" sind die gleichen wie früher; nur werden die Formeln und Terme, die $\rightarrow$ enthalten, fortgelassen.

I. Grundformeln.

Als Grundformeln haben wir zunächst solche der Form $\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ und $\overline{\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n}$, wobei die $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ keine freie Variable enthalten. Hierbei ist φ ein n-stelliges spezielles Prädikatzeichen. Es gehört dazu eine effektive Einteilung aller n-tupel $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ von konstanten Termen in eine von zwei Klassen, wobei aber die Terme, die sich nur durch die Benennung der gebundenen Variablen unterscheiden, immer gleich behandelt werden müssen. $\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ ist Grundformel, falls $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ zur ersten Klasse gehört, sonst ist $\overline{\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n}$ Grundformel.

[1]) ACKERMANN, W.: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. (Erweitertes System.) Math. Z. **55**, 364—384 (1952).

II. Ableitungsregeln.

$$A_I \cdot \frac{\Psi}{\Psi, \mathfrak{A}} \qquad A_{II} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}}{\Psi, \mathfrak{A}} \qquad A_{III} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Theta}$$

$$B_I \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad B_{II} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A} \quad \Psi, \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \qquad B_{III} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}}{\Psi, \overline{\overline{\mathfrak{A}}}}$$

$$B_{IV} \cdot \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}}{\Psi, \overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}} \qquad B_V \cdot \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}} \quad \Psi, \overline{\mathfrak{B}}}{\Psi, \overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}} \qquad B_{VI} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}(a)}{\Psi, (Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$$

$$B_{VII} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}(a)}{\Psi, (x)\,\mathfrak{A}(x)} \qquad B_{VIII} \cdot \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(a)}}{\Psi, \overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}} \qquad B_{IX} \cdot \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(a)}}{\Psi, \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}}$$

$$B_X \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}{\Psi, \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)} \qquad B_{XI} \cdot \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}}{\Psi, \overline{\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}}$$

$$B_{XII} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}} \qquad B_{XIII} \cdot \frac{\Psi, \mathfrak{A} \quad \Psi, \overline{\mathfrak{A}}}{\Psi}$$

Mit jedem Schema kann auch eine Umbenennung der gebundenen Variablen verbunden werden. Für die nähere Erläuterung der Schemata vgl. § 3 von Teil I. Die Anzahl der Schemata kann auch vermindert werden, indem man in bekannter Weise „und" durch „oder" und „(x)" durch „(Ex)" definiert oder umgekehrt.

III. Weitere Grundformeln.

Weitere Grundformeln erhalten wir in der folgenden Weise: Es sei $\mathfrak{A}(a)$ eine Formel, die die freie Variable a enthält. Für jeden konstanten Term $\mathfrak{a}$ lasse sich eine Herleitung für $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ aus den Grundformeln I mit Hilfe der obigen Schemata effektiv angeben. Dann dürfen wir $\mathfrak{A}(a)$ als weitere Grundformel hinzufügen, wobei wir statt der Variablen a ebensogut eine andere freie Variable nehmen können. Weiter dürfen wir auch Grundformeln $\mathfrak{A}(a)$ hinzufügen, falls bei der Ableitung von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ auch Grundformeln der ebengenannten Art benutzt wurden, usw.

In dieser allgemeinen Weise ist aber die Bildung der Grundformeln III nur dann gestattet, falls die Schemata B_X und B_{XI} nicht zur Ableitung der Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ benutzt werden. Ist das der Fall, so muß die Bildung der Grundformeln III eine gewisse Einschränkung erfahren. Wir müssen dann wie in Teil I erläutert wurde, den Begriff des Rangs einer Formel verwenden. Grundformeln I haben den Rang 1. Bei den Ableitungsschemata ist, abgesehen von B_X und B_{XI}, der Rang einer Formel der Konklusion so wie der Rang der ihr entsprechenden Formel in der Prämisse, bzw. gleich dem größten Rang, der unter den ihr entsprechenden Formeln in den Prämissen vorkommt. Für B_X und B_{XI} gilt die gleiche Regel für Formeln der Reihe Ψ, während beim Übergang von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ zu $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ oder von $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ zu $\overline{\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ der Rang sich um eins erhöht. Die nach obiger Art gewonnenen Grundformeln III sind nun als solche nur dann zulässig, wenn der Rang sämtlicher Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ bei den

zugehörigen Herleitungen eine bestimmte Rangzahl nicht übersteigt. Die größte Rangzahl von $\mathfrak{A}(a)$, die bei einer Herleitung für $\mathfrak{A}(a)$ vorkommt, heißt dann der Rang der betreffenden Grundformel III.

Wir wollen dieses einfache Axiomensystem mit Δ bezeichnen. Handelt es sich nur darum, einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für Δ zu geben, so kann der in Teil I gegebene Widerspruchsfreiheitsbeweis natürlich wesentlich vereinfacht werden, da dann einfach alle Überlegungen, die Implikationsformeln betreffen — und das macht den Hauptumfang des Beweises aus — weggelassen werden können.

Das System Δ erlaubt kein volles Operieren mit den Formeln nach den Regeln des Prädikatenkalküls, da der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht in voller Allgemeinheit vorhanden ist. Es hat aber die folgende Eigenschaft: Für die Theorie irgendeines Wissensgebietes seien uns die mit den Mitteln des engeren Prädikatenkalküls ausdrückbaren spezifischen Axiome gegeben. Diese Axiome seien sämtlich von der ersten Stufe, sollen also keine Prädikatvariable enthalten. In diesen Axiomen kommen verschiedene individuelle Grundprädikate (ein- oder mehrstellige) vor. Wir behaupten dann, alle Sätze der Theorie, die wir mit Hilfe des engeren Prädikatenkalküls aus den Axiomen ableiten können (es stehen nur Sätze in Frage, die ebenfalls nur die individuellen Grundprädikate, aber keine variablen Prädikate enthalten), können auch in unserem System Δ abgeleitet werden, falls wir zu den spezifischen Axiomen der Theorie noch weitere Axiome hinzufügen, die die Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für jedes Grundprädikat ausdrücken, also Axiome der Form $\varphi a \vee \overline{\varphi a}$, $\psi a b \vee \overline{\psi a b}$, usw.

Es genügt zu zeigen, daß für alle Formeln $\mathfrak{A}$ ohne Prädikatvariable sich $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ beweisen läßt. Denn dann haben wir in unserem System, so weit die Formeln ohne freie Prädikatvariable in Frage kommen, die Möglichkeit, jeden Schluß der Prädikatenlogik auszuführen[2]). $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ läßt sich aber für die obigen Formeln durch Induktion nach dem Formelaufbau beweisen. Man erhält nämlich aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ nach B_{XII}, A_{III}, B_{III} und B_I $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ erhält man ferner nach B_{XII} $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, nach A_I und A_{III} $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, nach B_{IV} und A_{III} $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}$ und nach B_{II}, A_{III}, B_I $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee \overline{(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}$. Ähnlich erhält man aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ auch $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \overline{(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})}$. Ferner erhalten wir aus $\mathfrak{A}(a) \vee \overline{\mathfrak{A}(a)}$ nach B_{XII} $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{\mathfrak{A}(a)}$, nach B_{IX} $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$, nach A_{III} und B_{VII} $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$, $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, nach A_{III} und B_I $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$. Ebenso erhält man aus $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{\mathfrak{A}(a)}$ nach A_{III} und B_{VI} $\overline{\mathfrak{A}(a)}$, $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$, nach A_{III} und B_{VIII} $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$, $\overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$ und nach B_I $(Ex)\,\mathfrak{A}(x) \vee \overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$.

Da der Kalkül Δ zusammen mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten alle Schlüsse des Prädikatenkalküls enthält, läßt sich auch die Richtigkeit der folgenden Behauptung einsehen: Es sei eine Klasse von Formeln gegeben, so daß für jede Formel der Klasse der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in

[2]) Vgl. z. B. Schütte, K.: Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. **122**, 47—65 (1950).

Δ beweisbar ist. Gewisse Formeln dieser Klasse seien Axiome. Alle Formeln der obigen Klasse, die sich aus den genannten Axiomen nach den Regeln der gewöhnlichen Prädikatenlogik ableiten lassen und zwar so, daß der Beweis wieder nur Formeln der Klasse enthält, lassen sich auch im System Δ gewinnen.

Die gleichen Behauptungen, die wir eben für das System Δ formulierten, gelten natürlich auch für unser gesamtes Axiomensystem $\sum$, da die Schemata von Δ zu in $\sum$ beweisbaren Regeln werden, wenn wir bei den Formelreihen die Kommata durch Disjunktionszeichen ersetzen und etwa nach links hin klammern.

§ 2. Ableitung der Zahlentheorie.

Für den Aufbau der Zahlentheorie brauchen wir die folgenden Grundprädikate: ζa (a ist eine Zahl), $a =_{\zeta} b$ (a und b sind die gleichen Zahlen), $\alpha\, a\, b\, c$ (c entsteht aus a und b durch Addition), $\mu\, \alpha\, b\, c$ (c entsteht aus a und b durch Multiplikation), ferner einen Term 0, eine Termfunktion, die jedem Term $\mathfrak{a}$ einen anderen $\mathfrak{a}'$ zuordnet. Man kommt mit den folgenden Axiomen aus (vgl. HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I, S. 371 und 465):

1. $\zeta\, 0$
2. $\overline{\zeta\, a} \vee \zeta\, a'$
3. $a =_{\zeta} a$
4. $\overline{a =_{\zeta} b} \vee \overline{\mathfrak{A}(a)} \vee \mathfrak{A}(b)$
5. $\overline{a' =_{\zeta} 0}$
6. $\overline{a' =_{\zeta} b'} \vee a =_{\zeta} b$
7. $\overline{\alpha\, a\, b\, c} \vee \overline{\alpha\, a\, b\, d} \vee c =_{\zeta} d$
8. $\alpha\, a\, 0\, a$
9. $\overline{\alpha\, a\, b\, c} \vee \alpha\, a\, b'\, c'$
10. $\overline{\mu\, a\, b\, c} \vee \overline{\mu\, a\, b\, d} \vee c =_{\zeta} d$
11. $\overline{\zeta\, a} \vee \mu\, a\, 0\, 0$
12. $\overline{\mu\, a\, b\, c} \vee \overline{\alpha\, c\, a\, d} \vee \mu\, a\, b'\, d$
13. $\overline{\mathfrak{A}(0)} \vee (Ex)\left(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \zeta\, x \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(x')}\right) \vee \overline{\zeta\, a} \vee \mathfrak{A}(a)$.

Wir müssen also die obigen Grundprädikate so in Δ definieren, daß diese Axiome beweisbar sind. Bei 4. und 13. ist es dabei nicht erforderlich, daß diese Formeln für beliebige $\mathfrak{A}$ beweisbar sind, sondern es genugt, wenn das für die Formeln $\mathfrak{A}$ zutrifft, deren Formelaufbau induktiv gemäß den folgenden Regeln geschieht: a) $\mathfrak{a} =_{\zeta} \mathfrak{b}, \zeta\, \mathfrak{a}, \mu\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}, \alpha\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$ sind für beliebige Terme Formeln; b) aus Formeln entstehen wieder Formeln durch die Aussageverknüpfungen und die Quantoren. — Um alle Sätze der Zahlentheorie zu gewinnen, ist es ferner nach den Bemerkungen des vorigen Abschnitts nötig, die Formeln

$$a =_{\zeta} b \vee \overline{a =_{\zeta} b}, \quad \zeta\, a \vee \overline{\zeta\, a}, \quad \alpha\, a\, b\, c \vee \overline{\alpha\, a\, b\, c}, \quad \mu\, a\, b\, c \vee \overline{\mu\, a\, b\, c}$$

zu beweisen. Die Definition der Grundprädikate geschieht folgendermaßen: Wir führen zunächst das Zeichen $\equiv$ ein, wie schon in § 2 des ersten Teiles. Die Grundformeln für $\equiv$ spielen hier übrigens keine Rolle. o sei nun eine Abkürzung für den Term $\hat{x}\, x \equiv x$, $\mathfrak{a}'$ eine solche für $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{a}\, \mathfrak{v})$. Die Terme o, o', o'', ... und die daraus durch Umbenennung der gebundenen Variablen entstehenden Terme sollen Zahlzeichen heißen. (Bemerkung: Es ist hierbei

nicht an eine mengentheoretische Erklärung der Zahlen gedacht. Wir nehmen vielmehr, und das reicht für unsere Zwecke vollkommen aus, als Repräsentanten der Zahlen irgendeine abzählbare Reihe von Symbolen.) Als Mitteilungszeichen für die Zahlzeichen verwenden wir $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots$. Die Definition für $=_\zeta$ sieht nun so aus: Für konstante $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist $=_\zeta \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ Grundformel, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bis auf eine verschiedene Benennung der gebundenen Variablen formal die gleiche Gestalt haben und beide Zahlzeichen sind, während sonst $\overline{=_\zeta \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ Grundformel ist. Statt $=_\zeta \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ schreiben wir gewöhnlich $\mathfrak{a} =_\zeta \mathfrak{b}$. ζ, α, μ werden so definiert: Für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist $\zeta\,\mathfrak{a}$ Grundformel, falls $\mathfrak{a}$ ein Zahlzeichen ist, sonst ist $\overline{\zeta\,\mathfrak{a}}$ Grundformel. $\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als konstante Terme vorausgesetzt, Grundformel, falls $\mathfrak{b}$ ein Zahlzeichen ist und $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{a}$ dadurch entsteht, daß die Striche von $\mathfrak{b}$ an $\mathfrak{a}$ angehängt werden, im übrigen gilt $\overline{\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$. $\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist Grundformel, falls $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Zahlzeichen sind und $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik gilt, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die entsprechenden natürlichen Zahlen ersetzt werden; in allen anderen Fällen gilt $\overline{\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$. Die Formeln, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für die Grundprädikate ausdrücken, lassen sich nun sofort als Grundformeln II gewinnen (vgl. die in Teil I gegebene Ableitung von $a \equiv b \vee \overline{a \equiv b}$). Ferner lassen sich auch die zahlentheoretischen Axiome beweisen. (1) ist Grundformel I. Die Axiome (2) bis (12) sind leicht als Grundformeln II zu gewinnen. [Bei der Ableitung von (4) werden die Schemata B_X und B_{XI} nicht gebraucht.] Die Formeln (13) lassen sich zunächst beweisen, da man ja die Schlüsse des Prädikatenkalküls zur Verfügung hat, falls für a ein bestimmtes Zahlzeichen $\mathfrak{d}$ gesetzt wird. Für andere konstante Terme, die für a eingesetzt werden, sind sie ebenfalls zu beweisen, da dann $\overline{\zeta\,\mathfrak{a}}$ Grundformel ist. Schemata B_X und B_{XI} werden dabei nicht gebraucht. Demnach gewinnt man (13) ebenfalls als Grundformeln II. Damit ist gezeigt, daß das System Δ zur Gewinnung der Zahlentheorie ausreicht.

§ 3. Die verzweigte Prädikatenlogik.

Sind uns in Δ gewisse individuelle Grundprädikte gegeben, für die sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisen läßt, so lassen sich im Bereiche der Formeln, die man mit diesen Grundprädikaten aufbauen kann, alle Schlüsse der Prädikatenlogik ausführen, wie wir es schon in § 1 darlegten. Es gilt aber mehr. Wir zeigen, daß das System Δ uns auch ermöglicht, über dem gegebenen Grundbereich eine verzweigte Prädikatenlogik aufzubauen. — Wir wollen im folgenden eine verzweigte Logik über der Zahlentheorie aufbauen; man erkennt aber an den Ausführungen, daß die spezielle Wahl des Grundbereichs nicht wesentlich ist, sondern daß der Aufbau in der gleichen Weise über jedem anderen Grundbereich geschehen kann.

Wir führen zunächst den folgenden verengten Formelbegriff ein. Formeln sollen nur durch endliche Anwendung der folgenden Regeln erhalten werden: (1) $\mathfrak{a} =_\zeta \mathfrak{b}, \zeta\,\mathfrak{a}, \alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind für beliebige Terme Formeln; (2) aus Formeln

entstehen wieder Formeln durch die Aussageverknüpfungen und die Quantoren. Dabei sind $=_{\zeta}$, ζ, α, μ in der gleichen Weise definiert wie in § 2. Wir wollen die Formeln dieser Art zum Unterschied von weiter unten definierten *Formeln erster Art* nennen. Für die Formeln erster Art gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wie schon in § 2 gezeigt wurde. Wir bemerken ferner, daß wir für jede Formel von Δ effektiv feststellen können, ob es sich um eine Formel erster Art handelt oder nicht. Als Abkürzung für Formeln erster Art verwenden wir $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ usw. Wir führen nun spezielle Prädikate τ_n^1 ein. $\tau_n^1 \mathfrak{a}$ soll für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ Grundformel sein, wenn $\mathfrak{a}$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ hat; sonst soll $\overline{\tau_n^1 \mathfrak{a}}$ gelten. Offenbar läßt sich $\tau_n^1 a \vee \overline{\tau_n^1 a}$ beweisen, da dies eine Grundformel II ist. Ferner lassen sich die Formeln $\overline{\tau_n^1 a} \vee a\, b_1 \ldots b_n \vee \overline{a\, b_1 \ldots b_n}$ beweisen. Diese sind nämlich ebenfalls als Grundformeln II mit Hilfe der Schemata B_X und B_{XI} in der erlaubten Weise zu gewinnen, da für die Formeln erster Art der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisbar ist.

Wir definieren weiter Formeln *zweiter Art* und wollen wieder die Definition so gestalten, daß für jede Formel effektiv feststellbar ist, ob es sich um eine Formel zweiter Art handelt oder nicht. Zunächst erklären wir einen weiteren Formelbegriff, aus dem sich die Formeln zweiter Art durch eine besondere Eigenschaft herausheben.

(1) $\mathfrak{a} =_{\zeta} \mathfrak{b}$, $\zeta\, \mathfrak{a}$, $\alpha\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\mu\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\, \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, $\tau_m^1 \hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\, \mathfrak{A}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ sind Formeln; die in ihnen etwa vorkommenden freien Variablen heißen Variable der ersten Klasse;

(2) $\tau_n^1 a$, $\tau_n^1 b$, usw. sind Formeln, die in ihnen vorkommenden Variablen sind solche der ersten Klasse;

(3) $a\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, $b\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, usw. sind für beliebige Terme $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ Formeln. Die Variablen a, b, usw. heißen Variable der zweiten Klasse, etwa sonst vorkommende freie Variable solche der ersten Klasse.

(4) Mit $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\mathfrak{A}}$ Formel, die Variablen behalten dabei ihren Charakter.

(5) Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ Formeln. Freie Variable sind dabei von der ersten Klasse, falls sie in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der ersten Klasse vorkommen. (In einer Formel fehlende Variable rechnen dabei zur ersten Klasse.) Sonst rechnen die freien Variablen zur zweiten Klasse. Eine Ausnahme bilden die Formeln $\tau_n^1 a \,\&\, \mathfrak{A}(a)$ und $\overline{\tau_n^1 a} \vee \mathfrak{A}(a)$ bezüglich der Variablen a (oder entsprechend für anders benannte Variable). Bei diesen rechnet die Variable a immer zur ersten Klasse.

(6) Ist $\mathfrak{A}(a)$ Formel, so sind $(Ex)\,(\tau_n^1 x \,\&\, \mathfrak{A}(x))$ und $(x)\,(\overline{\tau_n^1 x} \vee \mathfrak{A}(x))$ Formeln. Hier vorkommende freie Variable gehören zur gleichen Klasse wie in $\mathfrak{A}(a)$. (Selbstverständlich müssen alle Formeln so gebildet sein, daß sie überhaupt Formeln des Formalismus Δ darstellen.)

Die Formeln *zweiter Art* werden nun folgendermaßen definiert: Wir schließen zunächst die Formeln aus und verwenden sie auch nicht zum Aufbau anderer

Formeln, in denen eine Variable zweiter Klasse, z.B. a, gleichzeitig in der Form $a\,\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_m$ und $a\,\mathfrak{c}_1 \dots \mathfrak{c}_n$ $(m \neq n)$, oder auch gleichzeitig in der Form $a\,\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_m$ und $\tau_n^1 a\,(m \neq n)$ auftritt. Jede in einer Formel vorkommende Variable zweiter Klasse hat danach eindeutig den Charakter eines einstelligen, zweistelligen usw. Prädikates. Unter den übrigbleibenden Formeln sind nun diejenigen zweiter Art, die keine freie Variable der zweiten Klasse enthalten.

Für die Formeln zweiter Art läßt sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisen. Wir beweisen diesen Satz zusammen mit einem anderen, der allgemeiner die Formeln der obigen Definition betrifft, jedoch nur solche, bei denen eine Variable der zweiten Klasse eindeutig den Charakter eines Prädikates mit einer bestimmten Anzahl von Leerstellen hat. Die beiden Sätze heißen:

I. Für eine Formel $\mathfrak{A}$ ohne freie Variable der zweiten Klasse ist $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ beweisbar. II. Für eine Formel $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k)$ mit den einzigen Variablen zweiter Klasse $a_1, a_2, \dots, a_k$ ist $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k) \vee \overline{\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k)}$ beweisbar, wenn die $a_1, \dots, a_k$ in $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k)$ als n_1-, …, n_k-stellige Prädikate auftreten. — Die beiden Sätze werden durch simultane Induktion nach dem Formelaufbau bewiesen. — Für die Formeln (1) und (2) der obigen Definition kommt nur Satz I in Frage, der für diese Fälle schon früher bewiesen war, bzw. sich aus schon bewiesenen Sätzen sofort ergibt. Desgleichen war für die Formeln (3) Satz II schon bewiesen. Bei den Formeln, die nach (4) bis (6) gebildet sind, also die Form $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $(Ex)\,(\tau_n^1 x \,\&\, \mathfrak{A}(x))$, $(x)\,(\overline{\tau_n^1 x} \vee \mathfrak{A}(x))$ haben, gilt, falls Variable zweiter Klasse $a_1, \dots, a_k$ vorkommen, nach Voraussetzung $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$, bzw. außerdem $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$, bzw. $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \overline{\tau_m^1 b} \vee \mathfrak{A}(b) \vee \overline{\mathfrak{A}(b)}$, woraus sich leicht mit Hilfe der Regeln von $\mathfrak{A}$ der Satz II für die neuen Formeln ergibt. Beim Falle (6) ist dabei zu benutzen, daß $\tau_m^1 b \vee \overline{\tau_m^1 b}$ beweisbar ist. Handelt es sich um Formeln ohne freie Variable der zweiten Klasse, so beweist sich Satz I entsprechend. Bei den nach (5) gebildeten Formeln der Form $\tau_n^1 a \,\&\, \mathfrak{A}(a)$ und $\overline{\tau_n^1 a} \vee \mathfrak{A}(a)$ und den nach (6) gebildeten Formeln ist dabei wieder $\tau_n^1 a \vee \overline{\tau_n^1 a}$ zu benutzen.

Nachdem wir den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für Formeln zweiter Art (im folgenden mit $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \dots$ bezeichnet) bewiesen haben, können wir weiter spezielle Prädikate τ_n^2 einführen. $\tau_n^2 \mathfrak{a}$ ist für konstante $\mathfrak{a}$ Grundformel, wenn $\mathfrak{a}$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}_1 \dots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n)$ hat. Sonst ist $\overline{\tau_n^2 \mathfrak{a}}$ Grundformel. Es lassen sich dann wieder $\tau_n^2 a \vee \overline{\tau_n^2 a}$ und $\overline{\tau_n^2 a} \vee a\,b_1 \dots b_n \vee \overline{a\,b_1 \dots b_n}$ beweisen. Weiter können wir Formeln dritter Art einführen. Der Formelaufbau ist wie bei den Formeln zweiter Art, nur kommen bei (1) die folgenden Vorschriften hinzu: $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \dots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n)$ und $\tau_n^2 \hat{\mathfrak{v}}_1 \dots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n)$ sind Formeln, in denen nur Variable der ersten Klasse vorkommen. Bei (2) sind noch $\tau_n^2 a$, $\tau_n^2 b$, … Formeln, in denen nur Variable der ersten Klasse vorkommen. (5) und (6) sind entsprechend zu erweitern. Entsprechend gelangen wir zu Formeln höherer Art und zugehörigen Prädikaten τ_n^m.

Wir wollen ferner an einem Beispiel zeigen, daß das Axiom der Extensionalität in der Form, wie es in der verzweigten Logik auftritt, beweisbar ist. Wir bezeichnen zur Abkürzung den Ausdruck $(x)(\overline{a\,x} \vee b\,x \,\&\, a\,x \vee \overline{b\,x})$ mit $a \sim b$ und wollen die folgende Formel beweisen:

$$\overline{\tau_1^1 a} \vee \overline{\tau_1^1 b} \vee \overline{a \sim b} \vee \overline{\tau_2^1 c} \vee \overline{c\,a} \vee c\,b.$$

Wir können diese Formel als Grundformel II gewinnen, wenn wir sie für den Fall beweisen, daß für a, b, c konstante Terme $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ eingesetzt werden. Bei den $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ können wir uns auf solche Terme beschränken, für die $\tau_1^1\mathfrak{a}$, $\tau_1^1\mathfrak{b}$, $\tau_1^2\mathfrak{c}$ beweisbar sind. Demnach haben wir nur zu zeigen, daß

$$\overline{\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)} \vee \{\overline{\hat{x}\,\mathfrak{C}_2(x)\}\,(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))} \vee \{\hat{x}\,\mathfrak{C}_2(x)\}\,(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$$

abgeleitet werden kann.

Der Beweis geschieht durch Induktion nach dem Formelaufbau von $\mathfrak{C}_2$. Da durch den Formelaufbau auch Formeln mit freien Variablen der zweiten Klasse entstehen, müssen wir ähnlich wie bei Satz I und II der vorigen Seite den Satz auch auf diese Formeln ausdehnen, die wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{C}_2'$ bezeichnen. Wir zeigen also die Beweisbarkeit der Formeln

$$* \quad \overline{\tau^1_{n_1} a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau^1_{n_k} a_k} \vee \overline{\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)} \vee \overline{\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))} \vee \mathfrak{C}_2'\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x),$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die in $\mathfrak{C}_2'$ vorkommenden Variablen der zweiten Klasse sind. Der Fall, daß diese Variablen in $\mathfrak{C}_2'$ und in $*$ die Disjunktionsglieder $\overline{\tau^1_{n_i} a_i}$ fehlen, soll eingeschlossen sein. $\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x)$ und $\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)$ sind konstante Terme. Aus $*$ erhält man durch B_X und B_{XI} die obige zu beweisende Formel.

Wir bemerken zunächst, daß $\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x)$ und $\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)$ keine Zahlzeichen sind, da sie ja eines der Zeichen $=_\zeta$, ζ, α, μ enthalten, die in Zahlzeichen nicht vorkommen. Hat daher $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ und also auch $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ eine der Formen $\zeta\,\mathfrak{d}, \mathfrak{d} =_\zeta \mathfrak{e}$, $\alpha\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$, $\mu\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$, so ist $*$ beweisbar, da $\overline{\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))}$ beweisbar ist. Das gilt auch für den Fall, daß $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ freie Variable enthalten. Weiter ist leicht einzusehen, daß die Beweisbarkeit der Formeln $*$ beim Aufbau der Formeln mit Hilfe der Zeichen $-$, $\&$, $\vee$, (Ex), (x) erhalten bleibt. Demnach gilt also $*$ zunächst allgemein, falls $\mathfrak{C}_2'$ eine Formel erster Art ist, daher auch infolge B_X und B_{XI}, falls $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ die Form $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\,\mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}\,(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ haben. Da $\tau_n^1\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\,\mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$, bzw. $\overline{\tau_m^1\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\,\mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)}$ $(m \neq n)$ beweisbar ist, gilt die Behauptung für alle Formeln, die die in der Regel (1) beim Aufbau der Formeln zweiter Art genannte Gestalt haben. Weiter gilt sie für die Formeln der Gestalt (2), da entweder $\tau_n^1(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1'(x))$ und $\tau_n^1(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ oder $\overline{\tau_n^1\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x)}$ und $\overline{\tau_n^1\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)}$ beide beweisbar sind, je nachdem $n = 1$ oder $n \neq 1$. Hat $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ die in (3) angegebene Gestalt, also die Form $a\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ die entsprechende Gestalt $a\,\mathfrak{b}_1' \ldots \mathfrak{b}_m'$, so ist $\overline{\tau_n^1 a} \vee \overline{\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)} \vee \overline{a\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m} \vee a\,\mathfrak{b}_1' \ldots \mathfrak{b}_m'$ als Grundformel II beweisbar. Denn die Formel braucht nur bewiesen zu werden,

falls für a ein Term $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ eingesetzt wird. $\mathfrak{C}_2'$ hat dann aber eine schon vorher behandelte Gestalt. Ferner ist bei den Regeln (4) bis (6) leicht einzusehen und teilweise schon gezeigt, daß sie wieder zu Formeln $\mathfrak{C}_2'$ führen, für die die Behauptung stimmt.

Wir haben nun alle Mittel an der Hand, um eine verzweigte Prädikatenlogik aufzubauen. Diese, die an und für sich eine mehrsortige Theorie ist, kann im gewöhnlichen Prädikatenkalkül durch sortenbeschränkte Formeln wiedergegeben werden, und zwar kann jeder Beweis der verzweigten Logik so wiedergegeben werden, daß er nur sortenbeschränkte Formeln benutzt[3]). Nun haben wir in den τ_n^m gerade die nötigen Sortenprädikate zur Verfügung. Ein Beweis für eine Formel n. Art kann so geführt werden, daß er nur Formeln n. Art benutzt. Da aber für Formeln n. Art der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt, ist unser System Δ imstande, alle Schlußweisen der verzweigten Logik wiederzugeben. Die spezifischen Axiome der mehrsortigen Theorie, als welche Extensionalitätsaxiom und Komprehensionsaxiom zu rechnen wären, sind beweisbar. Die wiedergegebene verzweigte Logik ist eine solche, die nur den Begriff der Ordnung, aber nicht den der Stufe kennt.

§4. Einführung der rationalen und der reellen Zahlen.

Wir wollen die rationalen Zahlen nicht mit Hilfe irgendwelcher zahlentheoretischen Relationen einführen, sondern durch ein direktes Repräsentantensystem. Wir gehen dabei ähnlich vor wie bei der Einführung der natürlichen (bzw. nichtnegativen) ganzen Zahlen. Hier repräsentierten $\hat{x}(x = x)$, $\hat{y}(\{\hat{x}(x = x)\}(y))$, usw. diese Zahlen, wobei die Benennung der gebundenen Variablen gleichgültig war. Ebenso hätten wir auch irgendeine andere abzählbare Reihe von konstanten Termen zur Repräsentation wählen können. In gleicher Weise können wir die rationalen Zahlen durch irgendeine Termreihe repräsentieren, bei der jeder Term eine eineindeutige Beziehung zu einem geordneten Paar von gewöhnlichen Zahlen hat. Wir gehen demnach folgendermaßen vor: $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ mögen wieder irgendwelche nichtnegative ganze Zahlen, d.h. genauer die Terme, die diese Zahlen bei uns repräsentieren, bedeuten. Wir führen nun ein spezielles Prädikat ϱ („ist eine rationale Zahl") ein. Für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist $\varrho\,\mathfrak{a}$ Grundformel, wenn $\mathfrak{a}$ die Gestalt $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \,\&\, \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$, aber $\mathfrak{z}_2$ nicht die Form $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{v})$ hat, oder wenn $\mathfrak{a}$ die Gestalt $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \vee \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ hat, aber weder $\mathfrak{z}_1$ noch $\mathfrak{z}_2$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{v})$ haben; für andere konstante Terme ist $\overline{\varrho\,\mathfrak{a}}$ Grundformel. Für die Terme $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \,\&\, \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ bzw. $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \vee \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ gebrauchen wir im folgenden, so weit sie die Eigenschaft ϱ haben, die Abkürzungen $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ bzw. $\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$. Mit 0_ϱ bezeichnen wir den Term $\mathfrak{p}(0, 0')$, mit 1_ϱ den Term $\mathfrak{p}(0', 0')$. Weitere spezielle Prädikate, die wir

[3]) Vgl. hierüber und über die äquivalente Wiedergabe von mehrsortigen Theorien durch sortenbeschränkte Formeln in der üblichen Prädikatenlogik A. Schmidt, Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik [Math. Ann. **123**, 187—200 (1951)]. — Die dort verlangte Bedingung, daß zu jeder Sorte ein passendes Individuum existiert, ist hier erfüllt.

einführen, sind $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}$, $\alpha_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\mu_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$. Bei diesen Prädikaten sind für konstante Terme die folgenden Formeln Grundformeln:

(1) $$\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) \underset{\varrho}{=} \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4) \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) \underset{\varrho}{=} \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4)$$

falls $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_4 = \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_3$. Das letzte ist hier so zu verstehen, daß die Beziehung im Sinne der gewöhnlichen Arithmetik richtig ist, falls $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_4$ durch die Zahlen, die sie repräsentieren, ersetzt werden. Entsprechend sind die Angaben bei den folgenden Grundformeln zu verstehen.

(2) $\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$; $\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4)$, falls $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_4 < \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_3$.

$\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4)$, falls $\mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_3 < \mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_4$.

(3) $\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$ und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$

falls $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_4 \cdot \mathfrak{d}_6 + \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_3 \cdot \mathfrak{d}_6 = \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_4 \cdot \mathfrak{d}_5$; $\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$

und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$, falls $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_4 \cdot \mathfrak{d}_6 = \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_6 + \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_4 \mathfrak{d}_5$.

$\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$ und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$,

falls $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_4 \cdot \mathfrak{d}_6 + \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_4 \cdot \mathfrak{d}_5 = \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_3 \cdot \mathfrak{d}_6$.

(4) $\mu_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$ und $\mu_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$

und $\mu_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$ und $\mu_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6))$,

falls $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_3 \cdot \mathfrak{d}_6 = \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_4 \cdot \mathfrak{d}_5$.

In allen anderen Fällen sind für konstante $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $\overline{\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}}$, $\overline{\alpha_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}$, $\overline{\mu_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}$ Grundformeln. Es lassen sich dann leicht die Formeln $a \underset{\varrho}{=} b \vee \overline{a \underset{\varrho}{=} b}$, $a \underset{\varrho}{<} b \vee \overline{a \underset{\varrho}{<} b}$, $\alpha_\varrho\, a\, b\, c \vee \overline{\alpha_\varrho\, a\, b\, c}$, $\mu_\varrho\, a\, b\, c \vee \overline{\mu_\varrho\, a\, b\, c}$ als Grundformeln II gewinnen, in der gleichen Weise auch alle Axiome für die Theorie der rationalen Zahlen, z. B. die Sätze über die Kommutativität, Assoziativität von Multiplikation und Addition, die über die Transitivität von $\underset{\varrho}{=}$ und $\underset{\varrho}{<}$ usw. Wir brauchen das nicht im einzelnen auszuführen. Die betreffenden Formeln sind für konstante Terme, die für die Variablen eingesetzt werden, unmittelbar aus den Grundformeln für $\underset{\varrho}{=}$, $\underset{\varrho}{<}$, α_ϱ, μ_ϱ zu beweisen, so daß sich die Formeln mit Variablen als Grundformeln II gewinnen lassen, in der gleichen Weise, wie wir schon die zahlentheoretischen Axiome erhielten.

Es darf uns hierbei nicht stutzig machen, daß z. B. die beiden Brüche $\mathfrak{d}_1/\mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{d}_2/\mathfrak{d}_1$ durch die beiden Terme $\hat{x}(x \equiv \mathfrak{d}_1 \,\&\, x \equiv \mathfrak{d}_2)$ und $\hat{x}(x \equiv \mathfrak{d}_2 \,\&\, x \equiv \mathfrak{d}_1)$ wiedergegeben werden, die doch inhaltlich die gleiche Bedeutung haben. Die beiden Terme treten bei unserem Aufbau der Rationalzahlen als zwei verschiedene Zeichengruppen und als sonst nichts auf. Für die beiden Terme läßt sich die Verschiedenheit im Sinne von $\equiv$, wie im Sinne von $\underset{\varrho}{=}$ beweisen. Unser System ist also nicht extensional. Unsere Einführung der Rational-

zahlen, ebenso wie der natürlichen Zahlen, hat metamathematischen Charakter. Allerdings ist die benötigte Metalogik in dem Formalismus selbst enthalten.

Über dem Grundbereich der Rationalzahlen läßt sich nun eine verzweigte Prädikatenlogik aufbauen. Wir brauchen diese hier nicht im einzelnen zu entwickeln. Sie wird genau so aufgebaut wie die verzweigte Logik über der Zahlentheorie, die wir in § 3 beschrieben. An die Stelle der Grundprädikate $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\zeta\,\mathfrak{a}$, $\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ in § 3 treten hier die Grundprädikate $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}$, $\varrho\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}$, $\alpha_\varrho\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mu_\varrho\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$. Die Prädikate τ_n^m haben jetzt natürlich eine andere Bedeutung und müßten, wenn sie mit den früheren τ_n^m zugleich aufträten, durch einen anderen Buchstaben als τ bezeichnet werden.

Für die Definition der *reellen Zahlen* ist vom logischen Standpunkt aus die Schnittdefinition die geeignetste. Im Sinne der verzweigten Analysis gibt es nur reelle Zahlen verschiedener Ordnungen. Bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{A}(z)$ die Formel $(Ex)\,(\varrho\,x \,\&\, z\,x) \,\&\, (Ex)\,(\varrho\,x \,\&\, \overline{z\,x})$, mit $\mathfrak{B}(z)$ die Formel $(x)\,(\overline{z\,x} \vee (Ey)\,(x \underset{\varrho}{<} y \,\&\, z\,y))$ und mit $\mathfrak{C}(z)$ die Formel $(x)\,(\overline{z\,x} \vee (y)\,(\overline{y \underset{\varrho}{<} x} \vee z\,y))$, so würde die Aussage „$z$ ist eine reelle Zahl der n. Ordnung" durch $\mathfrak{A}(z) \,\&\, \mathfrak{B}(z) \,\&\, \mathfrak{C}(z) \,\&\, \tau_1^n\,z \,\&\, (x)\,(\overline{z\,x} \vee \varrho\,x)$ wiedergegeben werden. Bezeichnen wir diese Formel mit $\mathfrak{R}^n z$, so läßt sich $\mathfrak{R}^n a \vee \overline{\mathfrak{R}^n a}$ beweisen.

Läßt man in $\mathfrak{R}^n a$ das Konjunktionsglied $\tau_1^n a$ fort und setzt dafür $(x)\,(a\,x \vee \overline{a\,x})$, so können wir den veränderten Ausdruck, den wir mit $\mathfrak{R}\,a$ bezeichnen, lesen als: „a ist eine reelle Zahl". Offenbar läßt sich in Δ, da $\overline{\tau_1^n a} \vee a\,b \vee \overline{a\,b}$ beweisbar ist, auch $\overline{\mathfrak{R}^n a} \vee \mathfrak{R}\,a$ ableiten, d. h. jede reelle Zahl n. Ordnung ist eine reelle Zahl. Die Gleichheit und Größerkleinerbeziehung kann in der üblichen Weise definiert werden, indem wir unter $a \underset{r}{=} b$ und $a \underset{r}{<} b$ Abkürzungen für

$$\mathfrak{R}\,a \,\&\, \mathfrak{R}\,b \,\&\, (x)\,(\overline{a\,x} \vee b\,x \,\&\, a\,x \vee \overline{b\,x})$$

und

$$\mathfrak{R}\,a \,\&\, \mathfrak{R}\,b \,\&\, (Ex)\,(\overline{a\,x} \,\&\, b\,x)$$

verstehen. $\mathfrak{A}\mathfrak{d}\,a\,b\,c$ („die reelle Zahl c entsteht aus a und b durch Addition") soll eine Abkürzung für

$$\mathfrak{R}\,a \,\&\, \mathfrak{R}\,b \,\&\, \mathfrak{R}\,c \,\&\, (z)\,(c\,z \sim (Ex)\,(Ey)\,(a\,x \,\&\, b\,y \,\&\, \alpha_\varrho\,x\,y\,z))$$

bedeuten, wo $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ für $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ steht. $\mathfrak{M}\mathfrak{u}\,a\,b\,c$ („die reelle Zahl c entsteht aus a und b durch Multiplikation") ist eine Abkürzung für

$$(z)\,((\overline{c\,z} \sim (a\,0_\varrho \sim b\,0_\varrho) \,\&\, a\,0_\varrho \vee b\,0_\varrho \vee (E\,x)\,(x \underset{\varrho}{<} z \,\&\, \overline{c\,x})) \sim$$
$$\sim (Ex)\,(Ey)\,((a\,x \sim \overline{a\,0_\varrho}) \,\&\, (b\,y \sim \overline{b\,0_\varrho}) \,\&\, \mu_\varrho\,x\,y\,z))$$

(vgl. die Definition von 0_ϱ zu Eingang dieses Paragraphen). Unsere Überlegungen in § 3, entsprechend übertragen, zeigen nun, daß unser Formalismus zum Aufbau der verzweigten Analysis ausreicht. Der wichtigste Unterschied

gegenüber der gewöhnlichen Analysis liegt darin, daß eine Quantifizierung nur über den Bereich der reellen Zahlen einer bestimmten Ordnung wieder eine reelle Zahl, und zwar eine solche von höherer Ordnung liefert. Zum Beispiel wird eine Menge m von reellen Zahlen n. Ordnung durch einen Term $\mathfrak{m}$ mit den Eigenschaften $\overline{\mathfrak{m}\,a} \vee \mathfrak{R}^n a$ und $\tau_1^{n+1}\,\mathfrak{m}$ wiedergegeben. Die obere Grenze dieser Menge wird durch den Term $\hat{x}(Ey)\,(\tau^n y \& y\,x \& \mathfrak{m}\,y)$ dargestellt, der die Eigenschaft $\mathfrak{R}^{n+1}$ hat. Eine Entwicklung der verzweigten Analysis im einzelnen soll hier nicht gegeben werden[4]). Wir konstatieren nur die bemerkenswerte Tatsache, daß das einfache System Δ zum Aufbau der verzweigten Analysis ausreicht.

[4]) Daß man mit Hilfe der verzweigten Analysis einen beträchtlichen Teil der Analysis überhaupt, zum Teil in etwas modifizierter Form erhält, darüber vgl. z. B. P. LORENZEN, Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis [Math. Z. **54**, 1—24 (1951)].

Lüdenscheid, Sauerfelderstr. 22.

(Eingegangen am 23. Juni 1952.)

BUCHHOLZ, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 167—192 (1953)

Die Lösungen einer besonderen Whittakerschen inhomogenen Differentialgleichung.

Von
HERBERT BUCHHOLZ.

1. *Einleitung.* Es sei die inhomogene Differentialgleichung (D.Gl.)

$$(1)\qquad \begin{cases} z^2\cdot Y''(z)+\left\{\dfrac{1-\mu^2}{4}+\varkappa z-\dfrac{z^2}{4}\right\}\cdot Y(z) \\ \qquad =\dfrac{C}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot e^{-z/2}\cdot z^{(1+\nu)/2} \qquad z^{(1+\nu)/2}=\exp\left(\dfrac{1+\nu}{2}\cdot\ln z\right) \end{cases}$$

vorgelegt, in der C eine beliebige Konstante bedeutet und μ und $\varkappa$ zwei beliebige reelle oder komplexe Parameter sind. Bei verschwindender rechter Seite bilden die beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$, sofern $\varkappa\neq n+\dfrac{1+\mu}{2}$ mit $n=0,1,2\ldots$ ist, bekanntlich ein linear unabhängiges Lösungspaar von (1). Dabei möge die Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ gemäß der Gleichung

$$(2)\qquad M_{\varkappa,\mu/2}(z)=\frac{z^{(1+\mu)/2}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma(1+\mu)}\cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa;\ 1+\mu;\ z\right)$$

definiert sein. Diese Definitionsgleichung behält infolge der Gleichung

$$(2a)\qquad \Gamma\left(\frac{1-m}{2}-\varkappa\right)\cdot M_{\varkappa,-\frac{m}{2}}(z)=\Gamma\left(\frac{1+m}{2}-\varkappa\right)\cdot M_{\varkappa,+\frac{m}{2}}(z)\qquad (m=0,1,2\ldots)$$

auch für ein verschwindendes oder negativ ganzzahliges $\mu=m$ einen Sinn.

Ersetzt man in (1) z durch $z\cdot e^{\pm i\pi}$ und gleichzeitig $\varkappa$ durch $-\varkappa$, so erfährt die linke Seite dieser Gleichung dadurch keine Änderung. Dagegen geht die rechte Seite in (1′) über. Bezeichnet also (1a) diejenige Lösung der inhomo-

$$(1)\qquad \frac{C\cdot e^{\pm\pi i\cdot\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot e^{+z/2}\cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}\qquad (1'')\qquad \frac{C'}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot e^{+z/2}\cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}$$

genen D.Gl. (1), die mit dem Gliede $z^{\frac{1+\nu}{2}}$ beginnt und um den Nullpunkt der z-Ebene herum in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe

$$(1a)\qquad Y(z)=C\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\qquad (1b)\qquad Y(z\cdot e^{\pm\pi i})=C'\cdot e^{\mp\pi i\frac{1+\nu}{2}}\cdot S^{(\nu/2)}_{-\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{\pm\pi i})$$

entwickelbar ist, so ist die Lösung der D.Gl. (1) mit (1'') als Störungsfunktion durch (1b) gegeben.

Wir merken an, daß, wenn $Y(z)$ wie in (1a) eine Lösung von (1) ist, die Funktion $U(z) = Y(z)\, e^{-\alpha z}\, z^{\beta}$ die inhomogene D.Gl.

$$(3)\quad \begin{cases} z^2 \cdot U''(z) + 2z(\alpha z + \beta) \cdot U'(z) + \\ \quad + [(\alpha^2 - \tfrac{1}{4})\, z^2 + z(2\alpha\beta + \varkappa) + \beta(\beta - 1) + (1 - \mu^2)/4] \cdot U(z) \\ \quad = C \cdot z^{\frac{1+\nu}{2} - \beta} \cdot e^{-z/2 + \alpha z} \Big/ \left(\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\right) \end{cases}$$

befriedigt.

Um die Lösungsfunktionen von (1) zu bestimmen, machen wir zunächst von der Methode der Variation der Konstanten keinen Gebrauch, sondern bestimmen den analytischen Aufbau der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ von (1a) auf direktem Wege.

2.1. *Die nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Lösung.* Wir machen zwecks Lösung von 1 (1) für die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ den Ansatz

$$(1)\qquad S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\alpha + \frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \cdot F(z) \qquad \text{mit} \qquad F(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda \cdot \frac{z^\lambda}{\lambda!}$$

mit zunächst unbekannten Werten von α und p_λ. Durch Einsetzen von (1) in die D.Gl. ergibt sich sofort, daß $F(z)$ nur für ein $\alpha = 0$ von der angenommenen Form sein kann. Die D.Gl., der $F(z)$ selbst genügen muß, hat dann die Gestalt

$$(2)\quad \begin{cases} z^2 \cdot F''(z) + z(\nu + 1 - z) \cdot F'(z) + \left[\dfrac{\nu^2 - \mu^2}{4} + z\left(\varkappa - \dfrac{1+\nu}{2}\right)\right] \cdot F(z) \\ \qquad = \dfrac{C}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}. \end{cases}$$

Für die Koeffizienten p_λ in der Entwicklung für $F(z)$ errechnet sich durch Einsetzen in (2) das einfache Bildungsgesetz

$$(3)\quad \begin{cases} p_\lambda = \dfrac{C}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \cdot \dfrac{\delta_{0\lambda}}{\left(\frac{\nu-\mu}{2} + \lambda\right)\left(\frac{\nu+\mu}{2} + \lambda\right)} + \\ \quad + p_{\lambda-1} \cdot \lambda \cdot \dfrac{\frac{\nu-1}{2} + \lambda - \varkappa}{\left(\frac{\nu+\mu}{2} + \lambda\right)\left(\frac{\nu-\mu}{2} + \lambda\right)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots). \end{cases}$$

Wir haben mithin das Ergebnis: *Die in der Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene gültige Lösung* 1(1a) *der inhomogenen D.Gl.* 1(1) *stellt gemäß der*

Definitionsgleichung

$$(4)\quad \begin{cases} Y(z) = C \cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = C \cdot \dfrac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)} \times \\ \qquad \times {}_2F_2\left(1, \dfrac{\nu+1}{2}-\varkappa;\ \dfrac{\nu+\mu}{2}+1, \dfrac{\nu-\mu}{2}+1;\ +z\right) \\ \qquad = C \cdot \dfrac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1+\lambda\right)} \cdot z^{\lambda} \end{cases}$$

eine mit $e^{-z/2}$ multiplizierte und in z selbst unbeschränkt konvergente Potenzreihe dar, die mit der Potenz $z^{(1+\nu)/2}$ beginnt. Von dem Faktor $z^{(1+\nu)/2}$ abgesehen, der lediglich eine multiplikative Verzweigung bewirkt, ist die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ nicht nur ganz und transzendent in z, sondern auch in den drei Parametern $\mu, \varkappa$ und ν. Um das zu erreichen, mußte allerdings auf der rechten Seite von 1 (1) das Γ-Funktionenprodukt aufgenommen werden.

Zwei wichtige allgemeine Eigenschaften der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$, die vorweg erwähnt werden mögen, werden durch die Gleichungen

$$(5)\quad S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,+\mu/2}(z) = S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,-\mu/2}(z)$$

$$(6a)\quad \begin{cases} S^{(\nu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \\ = \dfrac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}-p}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda-p\right)\cdot z^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-p+\lambda+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}-p+\lambda+1\right)} + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots) \end{cases}$$

$$(6b)\quad \begin{cases} S^{(\nu/2+p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \\ = -\dfrac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)\cdot z^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda+1\right)} + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \end{cases}$$

wiedergegeben. Nach (5) ist sie eine in μ gerade Funktion, falls die anderen beiden Parameter nicht auch von μ abhängen. In (6a, b) fallen die beiden endlichen Summen für $p = 0$ fort. Nach (4) ist ferner

$$(7)\quad S^{(\pm\mu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = M_{\varkappa,\,\pm\mu/2}(z)$$

und damit auf Grund von (6a, b) für beide Vorzeichen von μ:

$$(8a)\qquad S^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa-p\right)}\cdot M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\qquad(p=1,2,3\ldots)$$

$$(8b)\qquad \begin{cases} S^{(\mu/2+p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)- \\ \qquad -\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{p-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma(\mu+1+\lambda)\cdot\lambda!}z^{\lambda}. \end{cases}$$

In (8b) enthält der zweite Summand auf der rechten Seite im Hinblick auf die Gl. 1 (2) die p ersten Glieder in der Entwicklung des ersten Summanden dieser Gleichung.

Besonders einfache spezielle Fälle von $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}$ liegen vor für $\varkappa=\frac{\nu+1}{2}$, $\varkappa=\frac{\mu-1}{2}$ und $\varkappa=-\frac{\mu+1}{2}$.

2.2. *Die nach fallenden Potenzen von z fortschreitende Lösung.* Bezeichnen wir in diesem Falle die lösende Funktion der gegebenen inhomogenen D.Gl. in 1 (1a) mit $T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ und machen dafür den Ansatz

$$(9)\qquad T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\frac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\nu}{2}+\alpha}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot G(z)\quad\text{mit}\quad G(z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_\lambda}{z^\lambda},$$

so muß jetzt in (9), um auf beiden Gleichungsseiten eine Übereinstimmung in dem höchsten Exponenten von z zu erzielen, $\alpha=-1$ gemacht werden. Für die Koeffizienten a_λ ergibt sich auch diesmal ein sehr einfaches Bildungsgesetz. Die Lösung stellt sich schließlich in der Form

$$(10)\qquad \begin{cases} Y(z)=C\cdot T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \\ \quad\sim -C\cdot\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\varkappa-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\lambda\right)}\cdot z^{-\lambda} \\ \quad\sim C\cdot\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\times \\ \qquad\times{}_3F_1\left(1,1-\frac{\nu+\mu}{2},1-\frac{\nu-\mu}{2};\varkappa+\frac{3-\nu}{2};-\frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

dar.

Diese Entwicklung ist für beliebige Werte von ν,μ und $\varkappa$ bei jedem von Null verschiedenen z divergent. Sie ist als eine nur für große Werte von z brauchbare asymptotische Lösung der gegebenen inhomogenen D.Gl. anzu-

sprechen. Für $(\nu \pm \mu)/2 = p$ und $p = 1, 2, 3 \ldots$ bricht die Entwicklung hinter dem Gliede $\lambda = p - 1$ ab. Sie ist dann eine wirkliche und für alle z brauchbare Lösung der D.Gl. Setzt man demgemäß etwa $\nu/2 = \mu/2 + p$, so folgt aus (10):

$$(11)\quad \begin{cases} T^{(\mu/2+p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = -\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\mu-1}{2}+p}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}-\varkappa-\lambda+p\right)}{\Gamma(p+\mu-\lambda)\cdot\Gamma(p-\lambda)}\,z^{-\lambda} \\ \qquad = -\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{p-i}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)z^{\lambda}}{\Gamma(\mu+1+\lambda)\cdot\lambda!}\,. \end{cases}$$

Das auf der rechten Seite von (11) stehende Polynom ist aber genau das gleiche, das in (8b) auftritt. In der Tat ist das in der zuletzt erwähnten Gleichung außerdem noch vorkommende Glied nicht eigentlich eine Lösung der inhomogenen, sondern bereits der homogenen Gleichung.

3. *Definition der beide Lösungen vereinigenden Funktion* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Es zeigt sich nun: *Die beiden Lösungen* (4) *und* (9) *haben ihren gemeinsamen Ursprung in der Integraldarstellung*

$$(1)\quad \begin{cases} \pi\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = \sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)\cdot\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)\times \\ \qquad \times\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{(1+\nu)/2}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu-\mu}{2}-t\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}-t\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu-1}{2}+\varkappa-t\right)\cdot\sin(\pi t)}\cdot z^{t}\cdot dt \\ \qquad (-1<\tau<0,\quad |z|\text{ bel.},\quad |\arg(z)|<3\pi/2) \end{cases}$$

für die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Der Integrationsweg des MELLIN-Integrals in (1) muß die reelle t-Achse zwischen den Punkten $-1 \ldots 0$ schneiden, und er muß notfalls unter Einzug von Schleifen alle im allgemeinen einfachen Pole der beiden im Zähler stehenden Γ-Funktionen zu seiner Rechten lassen. Unter z^t ist im Integranden von (1) der Ausdruck $\exp[t\cdot\ln(z)]$ zu verstehen mit $\ln(z)$ als dem Hauptwert.

Setzt man in (1) $t = |t|\cdot e^{i\varphi}$ und $z = |z|\cdot e^{i\zeta}$, so besteht auf dem unendlich fernen Halbkreis der rechten t-Halbebene für den Absolutbetrag des Integranden die asymptotische Näherung:

$$(1\,a)\quad \begin{cases} \exp\Big\{-|t|\cos\varphi\cdot\ln\left(\frac{|t|}{e\cdot|z|}\right)-\Re\left(\frac{\nu}{2}+\varkappa\right)\cdot\ln|t|-|t|\cdot\sin|\varphi|\times \\ \qquad\qquad \times\left(2\pi+\operatorname{sgn}\varphi\cdot(\zeta-\varphi)\right)\Big\}. \end{cases}$$

Auf dem Integrationsweg von (1) selbst ergibt sich also das folgende Bild: Es ist der Exponent

für $\varphi = +\pi/2$: $\qquad -\Re\left(\frac{\nu}{2}+\varkappa\right)\cdot\ln|t| +$

für $\varphi = -\pi/2$:

und einem $z =$ $\quad z \qquad\qquad z \cdot e^{+\pi i} \qquad\qquad z \cdot e^{-\pi i}$

$$+\left\{\begin{array}{lll} -|t|\left(\frac{3\pi}{2}+\zeta\right) & -|t|\left(\frac{5\pi}{2}+\zeta\right) & -|t|\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right) \\ -|t|\left(\frac{3\pi}{2}-\zeta\right) & -|t|\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right) & -|t|\left(\frac{5\pi}{2}-\zeta\right) \end{array}\right\}$$

Der Phasenwinkel von z in (1) kann also ohne Gefährdung der Konvergenz des Integrals vom Nullwert aus nach beiden Richtungen um $3\pi/2$ zunehmen. Außerdem läßt der Ausdruck (1a) erkennen, daß unter der gleichen Voraussetzung über arc (z) der Integrand von (1) längs des ganzen unendlich fernen Halbkreises der rechten t-Halbebene, d.h. für alle $|\varphi| \leqq \pi/2$, verschwindet. Man darf daher ohne Wertänderung des Integrals den offenen Integrationsweg in (1) durch Ansetzen eines solchen Halbkreises zu einem geschlossenen Weg machen. Nach dem Residuensatz muß dann das Integral gleich der Summe der Residuen in allen rechts vom Integrationsweg gelegenen Polen sein. Nun treten im vorliegenden Falle drei unendliche Polketten auf, nämlich mit $\lambda = 0, 1, 2, 3 \ldots$ in den Punkten

$$\alpha)\quad t = -\frac{\nu-\mu}{2} + \lambda \qquad \beta)\quad t = -\frac{\nu+\mu}{2} + \lambda \quad \text{und} \quad \gamma)\quad t = \lambda.$$

Alle diese Pole sind einfach, solange 1. $\frac{\nu \pm \mu}{2} \neq \pm p$ ist mit $p = 0, 1, 2 \ldots$ und 2. μ selbst von einer ganzen Zahl verschieden ist. Unter dieser vorläufigen Beschränkung macht die Berechnung der Residuen in den einzelnen Polen keine Schwierigkeit. Wir begnügen uns mit der bloßen Angabe des Ergebnisses. Es läßt sich unter Anwendung bekannter Formeln aus der Theorie der parabolischen Funktionen auf die folgenden drei Formen bringen:

$$(2)\quad R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \left\{\begin{array}{l} S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) + \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\sin\pi\mu} \cdot \left[-\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu) \cdot \frac{M_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)} + \right. \\ \qquad \left. + \sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu) \cdot \frac{M_{\varkappa,-\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \right] \\ \text{oder} \\ S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) - \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)} M_{\varkappa,\mu/2}(z) + \frac{1}{\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu) \times \\ \qquad \times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} W_{\varkappa,\mu/2}(z) \qquad |\arg(z)| < \frac{3\pi}{2} \\ \text{oder} \\ S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) - \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{2\pi} \times \\ \qquad \times \left[e^{+\frac{\pi i \nu}{2}} W_{-\varkappa,\mu/2}(z \cdot e^{+\pi i}) + e^{-\frac{\pi i \nu}{2}} W_{-\varkappa,\mu/2}(z \cdot e^{-\pi i}) \right] \end{array}\right.$$

Die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ enthält demnach einmal in der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ einen Bestandteil, der die inhomogene D.Gl. 1(1) befriedigt. Die übrigen Bestandteile werden von den Funktionen $M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ und $M_{\varkappa,\,-\frac{\mu}{2}}(z)$ oder $W_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ gebildet, die die zugehörige Gleichung befriedigen. Im ganzen genügt also die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ ebenfalls der inhomogenen D.Gl. Wir können es uns also ersparen, diese Tatsache an dem Integral (1) nachzuprüfen.

Bei der Herleitung von (2) müssen bei der Berechnung der Residuen die Fälle eines $\frac{\nu+\mu}{2} = \pm p$ und eines ganzzahligen Wertes von μ ausgeschlossen werden. Bei der von uns gewählten Form des Endergebnisses beanspruchen jedoch diese Ausnahmefälle keine besondere Berücksichtigung mehr, denn man rechnet aus der ersten Form von (2) ohne weiteres aus, daß für ein $\frac{\nu}{2} = \frac{\mu}{2} + p$ mit $p = 1, 2, 3\ldots$ in Rücksicht auf die Gl. 2 (8b) neuerdings die Beziehung

$$\left\{\begin{aligned} R^{(\mu/2+p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) &= -\frac{e^{-z/2}\,z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma(\mu+1+\lambda)}\cdot\frac{z^\lambda}{\lambda!} \\ &= -\frac{e^{-z/2}\,z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)_\lambda}{(\mu+1)_\lambda}\cdot\frac{z^\lambda}{\lambda!}}{\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)_p} \qquad (p=1,2..) \end{aligned}\right. \tag{4a}$$

$$R^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = 0 \qquad (p = 0, 1, 2\ldots) \tag{4b}$$

entsteht, während sich für ein $\frac{\nu}{2} = \frac{\mu}{2} - p$ im Hinblick auf 2(8a) der Wert 0 errechnet. In (4a) stehen im übrigen auf der rechten Seite in der Summe die p ersten Entwicklungsglieder der Funktion

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)\Big/\Gamma(1+u)\cdot{}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa;\ 1+\mu, z\right).$$

Was den Fall eines ganzzahligen $\mu = m$ anbetrifft, so folgt hierfür aus der zweiten Form von (2) sofort die Relation:

$$\left\{\begin{aligned} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,m/2}(z) &= S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,m/2}(z) + \frac{1}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu-m)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}+\varkappa\right)}\times \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)\cdot W_{\varkappa,\,m/2}(z) - \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)}\cdot M_{\varkappa,\,m/2}(z). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Hier stecken die bei der Berechnung der Residuen aus den Polen zweiter Ordnung auftretenden logarithmischen Terme bereits in der Funktion $W_{\varkappa, m/2}(z)$. Für $\nu = m$ wird in Übereinstimmung mit (4b) wiederum die rechte Seite von (5) zu Null.

Schließlich zeigt sich an der ersten Form der Gl. (2) sofort, daß gemäß Gl. (6) auch die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z)$, solange μ weder in ν noch in $\varkappa$ vorkommt, eine in μ gerade Funktion darstellt:

$$R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z) = R^{(\nu/2)}_{\varkappa, -\mu/2}(z). \tag{6}$$

Den Gl. 2(6a, b) entsprechen im vorliegenden Falle die beiden Beziehungen:

$$\begin{cases} R^{(\nu/2-\rho)}_{\varkappa, \mu/2}(z) \\ = \dfrac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}-\rho}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-\rho\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\rho-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda-\rho\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda-\rho+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda-\rho+1\right)} \cdot z^{\lambda} + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-\rho\right)} \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z) \qquad (\rho = 1, 2 \ldots) \end{cases} \tag{7a}$$

$$\begin{cases} R^{(\nu/2+\rho)}_{\varkappa, \mu/2}(z) \\ = -\dfrac{e^{-z/2} z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\rho\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\rho-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda+1\right)} \cdot z^{\lambda} + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\rho\right)} \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z). \end{cases} \tag{7b}$$

Um den Zusammenhang der Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z)$ mit der Funktion $T^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z)$ von Gl. 2(3) zu gewinnen, berücksichtigen wir jetzt die links vom Integrationsweg der Gl. (1) gelegene Polkette, die von den Punkten $t = -1, -2, -3 \ldots$ gebildet wird. In diesem Falle ist es nun zwar nicht mehr möglich, die Auswertung des Integrals (1) nach dem Residuensatz in der Weise vorzunehmen, daß man einen Halbkreis von unbegrenzt großem Radius von links her an den Integrationsweg von (1) ansetzt, denn es würde sich zeigen, daß auf ihm der Absolutbetrag des Integranden unbeschränkt zunimmt. Verschiebt man aber jetzt statt dessen den Integrationsweg etwa um N Einheiten nach links, so daß er neuerdings die reelle t-Achse im Punkte $-N-\delta$ mit $0 < \delta < 1$ schneidet, so läßt sich bei diesem Vorgehen immerhin nachweisen, daß wenigstens der Absolutbetrag des Integranden längs der beiden unendlich fernen horizontalen Seiten des entstehenden Rechtecks verschwindet. Auf dem neuen vertikalen Wegbestandteil aber ist er von der Ordnung $O\{|z|^{-N-\delta}\}$. Eine genauere Abschätzung läßt sich nur schwer erreichen. Die auf diese Weise

entstehende Entwicklung hat also asymptotischen Charakter. Sie lautet:

$$(8)\quad \begin{cases} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \equiv T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \\ \sim -\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{N-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\varkappa-\lambda\right)z^{-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda\right)}+O\left(|z|^{(1+\nu)/2-N-\delta}\right) \\ \sim \dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{(\nu-1)/2}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\times \\ \times\,{}_3F_1\left(1,\,1-\frac{\nu-\mu}{2},\,1-\frac{\nu+\mu}{2};\,\frac{3-\nu}{2}+\varkappa;\,-\frac{1}{z}\right). \end{cases}$$

Das ist genau dieselbe Entwicklung nach fallenden Potenzen von z, die sich im § 2.2 durch einen entsprechenden Lösungsansatz für die inhomogene D.Gl. 1 (1) ergeben hatte.

Im Gegensatz zur Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ ist die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ nur noch hinsichtlich μ ganz und transzendent. Im Hinblick auf die Variablen ν und $\varkappa$ hat sie meromorphen Charakter, denn offenbar besitzt sie auf Grund der zweiten Form von Gl. (2) eine unendliche Kette einfacher Pole in den Punkten $\nu/2=\frac{1}{2}+\varkappa+p$ mit $p=0, 1, 2\ldots$, und da nach (2) die Grenzwertgleichung

$$(9a)\quad \lim_{\frac{\nu}{2}\to\frac{1}{2}+\varkappa+p}\left\{\frac{R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}\right\}=(-)^p\cdot\frac{W_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \qquad (p=0, 1, 2\ldots)$$

besteht, so berechnen sich die Residuen von $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in diesen Polen hinsichtlich ν selbst gemäß der Gleichung:

$$(9b)\quad \mathfrak{Res}_{\frac{\nu}{2}=\frac{1}{2}+\varkappa+p}\left\{R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\right\}=-\frac{2}{p!}\cdot\frac{W_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \qquad (p=0, 1, 2\ldots).$$

Geht man in (1) mit ν zu dem Wert $1+2\varkappa+2p$ über, berücksichtigt dabei die Gl. (9a) und setzt dann noch unter dem Integralzeichen $t+p+1=+s$, so entsteht für $W^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die Integraldarstellung

$$(10)\quad \begin{cases} W_{\varkappa,\mu/2}(z)=\dfrac{z^{\varkappa}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)}\times \\ \times\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(+s)\,\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)\Gamma\left(-s+\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)\cdot z^{s}\cdot ds \\ \left(|\arg(z)|<\frac{3\pi}{2}\right), \end{cases}$$

die bekanntlich zuerst von E. W. BARNES[1]) angegeben worden ist. Der Integrationsweg ist in (10) so zu führen, daß er die nach links strebende Polkette von $\Gamma(+s)$ und die nach rechts strebenden Polketten der anderen beiden Γ-Funktionen voneinander trennt.

4. *Die modifizierte Funktion* $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Ist in der Ausgangsgleichung 1(1) $\nu/2 = \pm\mu/2 - p$ mit $p = 0, 1, 2 \ldots$, so wird diese Gleichung infolge der besonderen Wahl der Konstanten auf der rechten Seite homogen. Dem entspricht es, daß die beiden hier eingeführten Lösungsfunktionen S und R gemäß den Gl. 2(8a) und 3(4b) in diesem Falle entweder in die Funktion $M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ übergehen oder ganz verschwinden. Da nun die Lösung der inhomogenen D.Gl. 1(1) durch $Y(z) = C \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ gegeben ist, so liegt die Lösung der inhomogenen D.Gl.

$$(1) \qquad z^2 \cdot y''(z) + \left\{\frac{1-\mu^2}{4} + \varkappa z - \frac{z^2}{4}\right\} \cdot y(z) = A \cdot e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}$$

in der Funktion

$$(2) \qquad y(z) = A \cdot \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \equiv A \cdot \mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$$

vor. Man braucht also lediglich, um die Lösung von (1) zu bekommen, in den vorstehenden Formeln die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ mit dem angegebenen Produkt der beiden Γ-Funktionen zu multiplizieren. Das erfordert nur eine besondere Rechnung, wenn $\nu/2$ gerade den Wert $\pm\mu/2 - p$ hat. An diesen Stellen von ν hat dann zwar eine dieser beiden Γ-Funktionen einen einfachen Pol. Nach Gl. 3(4b) hat aber für dieselben Werte von ν die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ eine einfache Nullstelle. Die jetzt betrachtete Funktion $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}$ sagt in diesem Falle mehr aus.

Anstatt die dadurch erforderlich werdende Grenzwertbestimmung an der Gl. 3(2) vorzunehmen, kann man auch direkt von der für die modifizierte Funktion $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ im Falle eines $\nu/2 = \mu/2 - p$ gültigen Integraldarstellung

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R}^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = \dfrac{(-)^{p+1}\pi \cdot \Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2} + \varkappa + p\right)}{p!\,\Gamma(1+p-\mu)} \cdot e^{-z/2} \times \\ \qquad \times \dfrac{z^{(1+\mu)/2}}{2\pi i} \displaystyle\int_{\tau-p-i\infty}^{\tau-p+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(-\mu-s) \cdot z^s}{\Gamma\left(\varkappa + \dfrac{1-\mu}{2} - s\right) \cdot \sin(\pi s)} \cdot ds & (p = 0, 1, \ldots) \\ & (-1 < \tau < 0) \end{cases}$$

ausgehen, die der Gl. 3(1) entspricht, nachdem sie mit $\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)$ multipliziert worden ist. Der dabei gleichzeitig nach links verschobene Integrationsweg von (3) ist darin so zu führen, daß er die reelle Achse der s-Ebene

[1]) BARNES, E. W.: Trans. Cambr. Phil. Soc. **20**, 253—279 (1908).

zwischen den Punkten $-p$ und $-p-1$ schneidet und notfalls durch Einzug einer Schleife sämtliche Pole von $\Gamma(-s)$ und $\Gamma(-\mu-s)$ zur Rechten hat.

Man übersieht sofort, daß im Integranden von (3) selbst bei beliebigen Werten von μ jetzt auch Pole zweiter Ordnung auftreten, und zwar an den Stellen $s=0, 1, 2 \ldots$. Die übrigen rechts vom Integrationsweg liegenden Pole sind nach wie vor von der ersten Ordnung. Man erhält demnach jetzt die Entwicklung

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) &= \frac{(-)^p\,\Gamma(\mu-p)}{p!\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa-p\right)}\cdot e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma(1+\mu+\lambda)\cdot\lambda!}\times \\
&\times z^{\lambda}\cdot\left[\Psi\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+\lambda\right)-\Psi(1+\mu+\lambda)-\Psi(1+\lambda)\right]+ \\
&+\frac{(-)^p\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa+p\right)}{p!\,\Gamma(1+p-\mu)}\cdot e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}\sum_{\lambda=0}^{p}\frac{\Gamma(\lambda-\mu)\,(\lambda-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\varkappa+\frac{1-\mu}{2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)^{\lambda}+ \\
&+\frac{\Gamma(\mu-p)\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa+p\right)}{p!\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)}\times \\
&\times\left\{\ln z\cdot M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)+\frac{\pi}{\cos\pi\left(\varkappa+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot W_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}}(z)\right\} \qquad (4)\\
&\qquad\qquad (p=0, 1, 2\ldots)
\end{aligned}
$$

in der für $p=0$ die endliche Summe in der zweiten Zeile fortfällt.

Wird überdies die bisher immer noch beliebige Zahl μ einer ganzen positiven Zahl m gleich, so verliert auch diese Formel ihren Sinn, und man geht am besten wiederum von der Gl. (3) aus. In ihrem Integranden treten für $\mu=m$ nun sogar Pole dritter Ordnung auf. Wir wollen jedoch diesen Fall nicht weiter verfolgen.

5. *Halbumlaufrelationen für die Funktion* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Für die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ bestehen zwei sehr einfache Halbumlaufsrelationen. Sie ergeben sich beide am einfachsten aus der Gl. 3(2). Wird hierin der Phasenwinkel von z auf den Bereich $|\arc(z)|<\pi/2$ beschränkt, so darf die Gl. 3(2) sowohl für $z\cdot e^{+\pi i}$ als auch für $z\cdot e^{-\pi i}$ benutzt werden. Multiplizieren wir sie dann in der ersten Form in dem einen Falle mit $\exp\left(-\pi\,i/2\,(\nu+1)\right)$ und im anderen Falle mit $\exp\left(+\pi\,i/2\cdot(\nu+1)\right)$ und subtrahieren beide Ausdrücke voneinander, so fällt aus der Differenz die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ heraus, da sie sich ja für das Argument $z\cdot e^{+\pi i}$ gerade mit dem Ausdruck $\exp\left(+\pi\,i/2\cdot(\nu+1)\right)$ vervielfacht. Wendet man dann noch die bekannte Relation

$$
M_{\varkappa,\,\mu/2}\left(z\cdot e^{\pm\pi i}\right)=e^{\pm\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\cdot M_{-\varkappa,\,\mu/2}(z) \qquad (1\,a)
$$

an und berücksichtigt die Definitionsgleichung

$$(1\,b)\qquad W_{\varkappa,\mu/2}(z)=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}\cdot\left\{-\frac{M_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)}+\frac{M_{\varkappa,-\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\right\}$$

für die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$, so erhält man sofort die Formel

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &e^{-\frac{\pi i}{2}(1+\nu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{+\pi i})-e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\nu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{-\pi i})\\ &\qquad=\frac{2}{\pi i}\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\cdot\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)W_{-\varkappa,\mu/2}(z)\\ &\qquad\qquad\left(|\arc(z)|<\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Sie hätte sich im Hinblick auf 3 (10) auch mittels der Gl. (1) von Abschnitt 3 beweisen lassen.

Multipliziert man andererseits die erste Form der Gl. 3 (2), genommen für das Argument $z\cdot e^{+\pi i}$, mit $\exp\left(+\pi i/2\cdot(1\pm\mu)\right)$ und mit $\exp\left(-\pi i/2\cdot(1\pm\mu)\right)$, wenn man sie für das Argument $z\cdot e^{-\pi i}$ anschreibt, und subtrahiert wiederum die beiden so erhaltenen Beziehungen, so gelangt man im Hinblick auf 2.1 (4) zu der Formel

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &e^{+\frac{\pi i}{2}(1\pm\mu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{+\pi i})-e^{-\frac{\pi i}{2}(1\pm\mu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{-\pi i})\\ &=2i\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu\pm\mu)\cdot\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1\mp\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot M_{-\varkappa,\pm\mu/2}(z)-\right.\\ &-\frac{e^{z/2}\cdot z^{(1+\nu)/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}\times\\ &\left.\times\,{}_2F_2\left(1,\frac{\nu+1}{2}-\varkappa;\ \frac{\nu+\mu}{2}+1,\frac{\nu-\mu}{2}+1;\ -z\right)\right\}\qquad\left(|\arc(z)|<\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

in der entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen Geltung haben.

Aus den Gl. (2) und (3) könnte man nun noch entweder die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}$ mit dem Argument $z\cdot e^{+\pi i}$ oder die mit dem Argument $z\cdot e^{-\pi i}$ eliminieren. Es führt dies aber zu sehr unübersichtlichen Beziehungen.

6. *Die z-Asymptotik der Funktionen* $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ *und* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Von den beiden hier eingeführten Lösungsfunktionen der inhomogenen D.Gl. 1 (1) zeigt in Analogie zur Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ das einfachere asymptotische Verhalten. Diesem Umstand vor allem verdankt sie ihre besondere Daseinsberechtigung. Nach Gl. 3 (8) ist nämlich in dem nicht abgeschlossenen

Winkelbereich $|\arc(z)|<3\pi/2$:

$$(1)\quad \begin{cases} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \sim \dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \times \\ \qquad \times {}_3F_1\left(1, 1-\frac{\nu-\mu}{2}, 1+\frac{\nu-\mu}{2}; \frac{3-\nu}{2}+\varkappa; -\frac{1}{z}\right) \\ \qquad z\to\infty\left(+\frac{3\pi}{2}-\delta, -\frac{3\pi}{2}+\delta\right). \end{cases}$$

Diese Entwicklung gilt für alle Werte von μ, ν und $\varkappa$ mit Ausnahme derjenigen Werte von ν, für die mit $p=0, 1, 2\ldots$ $\nu/2=1/2+\varkappa+p$ ist. Nach Gl. 3 (9a, b) geht aber in diesem Falle die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ über. Von dieser Funktion ist aber ihrerseits bereits bekannt, daß sie in dem gleichen Winkelbereich die asymptotische Entwicklung

$$(2)\quad \begin{cases} W_{\varkappa,\mu/2}(z) \sim e^{-z/2}\cdot z^{\varkappa}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa, \frac{1-\mu}{2}-\varkappa; -\frac{1}{z}\right) \\ \qquad z\to\infty\left(+\frac{3\pi}{2}-\delta, -\frac{3\pi}{2}+\delta\right) \end{cases}$$

besitzt.

Die asymptotische Darstellung der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ ist wesentlich verwickelter. Sie kann unter Zuhilfenahme von (1) und der bekannten asymptotischen Entwicklung der Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$, die durch die Beziehung

$$(3)\quad \begin{cases} M_{\varkappa,\mu/2}(z) \sim \dfrac{z^{-\varkappa}\cdot e^{z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa, \frac{1-\mu}{2}+\varkappa; \frac{1}{z}\right) + \\ \quad + e^{\pm\pi i\left(\varkappa-\frac{1+\mu}{2}\right)}\dfrac{z^{\varkappa}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa, \frac{1+\mu}{2}-\varkappa; -\frac{1}{z}\right) \\ \qquad z\to\infty\left(+\frac{3\pi}{2}-\delta, -\frac{3\pi}{2}+\delta\right) \\ \qquad \text{oberes Vorzeichen: } -\frac{3\pi}{2}<\arc(z)<+\frac{\pi}{2} \\ \qquad \text{unteres Vorzeichen: } -\frac{\pi}{2}<\arc(z)<+\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

gegeben ist, aus der Gl. 3 (2) gewonnen werden. Die Gl. (3) ist dabei in der folgenden Weise zu deuten: Sie gilt in der angeschriebenen Form für jedes $z\to\infty$, falls $|\arc(z)|<3\pi/2$ ist. Dabei ist jedoch auf die Vorzeichenregel zu achten. Es kann aber natürlich in dem Bereich $|\arc(z)|<\pi/2$ der zweite Term auf der rechten Gleichungsseite fortgelassen werden und in dem Bereich $+\pi/2<|\arc(z)|<3\pi/2$ der erste Term. Dabei ist dann das Vorzeichen des Exponenten der e-Funktion entsprechend den Angaben zu dieser Gleichung

zu wählen. Für ein $\arg(z) = \pm\pi/2$ braucht lediglich derjenige Term beibehalten zu werden, für den $\Re(\pm\varkappa) > 0$ ist, und nur für $\arg(z) = \pm\pi/2$ und ein $\Re(\varkappa) = 0$ müssen in (3) beide Summanden nebeneinander benutzt werden.

Auf Grund der zweiten Form von Gl. 3 (2) ergibt sich damit für die asymptotische Darstellung der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ der Ausdruck:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \sim{}& \frac{e^{-z/2}\cdot z^{(\nu-1)/2}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\times \\
&\times {}_3F_1\left(1,\,1-\frac{\nu-\mu}{2},\,1-\frac{\nu+\mu}{2};\,\frac{3-\nu}{2}+\varkappa;\,-\frac{1}{z}\right)+ \\
&+\frac{z^{-\varkappa}e^{+z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa,\,\frac{1-\mu}{2}+\varkappa;\,+\frac{1}{z}\right)+ \\
&+e^{\pm\pi i\left(\varkappa-\frac{1+\nu}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot e^{-z/2}z^{+\varkappa}\cdot \\
&\times {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa,\,\frac{1-\mu}{2}-\varkappa;\,-\frac{1}{z}\right) \\
&\text{oberes Vorzeichen: } -\frac{3\pi}{2}<\arg(z)<+\frac{\pi}{2}; \\
&\text{unteres Vorzeichen: } -\frac{\pi}{2}<\arg(z)<+\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Er gilt in demselben Sinne wie die Gl. (3) im ganzen Winkelbereich $|\arg(z)|<3\pi/2$. In der Regel können aber darin, wie schon soeben auseinandergesetzt wurde, einzelne Glieder ganz fortgelassen werden, da sie in einzelnen kleineren Winkelbereichen infinitär kleiner sind.

Behält man in jedem der drei Glieder auf der rechten Seite von (4) nur das erste Entwicklungsglied bei und berücksichtigt die Definitionsgleichung 2.1 (4) der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$, so erhält man die übersichtlichere Darstellung:

$$
(4a)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}\cdot {}_2F_2\left(1,\,\frac{\nu+1}{2}-\varkappa;\,\frac{\nu+\mu}{2}+1,\,\frac{\nu-\mu}{2}+1;\,z\right) \\
&\sim \frac{z^{-1}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}+ \\
&+\frac{e^{+z}\cdot z^{-\varkappa-\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot\left(z\cdot e^{\pm\pi i}\right)^{\varkappa-\frac{1+\nu}{2}} \\
&\left(z\to\infty\left(-\frac{3\pi}{2}+\delta,+\frac{3\pi}{2}-\delta\right)\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Für $\nu = \pm\mu$ geht sie in die bekannte asymptotische Entwicklung für die KUMMERsche Funktion $1/\Gamma(1+\mu)\cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa, 1+\mu, z\right)$ über.

7. *Rücklaufformeln und Formeln für die Ableitung der Funktion* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Ebenso wie bei den beiden parabolischen Funktionen $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ kann man auch bei den beiden hier behandelten Funktionen R und S Beziehungen zwischen sog. benachbarten Funktionen aufstellen, das sind Beziehungen, die in den Funktionen selbst linear und homogen sind und die für gewöhnlich drei von ihnen mit Unterschieden in den Zeigerwerten von der Größe einer halben oder einer ganzen Einheit miteinander in Verbindung bringen. Auch die Ableitungen von R nach z können auf diese Weise wiederum durch R-Funktionen mit gleichen und benachbarten Zeigerwerten dargestellt werden. Es versteht sich, daß bei drei Parametern in der Funktion eine große Zahl derartiger Relationen aufgestellt werden können. Es liegt uns jedoch hier nur daran, den Weg zu weisen, auf dem solche Formeln gewonnen werden können. Im übrigen werden wir uns auf die Angabe nur einiger weniger solcher Formeln beschränken.

Den einfachsten Zugang zu diesen Beziehungen gewährt die Integraldarstellung 3 (1). Multipliziert man sie etwa mit $e^{+z/2}\cdot z^{(\mu-1)/2}$ und differenziert sie p-mal nach z, so läßt sich hinterher der Integrand, wenn auch mit anderen Werten von ν, μ und $\varkappa$, leicht wieder über die Gl. 3 (1) mit einer R-Funktion in Übereinstimmung bringen. Auf diese Weise gewinnt man ohne Schwierigkeit die Formel

$$(1)\qquad \frac{d^p}{dz^p}\left\{e^{+z/2}\cdot z^{-\frac{1\mp\mu}{2}}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\right\} = z^{-\frac{1+p\mp\mu}{2}}\cdot e^{+z/2}\cdot R^{\left(\frac{\nu-p}{2}\right)}_{\varkappa-\frac{p}{2},\,\frac{\mu\mp p}{2}}(z)$$

$$(p = 0, 1, 2\ldots),$$

wenn man die oberen Vorzeichen wählt. Der Übergang von $+\mu$ zu $-\mu$ führt dann in Rücksicht auf die Gl. 3 (6) ohne weitere Rechnung zu der Formel (1) bei Wahl des unteren Vorzeichens.

Um noch einen größeren Spielraum zu haben, kann man für diese Zwecke statt 3 (1) auch eine etwas veränderte Integraldarstellung benutzen, zu der man von 3 (1) aus durch die Einführung der neuen Integrationsvariablen $s = t + (1+\nu)/2$ gelangt. In dem neuen Integral

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\times \\ &\times\frac{e^{-z/2}}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+s\right)}{\Gamma(1+\varkappa-s)}z^s\,ds \end{aligned}\right.$$

muß dann der Integrationsweg so geführt werden, daß er die in den Punkten $s = (1\pm\mu)/2$ und $s = (1+\nu)/2$ beginnenden und nach rechts strebenden Polketten stets zur Rechten hat. Differenziert man nun die Gl. (2) nach z, schreibt

für das dadurch im Integranden hinzutretende s identisch $(s-\varkappa)+\varkappa$ und beachtet, daß $(-s+\varkappa)/\Gamma(1+\varkappa-s)=1/\Gamma\big(1+(\varkappa-1)-s\big)$ ist, so ergibt der Vergleich mit (2) die Beziehung

$$(3)\qquad z\cdot\frac{d}{dz}R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\Big(\varkappa-\frac{z}{2}\Big)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)-\Big(\varkappa-\frac{1+\nu}{2}\Big)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa-1,\,\mu/2}(z)\,.$$

Führt man die Differentiation in (1) und (2) für $p=1$ aus, so gelangt man zu der weiteren Formel

$$(4)\qquad z\cdot\frac{d}{dz}R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=-\frac{1}{2}\,(z\pm\mu-1)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)+z^{\frac{1}{2}}\cdot R^{(\nu-1)/2}_{\varkappa-\frac{1}{2},\,\frac{\mu\pm1}{2}}(z)\,.$$

Schließlich gehört auch noch die Formel

$$(5)\qquad R^{(\nu/2-1)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\Big(\frac{\nu-1}{2}-\varkappa\Big)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)+e^{-z/2}\,z^{\frac{\nu-1}{2}}\Big/\Big(\Gamma\Big(\frac{\nu-\mu}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{\nu+\mu}{2}\Big)\Big)$$

hierher, die für $p=1$ aus 3(7a) hervorgeht. Die Beziehung

$$(6)\qquad (\mu+1)\,R^{(\nu-1)/2}_{\varkappa-\frac{1}{2},\,\frac{\mu+1}{2}}(z)+z^{\frac{1}{2}}\cdot\Big\{\Big(\varkappa-\frac{1+\mu}{2}\Big)R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)-\Big(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\Big)R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}(z)\Big\}$$

läßt sich mit Hilfe von (2) sofort verifizieren, indem man mittels der Gl. (2) die in der geschweiften Klammer stehende Summe zweier R-Funktionen nachbildet. In Rücksicht auf die Gl. (1) für $p=1$ folgt dann aus (6) auch sofort die weitere Formel:

$$(7)\qquad (1\pm\mu)\cdot\frac{d}{dz}R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\Big[\frac{(1\pm\mu)^2}{2z}-\varkappa\Big]\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)-\Big(\varkappa+\frac{1\pm\mu}{2}\Big)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}\pm1}(z)\,.$$

8. *Die Lösung nach der Methode der Variation der Konstanten.* Sind $y_1(z)$ und $y_2(z)$ zwei linear unabhängige Lösungen der zu 1(1) gehörenden homogenen D.Gl., so läßt sich die Lösung $Y(z)$ der hier behandelten inhomogenen D.Gl. bekanntlich durch den Ausdruck

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Y(z)=&-\frac{C}{\Gamma\Big(\frac{\nu-\mu}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{\nu+\mu}{2}\Big)}\times\\ \times&\left\{y_1(z)\cdot\int_{z_0}^{z}e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\,\frac{y_2(t)\cdot dt}{\mathfrak{W}\,[y_1(t),\,y_2(t)]}+y_2(t)\cdot\int_{z_0}^{z}e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\cdot\frac{y_1(t)\cdot dt}{\mathfrak{W}\,[y_1(t),\,y_2(t)]}\right\}\end{aligned}\right.$$

darstellen, wenn darin $\mathfrak{W}\,[y_1(z),\,y_2(z)]$ die aus y_1 und y_2 gebildete WRONSKIsche Determinante bedeutet, die in der ersten Zeile die Funktionen y_1, y_2 selbst enthält und in der zweiten Zeile ihre Ableitungen nach t. Da nun die WHITTAKERsche D.Gl. die Normalform hat, so ist die WRONSKIsche Determinante im vorliegenden Falle von t unabhängig, und zwar hat sie im besonderen den Wert $1/\Gamma\Big(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\Big)$, wenn man $y_1(t)=W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)$ und $y_2(t)=M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)$ wählt. Bei dieser Bedeutung von y_1 und y_2 verschwindet überdies

das erste Integral in (1) in der Ordnung $z^{(\nu+\mu)/2}$ und das zweite wie $z^{(\nu\pm\mu)/2}$, die geschweifte Klammer selbst mithin in der Ordnung $z^{(1+\nu)/2}$. Unter der Voraussetzung $\Re(\nu\pm\mu)>0$ kann demnach in den beiden Integralen der Gl. (1) $z_0=0$ gesetzt werden, und die durch (1) wiedergegebene Lösung der inhomogenen D.Gl. 1(1) kann sich daher von der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ im Hinblick auf die Gl. 2.1(4) nur um eine Konstante unterscheiden, deren Wert durch den Grenzübergang $z\to 0$ in (1) leicht ermittelt werden kann. Es ergibt sich also genauer für $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ die Darstellung:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot\left\{M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\cdot\int_0^z e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\,W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot dt-\right.\\ &\qquad\left.-W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot\int_0^z e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\,M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\,dt\right\}\\ &\qquad\left(\Re\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)>0,\ \frac{\mu+1}{2}-\varkappa\neq 0,-1,-2\ldots\right).\end{aligned}\right.$$

Differenziert man diese Gleichung nach z und faßt in dem Gleichungspaar, das aus (2) und seiner Ableitung besteht, die beiden Integrale zwischen den Grenzen 0 und z als Unbekannte auf, so führt die stets mögliche Auflösung des Gleichungspaars nach diesen Unbekannten zu den beiden Gleichungen:

$$(3\,a)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^z e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\cdot W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot dt=\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\times\\ &\qquad\times\left[W_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\cdot\frac{dS^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)}{dz}-W'_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\right]\end{aligned}\right.$$

$$(3\,b)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^z e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\cdot M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot dt=\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\times\\ &\qquad\times\left[M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\cdot\frac{dS^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)}{dz}-M'_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\right]\\ &\qquad\left(\Re\left(\frac{\nu\pm\mu}{2}\right)>0,\ \frac{\mu+1}{2}-\varkappa\neq 0,1,2\ldots\right).\end{aligned}\right.$$

Die beiden links stehenden Integrale werden dadurch teils durch die Lösungen der homogenen, teils durch die der inhomogenen D.Gl. 1(1) dargestellt. Ersetzt man auf der rechten Seite dieses Gleichungspaars im Hinblick auf die zweite Form der Gl. 3(2) die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ durch $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$, so hat diese Maßnahme lediglich die Wirkung, daß in der eckigen Klammer von (3a) das Glied $-1/\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)$ und von (3b) das Glied $\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)/\pi\cdot\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)/\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)$ hinzutritt. Läßt man also in den Gl. (3a, b) die untere Grenze unbestimmt, so kann auf der rechten Seite jederzeit ohne weitere Änderung

der oben angegebene Ersatz von $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ durch $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ vorgenommen werden. Berücksichtigt man dann noch die Gl. (7), (9) und (10a) des vorigen Abschnitts, so entsteht damit aus (3a, b) das Formelpaar:

$$(4a)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\mu}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \displaystyle\int^{z} e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}} \cdot W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot dt \\ = \left(\dfrac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\cdot W_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\, R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}+1}(z) + \left(\dfrac{1+\mu}{2}-\varkappa\right) W_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}+1}(z)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \end{cases}$$

$$(4b)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\mu}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \displaystyle\int^{z} e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}} M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot dt \\ = \left(\dfrac{1+\mu}{2}+\varkappa\right) M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\, R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}+1}(z) + \left(\varkappa^2-\left(\dfrac{1+\mu}{2}\right)^2\right) M_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}+1}(z)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z). \end{cases}$$

Es drückt die beiden links stehenden unbestimmten Integrale durch eine Summe von Produkten aus den Lösungen der homogenen und der inhomogenen D.Gl. aus.

9. *Besondere Integraldarstellungen für die Funktionen* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ *und* $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Die hier als Lösung einer besonderen inhomogenen WHITTAKERschen D.Gl. eingeführte Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ tritt auch bei der Auswertung spezieller, aber doch recht allgemeiner Integrale vom Typus der Gleichung

$$(1)\quad \begin{cases} I(\gamma;\varkappa',\mu',\alpha;z) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t/2}\, t^{\gamma+\alpha-1}\cdot W_{\varkappa',\,\mu'/2}(t)\cdot \frac{dt}{(z+t)^{\alpha}} \\ \qquad\qquad \equiv \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t/2}\, t^{\gamma}\cdot W_{\varkappa',\,\mu'/2}(t)\cdot\left(1+\frac{z}{t}\right)^{-\alpha}\cdot\frac{dt}{t} \\ \left(|\arc(z)|<\pi, \qquad \Re\left(\gamma+\alpha+\frac{1\pm\mu'}{2}\right)>0\right) \end{cases}$$

auf, falls darin γ oder τ bestimmte, noch näher anzugebende Werte haben. Um zu erkennen, wie diese Werte zu wählen sind, verwandeln wir das vorgelegte Integral unter Zuhilfenahme der MELLIN-Transformation in ein Integral nach Art von 3 (1).

Nach der Theorie dieser Transformation[2]) besteht für einen geeignet zu wählenden Wert der Integrationsabszisse σ die Beziehung

$$(2)\qquad \int_0^{\infty} g(t)\, x\, f\left(\frac{z}{t}\right) x\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathfrak{F}(s)\cdot\mathfrak{G}(s)\cdot z^{-s}\cdot ds,$$

$$(2a)\qquad \mathfrak{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, x^{s-1}\cdot dx,$$

[2]) Siehe z. B. TITCHMARSH, E. C.: Theory of Fourier Integrals. Oxford 1937.

falls $\mathfrak{F}(s)$ und $\mathfrak{G}(s)$ die gemäß (2a) definierten MELLIN-Transformierten der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bedeuten. Wie ein Vergleich der linken Seite von (2) mit der rechten Seite von (1) erkennen läßt, sind demnach im vorliegenden Falle die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ durch die Gleichungen

$$(3\,a) \qquad f(x) = (1+x)^{-\alpha}, \qquad (3\,b) \qquad g(x) = e^{-x/2} \cdot x^{\gamma} \cdot W_{\varkappa', \mu'/2}(x)$$

gegeben. Nun ist aber bekanntlich

$$(4\,a) \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(1+x)^{\alpha}} \cdot dx \equiv \mathfrak{F}(s) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\alpha - s)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \left(\Re(\alpha) > \Re(s) > 0\right)$$

$$(4\,b) \qquad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x/2} x^{\gamma} W_{\varkappa', \mu'/2}(x) \cdot x^{s-1} \cdot dx \equiv \mathfrak{G}(s) \\ \quad = \dfrac{\Gamma\left(\gamma + s + \dfrac{1-\mu'}{2}\right) \Gamma\left(\gamma + s + \dfrac{1+\mu'}{2}\right)}{\Gamma(\gamma + s - \varkappa' + 1)} \qquad \left(\Re\left(\gamma + s + \dfrac{1 \pm \mu'}{2}\right) > 0\right) \end{cases}$$

und mithin hat man im Hinblick auf die Gl. (2) nach dem Übergang von s zu $-t$:

$$(5\,a) \qquad \begin{cases} \Gamma(\alpha) \cdot I(\gamma; \varkappa', \mu', \alpha; z) \\ \quad = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\tau - i\infty}^{-\tau + i\infty} \frac{\Gamma(-t)\,\Gamma(\alpha + t)\,\Gamma\left(\gamma + \dfrac{1-\mu'}{2} - t\right) \Gamma\left(\gamma + \dfrac{1+\mu'}{2} - t\right)}{\Gamma(\gamma - \varkappa' - t + 1)} \cdot z^{t} \cdot dt \\ \qquad \left(|\arc(z)| < \dfrac{3\pi}{2}, \quad 0 < \tau < \Re(\alpha), \quad \Re\left(\gamma + \dfrac{1+\mu'}{2}\right) > \tau\right). \end{cases}$$

Auf Grund der zu (5a) angegebenen Ungleichungen muß dabei der Integrationsweg die reelle t-Achse zwischen den Punkten $0 \ldots \Re(\alpha)$ und links von den beiden Punkten $\Re\left(\gamma + \dfrac{1 \pm \mu'}{2}\right)$ schneiden. Die Vorschrift über die Wegführung des Integrals in der Gl. (5a) und des daraus durch die Substitution $t = t' + \beta$ hervorgehenden Integrals

$$(5\,b) \qquad \begin{cases} \Gamma(\alpha) \cdot I(\gamma; \varkappa', \mu', \alpha; z) \\ \quad = \dfrac{z^{\beta}}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\tau' - i\infty}^{-\tau' + i\infty} \frac{\Gamma\left(\gamma - \beta + \dfrac{1-\mu'}{2} - t'\right) \Gamma\left(\gamma - \beta + \dfrac{1+\mu'}{2} - t'\right) \Gamma(-\beta - t')}{\Gamma(\gamma - \beta - \varkappa' - t' + 1)} \times \\ \qquad \times \Gamma(\alpha + \beta + t')\, z^{t'} \cdot dt' \end{cases}$$

läuft also auch hier darauf hinaus, daß die Integrationsbahn sämtliche Pole der drei nach rechts strebenden Polketten zur Rechten und sämtliche Pole der einen nach links strebenden Polkette zur Linken haben muß.

Vergleicht man nun das Integral (5b) mit dem Integral 7(2), so kann man zwischen beiden einmal dadurch eine Übereinstimmung erzielen, daß man setzt:

$$\frac{1+\nu}{2} = -\beta \qquad \frac{1-\nu}{2} = \alpha + \beta$$

$$\frac{1+\mu}{2} = \gamma - \beta + \frac{1+\mu'}{2} \qquad \frac{1-\mu}{2} = \gamma - \beta + \frac{1-\mu'}{2}.$$

Das erfordert die speziellen Werte: $\alpha = 1, \gamma = \beta = -\frac{1+\nu}{2}, \mu' = \mu$ und $\varkappa' = -\varkappa$. Die Aussagen der Gl. (5b), (1) und 7(2) führen damit in diesem Falle zu der Beziehung:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{-\frac{\nu+1}{2}}\, W_{-\varkappa,\mu/2}(t) \cdot \frac{dt}{t+z} \\ \displaystyle = \frac{\pi^2 \cdot e^{z/2}\, z^{-\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right) \sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu) \sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)} \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \qquad \left(\Re\left(\frac{\nu \mp \mu}{2}\right) < 1\right). \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich noch eine andere bemerkenswerte Integraldarstellung für die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ gewinnen. Setzt man nämlich unter dem Integralzeichen auf der linken Seite:

$$\frac{1}{t+z} = \int_0^\infty e^{-v(t+z)} \cdot dv \qquad (\Re(z) > 0)$$

vertauscht danach die Reihenfolge der beiden Integrationen, was hier wegen der absoluten Konvergenz der Integrale statthaft ist, und macht dann von der bekannten Formel

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, t^{\beta-1}\, W_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot dt \\ \displaystyle = \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\beta-\varkappa+1)} \cdot {}_2F_1\left(\beta+\frac{1-\mu}{2}, \beta+\frac{1+\mu}{2}; \beta-\varkappa+1; \frac{1}{2}-\alpha\right) \\ \qquad \left(\Re\left(\beta+\frac{1\pm\mu}{2}\right) > 0,\ \Re(\alpha) > -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Gebrauch, so ergibt sich ohne weiteres die Beziehung

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{z^{(1+\nu)/2}}{\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}+\varkappa\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-vz} \cdot {}_2F_1\left(1-\frac{\mu+\nu}{2}, 1-\frac{\nu-\mu}{2}; \frac{3-\nu}{2}+\varkappa; -v\right) \cdot dv \\ \qquad = e^{z/2} \dfrac{R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}. \end{cases}$$

Danach läßt sich die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ *als die* LAPLACE-*Transformierte der* GAUSSSchen *hypergeometrischen Funktion auffassen*, und zwar in dem allge-

meinen Falle, wo alle drei Parameter willkürlich wählbar sind. Für ein $\nu/2=\mu/2+\rho$ führt die Gl. (8) zu der früheren Gl. 3 (4a) zurück.

Eine zweite Möglichkeit, das Integral (5b) mit dem von Gl. 7 (2) in Übereinstimmung zu bringen, liegt bei gegebenen Werten von α oder γ, μ' und $\varkappa'$ in der folgenden Festsetzung vor:

$$-\beta=\frac{1+\mu}{2} \qquad \gamma-\beta+\frac{1-\mu'}{2}=\frac{1-\mu}{2}$$

$$\gamma-\beta+\frac{1+\mu'}{2}=\frac{1+\nu}{2} \qquad \alpha+\beta=\frac{1-\nu}{2} \qquad \gamma-\beta-\varkappa'=\varkappa.$$

Zwischen α und γ besteht demnach der Zusammenhang: $\alpha+\gamma=(1-\mu')/2$. Die weitere Durchrechnung liefert schließlich die Gleichung:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-t/2}\cdot t^{-\frac{1+\mu}{2}} W_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot\frac{dt}{(t+z)^\alpha}\\ &=\frac{\pi\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)\cdot\sin(\pi\mu)}\cdot z^{-\frac{\alpha+\mu}{2}}\cdot e^{z/2}R^{(\mu-\alpha+1)/2}_{\frac{1-\alpha}{2}-\varkappa,\ \frac{\mu+\alpha-1}{2}}(z) \qquad (\Re(\mu)<1). \end{aligned}\right.$$

Für ein $\alpha\to 1$ versagt die Formel (9), und das gleiche gilt von der Formel (6), wenn $\nu\to\mu$ geht. Dieses Versagen ist aber im Hinblick auf die Gl. 3 (4b) leicht zu beheben, indem man in (6) und (9) an Stelle der Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die modifizierte Funktion $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ einführt, so daß sich also als gemeinsamer Grenzfall von (6) und (9) die Relation

$$(10)\quad \int_0^\infty e^{-t/2}\,t^{-\frac{1+\mu}{2}} W_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot\frac{dt}{t+z}=\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)}\,e^{z/2}z^{-\frac{1+\mu}{2}}\cdot\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \qquad (\Re(\mu)<1)$$

ergibt.

Bei beliebigen Werten von $\gamma, \alpha, \varkappa'$ und μ' liefert das Integral (1) durch Auflösung nach dem Residuensatz eine Beziehung, in der drei ${}_2F_2$-Funktionen auftreten. Dieser allgemeine Fall soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden.

Die Integrale (6), (9) und (10) setzen die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in Beziehung zu $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Es steht daher zu erwarten, daß die entsprechenden Integrale mit der Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ auf die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ führen. Diese Vermutung findet sich in der Tat bestätigt. Um diese Frage zu klären, untersuchen wir das Integral

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} K(\gamma;\varkappa',\mu',\alpha;z)&=\int_0^\infty e^{-t/2}\,t^{\gamma+\alpha-1}M_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot\frac{dt}{(z+t)^\alpha}\\ &=\int_0^\infty e^{-t/2}\,t^{\gamma}M_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot\left(1+\frac{z}{t}\right)^{-\alpha}\cdot\frac{dt}{t}\\ &\left(\Re(\gamma-\varkappa')<0,\quad \Re\left(\gamma+\alpha+\frac{1+\mu'}{2}\right)>0\right) \end{aligned}\right.$$

unter den dazu angegebenen Konvergenzbedingungen. Da im vorliegenden Falle $\mathfrak{G}(s)$ durch

$$(12)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-x/2}\, x^{\gamma}\, M_{\varkappa',\mu'/2}(x)\cdot x^{s-1}\cdot dx \equiv \mathfrak{G}(s) \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(\varkappa'-\gamma-s)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\varkappa'\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}-\gamma-s\right)} \\ \left(\Re\left(\gamma+s+\frac{1+\mu'}{2}\right)>0,\quad \Re(\varkappa'-\gamma-s)>0\right) \end{cases}$$

gegeben ist, so hat das die Funktion K von (11) darstellende MELLIN-Integral jetzt die Gestalt:

$$(13)\quad \begin{cases} \Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\varkappa'\right)\cdot K\,(\gamma;\varkappa',\mu',\alpha;z) \\ = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\tau-i\infty}^{-\tau+i\infty} \Gamma(-t)\,\Gamma(\alpha+t)\cdot \frac{\Gamma(\varkappa'-\gamma+t)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma-t\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}-\gamma+t\right)}\cdot z^t\cdot dt \\ \left(0<\tau<\Re(\alpha),\ \Re\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma\right)<\tau<\Re(\varkappa'-\gamma)\right). \end{cases}$$

Der Integrationsweg verläuft hierin wiederum derart, daß er die nach rechts und die nach links strebenden Polketten voneinander trennt. Im übrigen konvergiert das Integral absolut für alle z eines endlichen Bereichs mit $|\arc(z)|<3\pi/2$.

Die Möglichkeiten, die für die Zurückführung der Funktion K auf die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ bestehen, übersieht man im vorliegenden Falle am einfachsten dadurch, daß man das rechtsstehende Integral nach dem Residuensatz in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickelt. Das führt nach einfachen Rechnungen auf die Entwicklung:

$$(14)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{\gamma+\alpha-1}\, M_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot \dfrac{dt}{(z+t)^{\alpha}} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma\right)\Gamma(\varkappa'-\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\varkappa'\right)}\times \\ \quad \times {}_2F_2\left(\alpha,\varkappa'-\gamma;\ \frac{1+\mu'}{2}-\gamma,\frac{1-\mu'}{2}-\gamma;\ z\right)+ \\ \quad + \dfrac{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\frac{1+\mu'}{2}\right)\Gamma\left(-\gamma-\frac{1+\mu'}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\mu')}\cdot z^{\gamma+\frac{1+\mu'}{2}}\times \\ \quad \times {}_2F_2\left(\alpha+\gamma+\frac{1+\mu'}{2},\varkappa'+\frac{1+\mu'}{2};\ 1+\mu',\frac{3+\mu'}{2}+\gamma;\ z\right) \\ \left(\Re(\gamma-\varkappa)<0,\ \Re\left(\gamma+\alpha+\frac{1+\mu'}{2}\right)>0\right). \end{cases}$$

Die erste der beiden rechts stehenden ${}_2F_2$-Funktionen geht nun in der Tat in die Gl. 2.1 (4) über, wenn man darin $\alpha=1$, $\gamma=-(\nu+1)/2$, $\mu=\mu'$ und

$\varkappa' = -\varkappa$ macht. Die zweite ${}_2F_2$-Funktion geht für dieselben Werte in eine ${}_1F_1$-Funktion über und läßt sich daher durch die Funktion $M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ wiedergeben. Im ganzen erhält man daher:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{-\frac{1+\nu}{2}}\, M_{-\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot\frac{1}{z+t}\cdot dt = -\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)e^{z/2}\times\\ &\qquad\times z^{-\frac{1+\mu}{2}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) - M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\right\}\\ &\qquad\left(\Re\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)>-1,\ \Re(\varkappa)<\Re\left(\frac{\nu+1}{2}\right),\ |\arc(z)|<\pi\right). \end{aligned}\right.$$

Man kann die Gültigkeit von (15) erweitern, indem man statt des Linienintegrals ein Schleifenintegral verwendet. Die Gl. (15) geht dann in die Gleichung

$$(15\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty(-\pi)}^{(0+)} e^{t/2}\, t^{-\frac{1+\nu}{2}}\cdot\frac{M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)}{z-t}\cdot dt\\ &\qquad = e^{+z/2}\cdot z^{-(1+\nu)/2}\left\{M_{\varkappa,\,\mu/2}(z) - \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)}\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\right\}\\ &\qquad\left(\Re(\varkappa)<\Re\left(\frac{\nu+1}{2}\right);\ |\arc(z)|<\pi\right) \end{aligned}\right.$$

über. Läßt man den Integrationsweg von (15a) außer dem Punkt $t=0$ auch noch die Stelle $t=z$ umschlingen, so wird man schließlich für die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ selbst zu der Darstellung

$$(15\,b)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty(-\pi)}^{(0+,\,z+)} e^{t/2}\cdot t^{-\frac{\nu+1}{2}}\cdot\frac{M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)}{t-z}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)}e^{z/2}z^{-\frac{1+\nu}{2}}\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)\\ &\qquad\left(\Re(\varkappa)<\Re\left(\frac{\nu+i}{2}\right),\qquad |\arc(z)|<\pi\right) \end{aligned}\right.$$

geführt.

Das Gegenstück zu Gl. (9) gibt die Gleichung

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{-\frac{1+\mu}{2}}\, M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot\frac{dt}{(t+z)^\alpha} = \Gamma(1-\alpha)\,e^{z/2}z^{-\frac{\alpha+\mu}{2}}\times\\ &\qquad\times\left\{\frac{\Gamma\left(\varkappa+\alpha-\frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}M_{\frac{1-\alpha}{2}-\varkappa,\,\frac{\alpha+\mu-1}{2}}(z) - S^{\left(\frac{1+\mu-\alpha}{2}\right)}_{\frac{1-\alpha}{2}+\varkappa,\,\frac{\alpha+\mu-1}{2}}(z)\right\}\\ &\qquad\left(\Re\left(\varkappa+\alpha-\frac{1-\mu}{2}\right)>0,\qquad |\arc(z)|<\pi\right). \end{aligned}\right.$$

an. Setzt man schließlich noch in (14) $\gamma = \varkappa' - 1$, so erhält man die Formel:

$$(17)\quad \left\{ \int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{\varkappa+\alpha-2} \cdot M_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot \frac{dt}{(z+t)^\alpha} = \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right) \cdot e^{z/2} \cdot z^{\varkappa-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\alpha + \varkappa - \frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} M_{1-\varkappa-\alpha,\mu/2}(z) - S^{(\frac{1}{2}-\varkappa)}_{1-\varkappa-\alpha,\mu/2}(z) \right\} \right.$$

Die entsprechende Beziehung mit der Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ im Integranden, die durch die Formel

$$(18)\quad \left\{ \int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{\varkappa+\alpha-2}\, W_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot \frac{dt}{(z+t)^\alpha} \right.$$
$$= \frac{\Gamma\left(\alpha + \varkappa - \frac{1-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \varkappa - \frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \cdot W_{1-\varkappa-\alpha,\mu/2}(z)$$
$$\left. \left(\Re(\varkappa+\alpha) > \Re\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\right) \right.$$

wiedergegeben wird, kann man aus (17) gewinnen, indem man sie mit $-\pi/\sin(\pi\mu) \cdot 1/\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right)$ multipliziert und dazu die mit dem Faktor $\pi/\sin(\pi\mu) \cdot 1/\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)$ versehene Gl. (17) nach Übergang von $+\mu$ zu $-\mu$ hinzufügt. Diese Operation definiert nämlich die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ durch die beiden Funktionen $M_{\varkappa,\pm\mu/2}(z)$. Dasselbe gilt nach Erweiterung mit einem jeweils geeigneten Faktor auf der rechten Seite von den Funktionen $M_{1-\varkappa-\alpha,\mu/2}(z)$.

10. *Der Zusammenhang mit der* LOMMELschen *Funktion.* Die beiden von LOMMEL eingeführten Funktionen

$$(1)\quad s_{\nu-1,\mu}(z) = \frac{z^\nu}{(\nu-\mu)(\nu+\mu)} \cdot {}_1F_2\left(1;\ \frac{\nu-\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu}{2}+1;\ z\right)$$

$$(2)\quad \left\{ S_{\nu-1',\mu}(z) = s_{\nu-1,\mu}(z) + 2^{\nu-2}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Big/\sin\pi\mu \times \right.$$
$$\left. \times \left\{ \sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu) \cdot J_{-\mu}(z) - \sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\, J_\mu(z) \right\} \right.$$

sind bekanntlich[3]) Lösungen der inhomogenen BESSELschen D.Gl.

$$(3)\quad z^2 \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + z \cdot \frac{dy}{dz} + (z^2 - \mu^2)\, y = z^\nu,$$

die ein Sonderfall der WHITTAKERschen D.Gl. 1 (1) ist. Andererseits ist bekannt, daß beispielsweise die Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ als die Nullpunktslösung

[3]) Siehe WATSON, G. N.: Theory of BESSEL-Functions. Cambridge 1922.

dieser D.Gl. aus der Nullpunktslösung $J_\mu(z)$ der BESSELschen D.Gl. durch die Integraloperation (4) erzeugt werden kann. Dabei kommt in (4) der Integrationsweg aus dem zwischen den Winkelhalbierenden des zweiten und

$$(4)\quad \begin{cases} M_{\varkappa,\mu/2}(z) = 1/\pi \cdot \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\cdot z^{1/2}\cdot e^{-z/2+\pi i\varkappa} \times \\ \qquad \times \int\limits_{\infty(\pi+\Delta)}^{\infty(\Delta)} e^{-t^2} t^{-2\varkappa} J_\mu(-2it\sqrt{z})\cdot dt \qquad \left(|\Delta|<\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

dritten Quadranten gelegenen Winkelbereich und läuft oberhalb des Nullpunktes der t-Ebene in dem Bereich zwischen den Winkelhalbierenden des ersten und vierten Quadranten ins Unendliche. Diese Tatsache legt es nahe, die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in ähnlicher Weise aus der LOMMELschen Funktion $S_{\nu-1,\mu}$ zu erzeugen. Das trifft nun in der Tat zu, und zwar ist ganz entsprechend

$$(5)\quad \begin{cases} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \frac{2^{2-\nu}}{\pi}\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} z^{1/2} e^{-z/2+\pi i\varkappa} \times \\ \qquad \times \int\limits_{\infty(\pi+\Delta)}^{\infty(\Delta)} e^{-t^2} t^{-2\varkappa} S_{\nu-1,\mu}(-2it\sqrt{z})\cdot dt \qquad \left(|\Delta|<\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Steht unter dem Integralzeichen die Funktion $s_{\nu-1,\mu}$ von Gl. (1), so gilt die Beziehung (5) in derselben Form mit dem einzigen Unterschied, daß links das Symbol $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ auftritt. Die Richtigkeit von (5) läßt sich leicht nachweisen, indem man die obige Gl. (4) und die Relation

$$(6)\quad \int\limits_{\infty(\Delta+\pi)}^{\infty(\Delta)} e^{-t^2}\cdot t^{2\varrho}\cdot dt = \pi\cdot e^{+\pi i\varrho}/\Gamma(\tfrac{1}{2}-\varrho) \qquad (|\Delta|<\pi/4)$$

berücksichtigt. Man wird dann unmittelbar zu der ersten Form von Gl. 3 (2) geführt.

Dieser Zusammenhang läßt sich in bequemer Weise[4]) dazu benutzen, die große Zahl von Beziehungen, die für die LOMMELsche Funktion bereits bekannt sind, in entsprechende Beziehungen für die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ zu übersetzen. So folgt z.B. aus der NEUMANNschen Reihe für die Funktion $s_{\nu-1,\mu}(z)$, die man bei N. NIELSEN[5]) findet, durch Anwendung der Integraloperation sofort

[4]) Hiervon hat besonders ausgiebig A. ERDELYI in seinen Arbeiten über die WHITTAKER-Funktionen Gebrauch gemacht.

[5]) NIELSEN, N.: Handbuch der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

die Entwicklung

$$(7)\quad \left\{ S^{\nu/2}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)\,\Gamma(\nu+\lambda)}{\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\lambda\right)\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda\right)\cdot\lambda!}\, M_{\varkappa,\,(\nu/2)+\lambda}(z)\,, \right.$$

die die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ durch eine unendliche Reihe von $M_{\varkappa,\,\nu/2}(z)$-Funktionen darstellt, deren zweiter Parameter von Glied zu Glied um die Einheit wächst. Da für ein $\lambda \to \infty$

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_{\varkappa,\,(\nu/2)+\lambda}(z) \to z^{(1+\nu)/2+\lambda}/\Gamma(1+\nu+2\lambda)$$

strebt, so konvergiert die Reihe (7) absolut für alle endlichen Werte von z und in jedem Winkelbereich von z.

Darmstadt, Bruststr. 49.

(Eingegangen am 15. Juli 1952.)

RUND, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 193—210 (1953)

The Theory of Subspaces of a Finsler Space.

Part II[1].

By

HANNO RUND.

In Part I we consider an m-dimensional subspace F_m of a Finsler space F_n represented parametrically by the set of equations (2.4): $x^i = x^i(u^\alpha)$[2]. The relations between the Minkowskian tangent spaces T_m and T'_m are discussed[3] and are found to be exactly analogous to those between T_n and T'_n. The covariant derivative $\overline{D}U^\alpha/Ds$ with respect to the metric $\bar{g}_{\alpha\beta}$ of F_m of a vector-field X^i (or U^α) of F_m is defined analogously to the covariant derivative DX^i/Ds with respect to the metric g_{ij} of F_n[4], thus retaining the property that the geodesics of F_m are the autoparallel curves of F_m (i.e. their tangent vectors u'^α satisfy $\overline{D}u'^\alpha/Ds = 0$[4]). We derived the general relation

$$g_{ij}(x, x')\,\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{DX^i}{Ds} = \bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\,\frac{\overline{D}U^\beta}{Ds}\,, \tag{3.16}$$

where the x'^i (or u'^α) are the components of the tangent vector of the curve of F_m along which the process of covariant differentiation is taking place. When x' is an arbitrary direction in F_m at the point A of F_m, we say that the vector $n^{*i}(x, x')$ is normal to F_m with respect to the direction x' if it satisfies the m relations

$$g_{ij}(x, x')\,\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot n^*\ (x, x') = 0. \tag{4.1}$$

On the other hand, the unit vectors n^i satisfying

$$g_{ij}(x, n)\,\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot n^j = 0 \tag{4.2}$$

are simply called unit normal vectors of F_m. In the case of a hypersurface, when we consider the totality tangential directions of F_{n-1} at A, equation (4.1) provides us with a cone of directions, which we call the *normal cone*, while (4.2) defines a single uniquely defined normal vector. It will be seen in the present paper that the latter shares with the normal cone those properties usually attributed to the normal vector of a surface. This indicates one of many interesting deviations from euclidean differential geometry, as

[1] This paper is a direct continuation of Part I, which appeared in this journal, vol. 56 (1952) 363—375; but with the aid of the introductory note it can be read independently.

[2] Latin indices run from 1 to n, Greek indices from 1 to m. The usual summation convention is employed.

[3] Cf. [1], § 1. Numbers in square brackets refer to the bibliography at the end.

[4] Cf. [1], § 5 and § 5 of the present paper.

in the latter case our normal vector and normal cone reduce to the single usual normal vector. In particular, *this enables us to distinguish precisely those properties of the normal vector to a surface in euclidean differential geometry which are specific consequences of the euclidean structure of the metric.*

If we denote the components of $\bar{D}U^\beta/Ds$ with respect to F_n by

$$\frac{\delta X^i}{\delta s} = \frac{\bar{D}U^\beta}{Ds} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}, \tag{4.5}$$

it is shown that (3.16) may be written in the form

$$\frac{DX^i}{Ds} = \sum_{p=m+1}^{n} \lambda_{(p)}(x, x', X) \cdot n^{*i}_{(p)}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}, \tag{4.7}$$

where the $n^{*i}_{(p)}$ are $(n-m)$ independent vectors satisfying (4.1) and the $\lambda_{(p)}(x, x', X)$ are $(n-m)$ scalar factors which we shall evaluate explicitly in this paper (§ 8).

§ 5. Relative Curvature of Curves.

Although we have already discussed briefly the curvature of curves in a previous paper ([1], § 6) we shall treat this problem for the sake of future applications from a broader point of view, namely by the introduction of the notion of relative curvature of two curves[5]). Let us consider two continous differentiable curves C, C^*:

$$C\colon\ x^i = x^i(s); \qquad C^*\colon\ x^{*i} = x^{*i}(s) \tag{5.1}$$

of our Finsler space such that C is tangent to C^* at a point 0 with coordinates $x^i_{(0)}$. Thus $x^i_{(0)} = x^{*i}_{(0)}$, $x'^i_{(0)} = x'^{*i}_{(0)}$, the dash denoting differentiation with respect to the arclength s. The vector $x'^i(s)$ is regarded as the tangent vector to C, and since by definition it is a unit vector

$$\frac{D}{Ds}[g_{ij}(x, x')\, x'^i\, x'^j] = 0, \tag{5.2}$$

where the symbol D denotes covariant differentiation along the curve. From the elementary properties of this operator (cf. [1], §§ 4–5) we deduce

$$g_{ij}(x, x')\, x'^i \frac{Dx'^j}{Ds} = 0, \tag{5.3}$$

so that the vector Dx'^i/Ds is orthogonal with respect to the tangent vector of C. We thus regard this vector as the *normal vector* to C. According to the definition of the covariant derivative (cf. [1], § 5)

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = \frac{dx'^i}{ds} + P^i_{hk}(x, x') \cdot x'^h \cdot x'^k, \tag{5.4}$$

where

$$P^i_{hk}(x, x') \equiv \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} - \frac{1}{2} g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{km}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^j. \tag{5.5}$$

[5]) This notion is discussed for the case of a Riemannian space by LIPKA [2].

In this particular case the last term in the last factor of (5.4) would vanish identically since the $g_{ij}(x, x')$ are homogeneous of degree zero with respect to the x'. Of course similar formulae will hold for C^*. Now the angle $D\Theta(C, C^*)$ [measured on the indicatrix in $T_n(0)$[6]] between successive tangents of C and C^* at points both distant Ds from 0 is defined to be the angle between the vectors $x'^i_{(0)} + Dx'^i$, $x^{*'i}_{(0)} + Dx^{*'i}$. From (5.3) it follows that the latter are still unit vectors, so that their end-points B, C lie on the indicatrix in $T_n(0)$. If the end-point of the unit vector $x'^i_{(0)}$ is A, ABC will represent a small "triangular" section on the indicatrix; $D\Theta(C, C^*)$ will then by definition be the arc-length of BC, i.e. the length of the infinitesimal vector $|Dx'^i - Dx^{*'i}|$. We now define the *relative curvature* of C und C^* by

$$K(C, C^*) = \frac{D\Theta(C, C^*)}{Ds}, \tag{5.6}$$

so that

$$K^2(C, C^*) = g_{ij}\left(x_{(0)}, \frac{Dx'}{Ds} - \frac{Dx^{*'}}{Ds}\right)\left(\frac{Dx'^i}{Ds} - \frac{Dx^{*'i}}{Ds}\right)\left(\frac{Dx'^j}{Ds} - \frac{Dx^{*'j}}{Ds}\right). \tag{5.7}$$

We note that this notion is completely symmetrical in C and C^*. From (5.3) and the corresponding equation for C^* it follows that the vector $Dx'^i/Ds - Dx^{*'i}/Ds$ is orthogonal with respect to the common tangent vector of C and C^* at the point 0; we thus call it the *relative normal vector*. Hence the geometrical definition (5.6) also implies that *the relative curvature is equal to the length of the relative normal vector.*

However, our definition admits a further geometrical interpretation, which will be of fundamental importance to our later developments. Let P, H be two points of C, C^* respectively, both distant δs (measured along C, C^*) from 0. If x^i, x^{*i} are the coordinates of P and H respectively, we have since C is tangent to C^* at 0,

$$\left\{\begin{aligned} z^i \equiv x^i - x^{*i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dx'^i_{(0)}}{ds} - \frac{dx^{*'i}_{(0)}}{ds}\right)\delta s^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{Dx'^i}{Ds} - P^i_{hk}(x_{(0)}, x'_{(0)}) \cdot x'^h_{(0)} \cdot x'^k_{(0)} - \frac{dx^{*'i}_{(0)}}{ds}\right)\delta s^2 + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

by (5.4), and therefore we deduce from the corresponding equations for C^*

$$z^i \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{Dx'^i}{Ds} - \frac{Dx^{*'i}}{Ds}\right)\delta s^2 + \cdots. \tag{5.9}$$

When we disregard terms of the order δs^3 it follows that the z^i may be regarded as the components of a vector in $T_n(0)$ which represents the infinitesimal displacement HP. The direction of this vector coincides with that of the relative normal, *so that in the limit HP is orthogonal with respect to both C and C^*.* Hence $K(C, C^*)$ may be interpreted geometrically with the aid of

[6]) We use our definition of angle as given in [3], § 2. It is measured on the indicatrix in a manner exactly analogous to the measure of angle on the unit circle in euclidean geometry.

the length of $|HP|$; for, by (5.7) and (5.9) we have

$$K(C, C^*) = \lim_{\delta s \to 0} \frac{2|HP|}{\delta s^2}. \tag{5.10}$$

For the particular case that C^* is replaced by a geodesic Γ, the covariant derivative $Dx^{*\prime i}/Ds$ would be zero[7]), and equations (5.6) — (5.10) reduce to precisely those equations which we had deduced earlier for our ordinary curvature $\varrho^{-1}(C) \equiv K(C, \Gamma)$ of a curve in Finsler space (cf. [1], § 6). It is interesting to note that these same concepts can be introduced without reference to geodesics. We shall call $K(C, \Gamma) \equiv K(C)$ simply the curvature of C. Geodesics are curves of zero curvature.

In a Minkowskian space the normal vector to C at 0 is simply $x''^i_{(0)}$ (cf. [3], § 3) and the relative Minkowskian curvature $K_M(C, C^*)$ may be defined as above with analogous properties. Regarding, for the moment, C and Γ as curves in the Minkowskian tangent space $T_n(0)$ we would have from the equation corresponding to (5.7)

$$K_M^2(C, \Gamma) = g_{ij}(x_{(0)}, x''_{(0)} - x^{*\prime\prime}_{(0)}) \cdot (x''^i_{(0)} - x^{*\prime\prime i}_{(0)}) \cdot (x''^j_{(0)} - x^{*\prime\prime j}_{(0)}). \tag{5.11}$$

Comparing (5.8) and (5.9) we see that this reduces to

$$K_M^2(C, \Gamma) = g_{ij}\left(x_{(0)}, \frac{Dx'}{Ds}\right) \cdot \frac{Dx'^i}{Ds} \cdot \frac{Dx'^j}{Ds} = K^2(C) \tag{5.12}$$

in virtue of (5.7) and the fact that Γ is a geodesic. Thus we have the following result: *The curvature $K(C)$ of a curve C of F_n at 0 is equal to the relative Minkowskian curvature of C and Γ* (where Γ is the geodesic of F_n touching C at 0) *when regarded as curves in $T_n(0)$.*

Note. BUSEMANN defined a geodesic curvature $\varkappa_g$ of curves in two-dimensional Finsler spaces ([4], p. 285) and a Minkowskian curvature $\varkappa_M$ of curves in Minkowskian spaces ([5], (41)). Although his definitions are different to those given in the present paper, it is illuminating to contrast our last result with a corresponding property of $\varkappa_g$ and $\varkappa_M$, namely: "$\varkappa_g(C)$ of a curve C at a point P equals the difference of $\varkappa_M(C)$ of C as a curve in the local Minkowskian geometry at P [i.e. in $T_n(P)$] and the curvature $\varkappa_M(\Gamma)$ of the geodesic Γ tangent to C at P also as a curve in $T_n(P)$" ([4], p. 286).

For the case $n = 2$, the vectors $x''_{(0)}$, $x^{*\prime\prime}_{(0)}$ coincide, and it is consequently easy to verify with the aid of (5.11) that our definition of curvature will enjoy the same property.

§ 6. Curves on Hypersurfaces.

In order to arrive in a natural and purely geometrical manner at the fundamental notions (such as the second fundamental form and principal directions of curvature) on which the theory of subspaces is based we shall restrict the discussion of this and the following sections to the case of hyper-

[7]) This is the condition for the property of autoparallelism which is satisfied by geodesics. Cf. [1], § 5.

surfaces, about which we make the usual differentiability assumptions. The gain in geometrical clarity resulting from this procedure amply offsets the loss of generality, especially as we shall derive the corresponding formal expressions for other subspaces in a later section.

At each point $P(x^k)$ of our hypersurface F_{n-1} there exists a uniquely defined unit normal vector $n^i(x^k)$. By (4.2) the covariant components n_i of this vector satisfy the relation

$$n_i\,dx^i = 0 \tag{6.1}$$

for all displacements dx^i on F_{n-1}. Let $Q(x^i+dx^i)$ be a point of F_{n-1}; the normal vector at Q will be given by

$$n_i + dn_i = n_i + \frac{\partial n_i}{\partial x^k}\,dx^k. \tag{6.2}$$

We can construct also a vector $n_i+d^*n_i$ at Q by displacing n_i parallel to itself from P to Q. Naturally the deviation of the latter vector and (6.2) from each other give us some measure of "curvature" of F_{n-1} when we proceed from P to Q along some curve C

$$x^i = x^i(s) \tag{6.3}$$

on the hypersurface. By considering the totality of such infinitesimal displacements PQ from P on F_{n-1} we can make some preliminary analysis of the curvature of F_{n-1} in the neighbourhood of P. Let x'^i, $x'^i+dx'^i$ be the unit tangent vectors to C at P, Q respectively. By (6.1) the latter will be orthogonal with respect to the vector (6.2), so that for our purposes it is natural to evaluate the quantity

$$d\varphi(Q) \equiv \cos(n+d^*n,\, x'+dx') \equiv \frac{(n_i+d^*n_i)\,(x'^i+dx'^i)}{|n+d^*n|\cdot|x'+dx'|}. \tag{6.4}$$

Denoting by $n^i+d^*n^i$ the vector of $T_n(Q)$ corresponding to $n_i+d^*n_i$ of $T'_n(Q)$ (which in Finsler spaces does not necessarily imply that d^*n^i is the contravariant component of d^*n_i) we have

$$\begin{aligned} n^i + d^*n^i &= g^{ik}(x+dx,\, n+d^*n)\cdot(n_k+d^*n_k) \\ &= g^{ik}(x,n)\cdot n_k + \frac{\partial g^{ik}(x,n)}{\partial x^j}\,n_k\cdot dx^j + \frac{\partial g^{ik}(x,n)}{\partial n_j}\,n_k\,d^*n_j + g^{ik}(x,n)\cdot d^*n_k \end{aligned}$$

when we neglect quantities of the second order. The third term on the right-hand side vanishes identically due to the homogeneity properties of the g^{ik}, so that

$$d^*n^i = \frac{\partial g^{ik}(x,n)}{\partial x^j}\,n_k\,dx^j + g^{ik}(x,n)\cdot d^*n_k. \tag{6.5}$$

But since n_i is a unit vector along C

$$\frac{\partial g^{ik}(x,n)}{\partial x^j}\,n_i\,n_k\,dx^j + \frac{\partial g^{ik}(x,n)}{\partial n_h}\,n_i\,n_k\cdot dn_h + 2g^{ik}(x,n)\cdot n_i\,dn_k = 0,$$

where dn_k is given by (6.2). Again the middle term vanishes in virtue of the homogeneity of g^{ik}. Hence it follows from (6.5) that

$$n_i d^* n^i = -2n^i dn_i + n^i d^* n_i, \tag{6.6}$$

neglecting quantities of the second order. Thus, to the same degree of approximation we have

$$|n + d^* n| = [(n_i + d^* n_i)(n^i + d^* n^i)]^{\frac{1}{2}} = [1 + 2n^i (d^* n_i - dn_i)]^{\frac{1}{2}},$$

or

$$|n + d^* n|^{-1} = 1 - n^i (d^* n_i - dn_i). \tag{6.7}$$

Also, differentiating (6.1) we have

$$dn_i \cdot x'^i + n_i dx'^i = 0,$$

so that the numerator in (6.4) is simply

$$(d^* n_i - dn_i) x'^i,$$

when we take into account (6.1) once more. Remembering that $x'^i + dx'^i$ is a unit vector, it follows from (6.4) and (6.7) that we finally have

$$d\varphi(Q) = (d^* n_i - dn_i) x'^i \tag{6.8}$$

where we still neglect quantities of the second order.

But, since $n_i + d^* n_i$ is obtained from n_i by parallel displacement, it follows that $d^* n_i$ is given (cf. [1], p. 123) by

$$d^* n_i - P^k_{ik}(x, x') \cdot n_k dx^k = 0. \tag{6.9}$$

If we now denote by D the symbol of covariant differentiation along C, we have

$$Dn_i = dn_i - P^k_{ik}(x, x') n_k dx^k. \tag{6.10}$$

Using (6.9) and (6.10) equation (6.8) becomes

$$\frac{d\varphi}{ds} = -x'^i \left(\frac{Dn_i}{Ds}\right). \tag{6.11}$$

If we differentiate (6.1) covariantly along C, we find

$$\frac{Dx'^i}{Ds} n_i = -x'^i \frac{Dn_i}{Ds}. \tag{6.12}$$

Also, if we denote by ϱ_C^{-1} the curvature of C (regarded as a curve of the enveloping space F_n) we have, using (5.7)

$$\cos\left(n, \frac{Dx'}{Ds}\right) = \left(n_i \frac{Dx'^i}{Ds}\right) \varrho_C \tag{6.13}$$

since n^i is a unit vector. Combining (6.11), (6.12) and (6.13) we obtain

$$\frac{d\varphi}{ds} = n_i \frac{Dx'^i}{Ds} = \frac{\cos\left(n, \frac{Dx'}{Ds}\right)}{\varrho_C} \tag{6.14}$$

Here it is of importance to notice that by definition $d\varphi$ depends solely on the points P, Q of our hypersurface, so that the quantities (6.14) are the same for any curve C of F_{n-1} passing through P and Q (i.e. having the same tangent x' at P). Putting $d\varphi/ds \equiv R^{-1}(x, x')$ we may write (6.14) in the form

$$\frac{\cos\left(n, \frac{Dx'}{Ds}\right)}{\varrho_C} = \frac{1}{R(x, x')}. \tag{6.15}$$

Obviously $R^{-1}(x, x')$ is the curvature of that curve of F_{n-1} (with tangent vector x') whose normal vector Dx'/Ds coincides with the normal to F_{n-1}. It is natural, therefore, to define the *normal curvature* of F_{n-1} at P for the direction x' by $R^{-1}(x, x')$. Then, since (6.15) is true for all curves of F_{n-1} touching at P, we see that this equation represents the *generalisation of Meusnier's Theorem.*

§ 7. The second fundamental form.

Having defined the normal curvature at a point P of F_{n-1} for any direction the problem of immediate interest is to discover those directions at P for which $R(x, x')$ (or $d\varphi/ds$) assumes extreme values. For this purpose we shall introduce the second fundamental form as follows: We may write (6.11) in the form

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{Dn_i}{Dx^j} x'^j x'^i. \tag{7.1}$$

In order to obtain coefficients of the latter quadratic form which are symmetrical in the indices i and j we put

$$\begin{cases} \Omega_{ij}(x, x') = -\frac{1}{2}\left(\frac{Dn_i}{Dx^j} + \frac{Dn_j}{Dx^i}\right) - \frac{1}{4} g^{mp}(x, x') x'^h n_p \times \\ \qquad \times \left[\frac{\partial g_{mj}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ h\ i \end{matrix} \right\}_{(x, x')} + \frac{\partial g_{mi}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ h\ j \end{matrix} \right\}_{(x, x')}\right] \end{cases} \tag{7.2}$$

so that Ω_{ij} is a symmetrical covariant tensor of rank two[8]). From (6.14) and (6.12) we then deduce

$$\frac{1}{R(x, x')} = \frac{\Omega_{ij}(x, x')\, dx^i\, dx^j}{g_{ij}(x, x')\, dx^i\, dx^j}, \tag{7.3}$$

where the dx^i represent a displacement on F_{n-1} in accordance with the corresponding classical result. The numerator on the right-hand side of (7.3) is then the second fundamental form. Our problem thus reduces at first sight to that of finding extreme values of the denominator of the right-hand side of (7.3) subject to the condition that the numerator remains constant. Since, however, Ω_{ij} is a function of direction this procedure leads to somewhat complicated analytical results of little geometrical interest. On the other

[8]) Note that either the first or the second expression inside the square bracket vanishes when (7.2) is multiplied by x'^j or x'^i respectively. The tensor character of Ω_{ij} is established by means of a difficult calculation; compare however footnote 10.

hand, we could follow a method due to BERWALD[9]) in his treatment of a similar problem (for the case $n=3$), a practice which has been followed by later authors. This consists of selecting an arbitrary fixed direction $x'^i_{(0)}$ tangential to F_{n-1} at P, and evaluating the extreme values of $g_{ij}(x, x'_{(0)})\,dx^i dx^j$ subject to the condition $\Omega_{ij}(x, x'_{(0)})\,dx^i dx^j = \text{constant}$, where the dx^i represent a displacement tangential to F_{n-1}. Geometrically this means forming the "osculating Dupin indicatrix", i.e. that $(n-2)$-dimensional quadric surface touching the surface $\Omega_{ij}(x, x')\,dx^i dx^j = \text{constant}$ in $T_n(P)$ at the point where the vector $x'_{(0)}$ cuts the latter surface. Since we have then only to deal with a quadric surface it is obvious that we obtain $(n-1)$ mutually orthogonal directions [orthogonality being defined with respect to $g_{ij}(x, x'_{(0)})$] which determine the required extreme values of $R(x, x')$. Clearly then such a specialisation implies simply a return to the classical state of affairs. When the totality of directions $x'_{(0)}$ is considered, each one of these determines $(n-1)$ "principal" directions with respect to each $x'_{(0)}$, and conversely we might expect any direction on the surface to be a principal direction with respect to one or more directions tangent to F_{n-1}. From a purely geometrical point of view one should expect a principal direction to represent something much more ***unique*** compared to other directions, and certainly one would require it to be independent of the original arbitrary choice of some direction such as $x'_{(0)}$. We shall therefore approach this problem from an entirely different angle by refining the notion of normal curvature.

In Part I, equation (4.7), we saw that if X^i is the tangent vector x'^i to a curve C of F_{n-1} we have

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = \lambda(x, x')\, n^{*i}(x, x') + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\bar{D}u'^\alpha}{Ds}, \tag{7.4}$$

where u'^α is given by

$$x'^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} u'^\alpha. \tag{7.5}$$

In particular, if C is a *geodesic of* F_{n-1} (i.e. $\bar{D}u'^\alpha/Ds = 0$), it follows from (7.4) that $\lambda(x, x')$, being the length of the normal vector with respect to F_n of C represents the curvature $K(C)$ or $\varrho_c^{-1}(x, x')$ of C regarded as a curve in F_n. But by Meusnier's Theorem (6.15) we see that

$$\varrho_c(x, x') = R(x, x') \cos\left(n, n^*(x, x')\right), \tag{7.6}$$

since, by (7.4) the normal vector of C coincides with the normal vector $n^{*i}(x, x')$ of F_{n-1} with respect to the direction x'^i. Consequently we put

$$R^*(x, x') = R(x, x') \cos\left(n, n^*(x, x')\right), \tag{7.7}$$

and we shall call $R^{*-1}(x, x')$ the *secondary normal curvature* of F_{n-1} at P for the direction x'. Hence from (7.6) we have the result: *The curvature of a*

[9]) [6]. We may point out that BERWALD's definition of the second fundamental form is alltogether different from ours; also he employs CARTAN's covariant derivative involving the notion of element of support.

geodesic of F_{n-1} regarded as a curve of F_n is equal to the secondary normal curvature of F_{n-1} in the direction of the geodesic. We note that λ in (7.4) is given by

$$\lambda(x, x') = [R^*(x, x')]^{-1}. \tag{7.8}$$

Now to each geodesic Γ of F_{n-1} through P we associate the geodesic $\overline{\Gamma}$ of F_n tangent to F_{n-1} at P and having the same tangent vector at P. The latter geodesics form (at least in a small neighbourhood of P) a hypersurface F^*_{n-1}. In the neighbourhood of P we can map each $\overline{\Gamma}$ on its corresponding Γ by assigning to each point H of Γ with arc-length $PH = \delta s$ a point H' of $\overline{\Gamma}$ with arclength $PH' = \delta s$ (measured along $\overline{\Gamma}$). As we shall consider only small values of δs we may regard HH' as an infinitesimal vector z^i. The unit vector in the direction of z^i we denote by $N^{*i}(x, x', \delta s)$ where x' is, as before, the tangent to Γ and $\overline{\Gamma}$ at P. From the results of § 5 and (7.4) we immediately deduce

$$\lim_{\delta s \to 0} N^{*i}(x, x', \delta s) = n^{*i}(x, x'). \tag{7.9}$$

From (5.10) we also obtain

$$K(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \lim_{\delta s \to 0} \frac{2 z_i N^{*i}(x, x')}{\delta s^2}$$

or, using (7.8),

$$z_i N^{*i}(x, x') = \frac{\delta s^2}{2R^*(x, x')} + 0(\delta s^3). \tag{7.10}$$

Let us now choose our coordinate system in the immediate neighbourhood of P such that P is the origin and F^*_{n-1} is represented by the equation $x_n = 0$, the values of x_n being the length of the geodesics joining corresponding points H and H'. These geodesics are well-defined at each point H' of F^*_{n-1} except for $\delta s = 0$: there we have a cone of directions; by (7.9) we deduce that this is simply our normal cone. However, this does not matter since $x_n = 0$ for $\delta s = 0$ independently of the directions x' through P. The equation to our hypersurface may now be written in the form

$$x_n = x_n(x^\alpha), \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1). \tag{7.11}$$

From (7.10) we see that $x_n(x^\alpha)$ has a stationary value at $x^\alpha = 0$; and since $x_n(x^\alpha) = 0$ at that point, we have

$$x_n(\delta x^\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_n(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta + \cdots$$

by Taylor's Theorem, where δx^α are the coordinates of H. By definition this is equal to the right-hand side of (7.10), so that

$$\frac{\delta s^2}{2R^*(x, x')} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_n(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta$$

or, passing to the limit $\delta s \to 0$,

$$[R^*(x, x')]^{-1} = \frac{\partial^2 x_n(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x'^\alpha x'^\beta. \tag{7.12}$$

We thus define

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(x^\alpha) = \frac{\partial^2 x_n(x^\alpha)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \tag{7.13}$$

and (7.12) can be written in the form

$$\frac{1}{R^*(x, x')} = \frac{\Omega^*_{\alpha\beta}(x^\alpha)\, dx^\alpha\, dx^\beta}{\bar{g}_{\alpha\beta}(x, x')\, dx^\alpha\, dx^\beta} \tag{7.14}$$

in analogy to (7.3), which might have been expressed in the same fashion, using the law

$$\Omega_{\alpha\beta}(x, x') = \Omega_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \tag{7.15}$$

corresponding to (2.9) of Part I since Ω_{ij} is a tensor. Having transformed (7.3) in this manner and observing (7.7) a comparison with (7.14) shows that

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u) \cos\left(n, n^*(x, x')\right) = \Omega_{\alpha\beta}(x, x'). \tag{7.16}$$

Here the Rigorous Quotient Theorem was used; this is permissible since by (7.13) $\Omega^*_{\alpha\beta}$ is independent of x'^α and symmetrical in α, β [10]).

For future reference we note that in vitue of (7.8) and (7.14) equation (7.4) may now be written in the form

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = [\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha\, u'^\beta]\, n^{*i}(x, x') + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\bar{D} u'^\alpha}{Ds}, \tag{7.17}$$

[where $x'^i = x^i(u^\alpha)$ are the parametric equations of F_{n-1}, u'^α being given by (7.5)].

To return to the original problem mentioned at the beginning of this section we consider the function $\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha\, u'^\beta$ rather than $\Omega_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\alpha\, u'^\beta$ and we shall call the former the *secondary second fundamental form* of F_{n-1} in view of (7.14). It is of importance to notice that the $\Omega^*_{\alpha\beta}$ are functions of position only, so that when we construct in the Minkowskian tangent space $T_{n-1}(P)$ to F_{n-1} at P the $(n-2)$-dimensional surface represented by the equation

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha\, u'^\beta = 1, \tag{7.18}$$

we obtain a *quadric surface* (or a pair of conjugate quadrics) which we regard as a generalisation of the classical Dupin Indicatrix. From (7.14) we can immediately deduce the following basic property of such an Indicatrix: *The length of the radius vector of the Dupin Indicatrix in any direction is equal to the root of the secondary radius of curvature of the hypersurface in that direction.*

We now define *principal directions* at the point P to be those directions for which the length of the radius vectors of (7.18) assume extreme values. Thus we have to determine extreme values of $\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\alpha\, u'^\gamma$ subject to the

[10]) Footnote added during proof: Strictly speaking we should use (7.16) for the *definition* of $\Omega_{\alpha\beta}$ in terms of $\Omega^*_{\alpha\beta}$. By means of (7.7) equation (7.3) can thus be derived, and a further argument, using the fact that $\Omega_{\alpha\beta}$ must be a tensor, leads to the expression (7.2).

condition (7.18); i.e. we have to find solutions of the equations (u^α being kept constant)

$$\frac{\partial}{\partial u'^\gamma}\left[\bar{g}_{\alpha\beta}(u,u')\,u'^\alpha u'^\beta+\lambda\left(\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\,u'^\alpha u'^\beta-1\right)\right]=0,$$

the λ's being the undetermined multipliers of Lagrange. Thus possible solutions u'^α must satisfy

$$\frac{\partial\,\bar{g}_{\alpha\beta}(u,u')}{\partial u'^\gamma}\,u'^\alpha u'^\beta+2\bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')\,u'^\alpha+2\lambda\,\Omega^*_{\alpha\gamma}(u^\alpha)\,u'^\alpha=0. \tag{7.19}$$

The first term on the left-hand side vanishes identically in view of the homogeneity properties of the $\bar{g}_{\alpha\beta}$. But since the $\bar{g}_{\alpha\beta}$ are functions of direction nothing can be said about the number of independent possible solutions since our equations are not necessarily linear in the u'^α.

However, let us assume for the moment that at least two independent solutions $u'^\alpha_{(p)}$, $u'^\alpha_{(q)}$ of (7.19) corresponding to two *different* values $\lambda_{(p)}$, $\lambda_{(q)}$ of λ exist. Geometrically such an assumption would seem natural. According to (7.19) these satisfy the equations

$$\bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u'_{(p)})\,u'^\alpha_{(p)}+\lambda_{(p)}\,\Omega^*_{\alpha\gamma}(u^\alpha)\,u'^\alpha_{(p)}=0. \tag{7.20}$$

Multiplying (7.20) by $u'^\gamma_{(p)}$ and summing over γ we find on comparison with (7.14)

$$\lambda_{(p)}=-R^*(u,u'_{(p)}). \tag{7.21}$$

Using this result, let us multiply (7.20) by $u'^\gamma_{(q)}$, again summing over γ, afterwards interchanging the indices p and q. We thus obtain two equations

$$\begin{cases}\bar{g}_{\alpha\gamma}(u',u'_{(p)})\,u'^\alpha_{(p)}\,u'^\gamma_{(q)}=R^*(u,u'_{(p)})\,\Omega^*_{\alpha\gamma}(u)\,u'^\alpha_{(p)}\,u'^\gamma_{(q)}\\ \bar{g}_{\alpha\gamma}(u',u'_{(q)})\,u'^\alpha_{(q)}\,u'^\gamma_{(p)}=R^*(u,u'_{(q)})\,\Omega^*_{\alpha\gamma}(u)\,u'^\alpha_{(q)}\,u'^\gamma_{(p)}.\end{cases} \tag{7.22}$$

Since $\bar{g}_{\alpha\gamma}$ and $\Omega^*_{\alpha\gamma}$ are symmetrical in the lower indices, we find by subtraction

$$\frac{\bar{g}_{\alpha\gamma}(u',u'_{(p)})\,u'^\alpha_{(p)}\,u'^\gamma_{(q)}}{R^*(u,u'_{(p)})}=\frac{\bar{g}_{\alpha\gamma}(u',u'_{(q)})\,u'^\alpha_{(q)}\,u'^\gamma_{(p)}}{R^*(u,u'_{(q)})}$$

or, by definition of the Minkowskian cosine (cf. [3], § 2)

$$\frac{\cos(u'_{(p)},u'_{(q)})}{R^*(u,u'_{(p)})}=\frac{\cos(u'_{(q)},u'_{(p)})}{R^*(u,u'_{(q)})}. \tag{7.23}$$

This equation then determines the relative direction of principal directions at P in terms of the secondary normal curvatures. It is easily seen that (7.23) is *a generalisation of the law of orthogonality of principal directions in classical differential geometry*, for by (7.21) our assumption $\lambda_{(p)}\neq\lambda_{(q)}$ implies $R^*(u,u'_{(p)})\neq R^*(u,u'_{(q)})$. Thus, if the Minkowskian cosine were symmetric in its directional arguments, (7.23) would only be possible if $\cos(u'_{(q)},u'_{(p)})=0$. Hence it is also immediately clear from a geometrical point of view why there need not necessarily exist precisely $(n-1)$ principal directions at each point

P of F_{n-1} since from (7.22) we see that *the principal directions are not in general conjugate directions with respect to the Dupin Indicatrix.*

Note: Alternative treatments to the one outlined above are possible, for instance, by defining an alternative Dupin Indicatrix by means of the $(n-2)$-dimensional intersection of the hypersurface $\Omega_{ij}(x, n)\, x'^i\, x'^j = 1$ with the Minkowskian tangent hyperplane $T_{n-1}(P)$ to F_{n-1} at P. This is again a quadric surface. By defining

$$\frac{1}{R_*(u, u')} = \frac{\Omega_{\alpha\beta}(x, n)\, du^\alpha\, du^\beta}{\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, du^\alpha\, du^\beta}$$

in accordance with (7.14), such an R_* would have some of the properties of R^* but cannot be brought into a close connection with our original normal curvature R. Hence we discarded this approach altogether. Other definitions of the Dupin Indicatrix were investigated but were found to be analytically complicated and lacking in geometrical clarity.

§ 8. The covariant derivative of the unit normal.

For later developments it is necessary to have an explicit expression for the covariant derivative of the unit normal vector n^i to our hypersurface F_{n-1} in terms of Ω_{ij}. Here new difficulties peculiar to Finsler spaces arise since Dn^i/Ds is not in general a vector of F_{n-1} when we differentiate covariantly along a curve C of F_{n-1}. From (7.2) we have (x' being the unit tangent vector of C)

$$\text{(8.1)}\qquad \begin{cases} \Omega_{ij}(x, x')\, x'^j = -\frac{1}{2}\left(\frac{Dn_i}{Dx^j}\, x'^j + \frac{Dn_j}{Dx^i}\, x'^j\right) - \\ \qquad\qquad - \frac{1}{4}\, g^{mp}(x, x')\, \frac{\partial g_{mi}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ h\, j \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^j\, x'^k\, n_p, \end{cases}$$

where

$$\text{(8.2)}\qquad \begin{cases} \frac{Dn_i}{Dx^j}\, x'^j = \frac{\partial n_i}{\partial x^j}\, x'^j - \\ \qquad - \left\{ \begin{matrix} h \\ i\, j \end{matrix} \right\}_{(x, x')} n_h\, x'^j + \frac{1}{2}\, g^{hm}(x, x')\, \frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ p\, j \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^p\, x'^j\, n_h \end{cases}$$

and

$$\text{(8.3)}\qquad \begin{cases} \frac{Dn_j}{Dx^i}\, x'^j = \frac{\partial n_j}{\partial x^i}\, x'^j - \\ \qquad - \left\{ \begin{matrix} h \\ j\, i \end{matrix} \right\}_{(x, x')} n_h\, x'^j + \frac{1}{2}\, g^{hm}(x, x')\, \frac{\partial g_{jm}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ p\, i \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^p\, x'^j\, n_h \end{cases}$$

by definition of our covariant derivative (cf. [1], p. 123). The last term of (8.3) vanishes in view of the homogeneity properties of the g_{ij}.

Let us now write the equation to F_{n-1} in the form:

$$\text{(8.4)}\qquad f(x^i) = \text{const.}$$

Then

$$\text{(8.5)}\qquad \frac{\partial f}{\partial x^i}\, x'^i = 0$$

for all direction x'^i tangential to F_{n-1} at the point $P(x^i)$ of F_{n-1}. From (4.2) it follows that the covariant vector $\partial f/\partial x^i$ has the same direction as n_i. We thus have

$$n_i = \psi(x^k)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{8.6}$$

where

$$\psi(x^i) \equiv \left[g^{ij}(x, n)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial x^j}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{8.7}$$

since n_i is a unit vector.

From (8.5) and (8.6) we deduce

$$\frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j = \frac{d\psi}{ds}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i} + \psi\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

or

$$\frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j = \psi\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + \frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i. \tag{8.8}$$

Also,

$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\,x'^j = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^j}\,x'^j + \psi\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}\,x'^j.$$

But by (8.5) the first term on the right-hand side vanishes, so that

$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\,x'^j = \psi\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{8.9}$$

Consequently

$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\,x'^j = \frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^i - \frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i. \tag{8.10}$$

Adding (8.2) and (8.3) and taking into account (8.10) we find for the expression (8.1):

$$-\Omega_{ij}(x, x')\,x'^j = \frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j - \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left\{\begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} + \left\{\begin{matrix} h \\ j\ i \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')}\right] n_h\,x'^j + \frac{1}{4}\,g^{hm}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ p\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^p\,x'^j\,n_h +$$

$$+\frac{1}{4}\,g^{mp}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^k}\left\{\begin{matrix} k \\ h\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^j\,x'^h\,n_p.$$

Since the Christoffel symbols of the second kind are symmetrical in their lower indices, we can reduce the last expression to the form

$$\left\{\begin{aligned} &-\Omega_{ij}(x, x')\,x'^j \\ &= \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^j} - \left\{\begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} n_h + \frac{1}{2}\,g^{hm}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ p\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^p n_h\right] x'^j - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i. \end{aligned}\right. \tag{8.11}$$

For the sake of brevity let us put

$$T^h_i(x, x') = \frac{1}{4}\,g^{hm}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ p\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^p\,x'^j. \tag{8.12}$$

Also, by definition of the covariant derivative the quantities in the square brackets of (8.11) become

$$\frac{Dn_i}{Ds},$$

so that we finally have from (8.11)

$$\frac{Dn_i}{Ds} = -\Omega_{ij}(x, x')\, x'^j + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\log\psi)\, n_i. \tag{8.13}$$

This is the required formula.

As a first application let us consider a principal direction x'^i (or u'^α) of F_{n-1} at P. The condition for this may be expressed in virtue of (7.20) and (7.21) in the form

$$y_i \equiv g_{ij}(x, x')\, x'^j = R^*(x, x')\, \Omega^*_{ij}(x)\, x'^j$$

when written with respect to the coordinates of the enveloping space F_n. (Cf. Part I, § 2.) But from (7.16) and (7.7) we see that

$$R^*(x, x')\, \Omega^*_{ij}(x) = \Omega_{ij}(x, x')\, R(x, x'),$$

so that our condition becomes

$$\Omega_{ij}(x, x')\, x'^j = y_i [R(x, x')]^{-1}. \tag{8.14}$$

Substituting in (8.13) we find for principal directions

$$\frac{Dn_i}{Ds} = -\frac{y_i}{R(x, x')} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\log\psi)\, n_i. \tag{8.15}$$

This formula represents the generalisation of the well-known formula of Rodrigues, since the y_i are simply the covariant components of the tangent vector to the principal direction. In Riemannian space the last term on the right-hand side of (8.15) cannot appear since in any case Dn_i/Ds would have no component normal to the tangent plane; this is easily deduced from the fact that n_i is a unit vector.

In the case of a Minkowskian space (i.e. when the g_{ij} depend only on the direction) the covariant derivative is simply the ordinary derivative. Also, here it is easily verified that in view of the homogeneity properties of the g_{ij} the vector dn_i/ds also lies in the tangent plane to F_{n-1}, so that in both Riemannian or Minkowskian space (8.15) reduces to the usual form (cf. [3], § 5)

$$\frac{Dn_i}{Ds} = -y_i [R(x, x')]^{-1}.$$

As a further application of the formulae of this section let us consider once more the covariant derivative DX^i/Ds of a vector-field X^i (or U^α) of F_{n-1}, the process of covariant differentiation taking place along a curve C of F_{n-1}. For the case that X^i coincides with the tangent vector x'^i of C we were already able to evaluate the unknown coefficient $\lambda(x, x', X)$ in equation (4.7) which gave us an explicit expression (7.17) for DX^i/Ds in terms of $\delta X^i/\delta s$ [as defined by (4.5)]. We are now in a position to obtain a similar

but more general expression, X_i being an arbitrary differentiable vector-field of F_{n-1}. Multiplying (4.7) by $n_i(x)$, we have

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = \lambda(x, x', X)\, n^{*i}(x, x')\, n_i + \frac{\delta X^i}{\delta s} n_i,$$

but since by (4.5) $\delta X^i/\delta s$ (being a vector of F_{n-1}) is orthogonal with respect to n_i the last term on the right-hand side vanishes. Also, since n_i, n^{*i} are unit vectors, $n^{*i}(x, x')\, n_i = \cos(n, n^*)$, so that we find

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = \lambda(x, x', X) \cos(n, n^*). \tag{8.16}$$

But we also have $n_i X^i = 0$; thus

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = -X^i \frac{Dn_i}{Ds} = -\frac{1}{2}\left(X^i \frac{Dn_i}{Dx^j} x'^j + X^i \frac{Dn_i}{Ds}\right). \tag{8.17}$$

Substituting from (5.5) in (6.10) we have

$$\left.\begin{aligned} X^i \frac{Dn_i}{Ds} = &\left[\frac{dn_i}{ds} - \left\{\begin{matrix} h \\ i\ k \end{matrix}\right\}_{(x, x')} n_h\, x'^k\right] X^i + \\ &+ \frac{1}{2} g^{hm}(x, x') \frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{\begin{matrix} l \\ j\ k \end{matrix}\right\}_{(x, x')} x'^j\, x'^k\, n_h X^i. \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Also, from (8.3) it follows that

$$X^i \frac{Dn_j}{Dx^i} x'^j = \left[\frac{\partial n_j}{\partial x^i} x'^j - \left\{\begin{matrix} h \\ j\ i \end{matrix}\right\}_{(x, x')} n_h\, x'^j\right] X^i$$

and using (8.10) we find

$$X^i \frac{Dn_j}{Dx^i} x'^i = \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^j} x'^j - \left\{\begin{matrix} h \\ i\ k \end{matrix}\right\}_{(x, x')} n_h\, x'^k\right] X^i - \frac{d}{ds}(\log \psi)\, n_i X^i.$$

Again the last term on the right-hand side vanishes since X^i is a vector of F_{n-1}. Comparing the latter equation with (8.13) we thus have

$$X^i \frac{Dn_i}{Ds} = X^i \frac{Dn_j}{Dx^i} x'^j + 2T_i^h(x, x')\, n_h X^i, \tag{8.19}$$

where we have made use of the notation defined in (8.12). We can now substitute (8.19) in (8.17) and we find

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = -\frac{1}{2} X^i \left(\frac{Dn_i}{Dx^j} + \frac{Dn_j}{Dx^i}\right) x'^j - T_i^h(x, x')\, n_h X^i. \tag{8.20}$$

We now introduce our second fundamental form $\Omega_{ij}(x, x')$ by means of equation (7.2) and compare the latter result with (8.16), obtaining

$$\lambda(x, x', X) \cos(n, n^*) = \Omega_{ij}(x, x')\, X^i x'^j. \tag{8.21}$$

But by (7.15) and (2.6) of Part I we have

$$\Omega_{ij}(x, x')\, X^i x'^j = \Omega_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} U^\alpha \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} u'^\beta = \Omega_{\alpha\beta}(u, u')\, U^\alpha u'^\beta.$$

Hence with the aid of (7.16) we may now write (8.21) in the form

$$\lambda(x, x', X) = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, U^\alpha u'^\beta. \tag{8.22}$$

Thus we have determined λ completely. Equation (4.7) can now be written in its final form:

$$\frac{DX^i}{Ds} = \{\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, U^\alpha u'^\beta\}\, n^{*i}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}. \tag{8.23}$$

This then is the required explicit comparison of DX^i/Ds with $\delta X^i/\delta s$. If we return to the particular case $X^i \equiv x'^i$ (or $U^\alpha = u'^\alpha$) (i.e. X^i tangential to C) it is easily seen that (8.23) reduces to (7.17). The geometrical relation between DX^i/Ds and $\delta X^i/\delta s$ is now evident: the quantity in curly brackets is the projection of DX^i/Ds onto the normal vector $n^*(x, x')$, *while* $\delta X^i/\delta s$ *[which, by* (4.5) *is the covariant derivative of* U^α *with respect to the metric of* F_{n-1}*] is the projection of* DX^i/Ds *onto the Minkowskian tangent plane* T_{n-1} *of* F_{n-1}, *the normal cone being used for the process of projection.*

§ 9. Asymptotic Directions. Mean Curvature of a hypersurface.

Two directions $u'_{(p)}, u'_{(q)}$ of F_{n-1} at a point P of F_{n-1} are said to be conjugate (as in classical differential geometry) if they satisfy the condition

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha_{(p)}\, u'^\beta_{(q)} = 0. \tag{9.1}$$

It follows from (7.22) that two *principal directions are conjugate directions if and only if the cosine corresponding to these two directions is symmetrical* (in which case the directions are also mutually orthogonal). This is equivalent to the condition that there exists an $(n-2)$-dimensional quadric surface in T_{n-1} touching the "metric" indicatrix in two points corresponding to the directions $x'_{(p)}, x'_{(q)}$.

Furthermore, asymptotic directions are defined to be self-conjugate, i.e. they have to satisfy

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha u'^\beta = 0. \tag{9.2}$$

From (7.14) and (7.7) is then follows that for *asymptotic directions both the normal and secondary normal curvature of* F_{n-1} *vanish.*

Also, we deduce from (7.17) that *when we differentiate covariantly along an asymptotic direction of* F_{n-1} *the covariant derivative with respect to the metric of* F_n *is identical to the covariant derivative with respect to the metric of* F_{n-1}.

In particular, *if the tangents to a geodesic* Γ *of* F_{n-1} *are asymptotic directions,* Γ *is also a geodesic of* F_n. Conversely, *geodesics of* F_n *which are also curves of* F_{n-1} *are geodesics of* F_{n-1} *and are tangential to asymptotic directions of* F_{n-1}. This fact represents an extension of the result proved in § 4.

Reverting to the notation of § 7, we see from (7.10) that if x'^i is an asymptotic direction at F_{n-1} at P:

$$z_i N^{*i}(x, x') = 0(\delta s^3)$$

or

$$|H\, H'| = 0(\delta s^3).$$

Thus we have the result: *If a geodesic of F_{n-1} is tangential to an asymptotic direction at P it has contact of at least the second order with the geodesic of F_r touching it at P.*

As is customary we call a point P of F_{n-1} a *umbilical point* if the principal directions at P are indeterminate. This implies that the Dupin Indicatrix is homothetic to the "metric" Indicatrix, i.e. if $\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u') = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)$. [Compare equation (7.20).] This is possible only if the metric Indicatrix is a quadric [i.e. $\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')$ independent of direction], so that F_{n-1} at P is locally euclidean. Thus, *umbilical points can exist only at such points of F_{n-1} for which the local metric is euclidean.*

If *all* the geodesics of F_{n-1} are also geodesics of the enveloping F_n, the hypersurface (if such a hypersurface exists) is called a *totally geodesic hypersurface*. According to (7.17) this is possible only if (9.2) is satisfied for all possible directions of F_{n-1} (since both Dx'^i/Ds and Du'^α/Ds vanish). This requires $\Omega^*_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} = 0$ at all points of F_{n-1}. Using (7.15) we apply this result to (8.13). It is seen that Dn_i/Ds does not necessarily vanish. Hence in contrast to the corresponding result of Riemannian Geometry we see that *the normals of a totally geodesic hypersurface are not necessarily parallel in the enveloping space.*

In order to arrive at the notion of *mean curvature* of F_{n-1} we carry out the following geometrical construction. Consider the $(n-2)$-dimensional surface in $T_{n-1}(P)$ obtained by the intersection of the quadric $g_{ij}(x^k, n^k)\, x'^i x'^j = 1$ with the tangent hyperplane to F_{n-1} at P. This quadric surface can be represented by the equation

$$\gamma_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha u'^\beta = 1. \tag{9.3}$$

Denote by $\gamma^{\alpha\beta}(u)$ the algebraic complements of the $\gamma_{\alpha\beta}$ in the determinant $|\gamma_{\alpha\beta}|$. It follows from the theory of quadratic forms that there exist sets of $(n-1)$ independent vectors $u'^\alpha_{(\iota)}$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)} = \gamma^{\alpha\beta}(u). \tag{9.4}$$

To each direction $u_{(\nu)}$ corresponds a value $R^{*\,-1}_{(\nu)}$ of the secondary normal curvature of F_{n-1} at P given by (7.14):

$$\frac{1}{R^*_{(\nu)}} = \frac{\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)}}{g_{\alpha\beta}(u, u'_{(\nu)})\, u'^\alpha_{(\iota)}\, u'^\beta_{(\nu)}} = \frac{\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)}}{|u'_{(\nu)}|^2}$$

Multiplying each of these $(n-1)$ equations by $|u'_{(\nu)}|^2$ and summing over ν it follows from (9.4) that

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{|u'_{(\iota)}|^2}{R^*_{(\nu)}} = \Omega^*_{\alpha\beta}(u) \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)} \right) = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, \gamma^{\alpha\beta}(u). \tag{9.5}$$

We deduce therefore that this sum is an invariant for *any* set of $(n-1)$ directions of F_{n-1} satisfying (9.4). Also, we note that the right-hand side of (9.5)

is independent of direction so that we may write

$$M^*(u) = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)\,\gamma^{\alpha\beta}(u). \tag{9.6}$$

We shall call $M^*(u)$ the *secondary mean curvature* of F_{n-1} at the point P of F_{n-1}. Multiplying (9.6) by $\cos(n, n^*(x, x'))$, x' (or u') being an arbitrary direction of F_{n-1} at P, we find in virtue of (7.16)

$$M^*(u)\cos(n, n^*) = \Omega_{\alpha\beta}(u, u')\,\gamma^{\alpha\beta}(u) = M(u, u') \tag{9.7}$$

say, which we call the *mean curvature* of F_{n-1} with respect to the direction u' at the point P of F_{n-1}.

Now it follows from the definition of $\gamma^{\alpha\beta}(u)$ that we may write

$$\gamma^{\alpha\beta}(u)\,\Omega_{\alpha\beta}(u, u') = \gamma^{\alpha\beta}(u)\,\Omega_{ij}(x, x')\,\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} = g^{ij}(x, n)\,\Omega_{ij}(x, x')$$

when we consider also equation (2.24) of Part I. Thus from (9.7) we have

$$M(x, x') = g^{ij}(x, n)\,\Omega_{ij}(x, x'). \tag{9.8}$$

Up to this point our discussion was restricted to the case of hypersurfaces. In part III of this paper we shall indicate the generalisation of our results to m-dimensional subspaces.

Bibliography.

[1] RUND, H.: Über die Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. Math. Z. **54**, 115—128 (1951). — [2] LIPKA, J.: On the relative curvature of two curves in V_n. Bull. Amer. Math. Soc. **29**, 345—348 (1923). — [3] RUND, H.: Zur Begründung der Differentialgeometrie in Minkowskischen Räumen. Arch. Math. **3**, 60—59 (1952). — [4] BUSEMANN, H.: Geodesic curvature in two-dimensional Finsler Spaces. Ann. Mat. pura appl., Bologna, III. Ser. **31**, 281—295 (1950). — [5] BUSEMANN, H.: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950). — [6] BERWALD, L.: Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. Mh. Math. u. Phys. **43**, 1—14 (1936).

Bonn, Mathematisches Seminar, Meckenheimer Allee 172.

(Eingegangen am 22. April 1952.)

STOLL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 211—237 (1953)

Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen.

Von
WILHELM STOLL.

§ 1. Einleitung.

Der Logarithmus einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung $f(\mathfrak{z}) = f(z_1, \ldots, z_n)$ läßt sich in einer Nullpunktsumgebung nach H. KNESER [3][1]) als ein Integral über die Fläche $\mathfrak{N}$ der Pol- und Nullstellen von f [s. unten (1.10)] darstellen. Diese Darstellung geht im Falle $n = 1$ in die WEIERSTRASSsche Produktdarstellung

$$\log f(y) = g(y) + \sum_z \left\{ \log\left(1 - \frac{y}{z}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{\nu} \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu} \right\}$$

über, wobei z die Pol- und Nullstellen von $f(y)$ mit ihrer Vielfachheit durchläuft. Sind umgekehrt die Nullstellen vorgegeben, so wird unter der notwendigen Konvergenzvoraussetzung durch die Summe eine solche Funktion $f(y)$ geliefert. Bei mehreren Veränderlichen ist dies mit dem Integral (1.10) statt der Summe auch richtig. Der Beweis ist aber bei mehreren Veränderlichen keineswegs mehr trivial und stellt die Aufgabe dieser Arbeit dar. Um diesen Beweis führen zu können, wurden in der Arbeit „Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten" [Math. Z. **57**, S. 116—154 (1952)], die weiterhin mit I zitiert werde, notwendige Vorbereitungen getroffen. Die in I eingeführten Bezeichnungen werden wieder benützt.

Bevor nun die Fragestellung näher erläutert werden kann, ist es erforderlich, an einige Definitionen und Sätze der Arbeit von H. KNESER [3] zu erinnern.

Die überall meromorphe Funktion $f(\mathfrak{z}) \not\equiv a$ habe die a-Stellenfläche $\mathfrak{N}(a)$ und die Vielfachheit der a-Stelle $\nu(\mathfrak{z}, a)$. Wegen I Satz 10 kann man die *Anzahlfunktion* $n(r, a)$ durch[2])

$$(1.1) \qquad \begin{cases} n(r,a) = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)} \displaystyle\int_{r_0 \mathfrak{N}(a)}^{r} \nu(\mathfrak{z},a)\, \partial v_{2n-2} \quad (r_0 > 0) \\ \qquad\quad = \dfrac{1}{W_{2n-2}} \displaystyle\int_{r_0 \mathfrak{N}(a)}^{r} \nu(\mathfrak{z},a)\, \partial \omega_{2n-2} + \nu(0,a) \end{cases}$$

[1]) Die Nummer [3] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Zur Bezeichnungsweise vergleiche I, insbesondere § 3. $\mathfrak{R}^{2n}$, ∂v_{2n-2}, $\partial \omega_{2n-2}$ werden in (I.3.6) bis (I.3.13), V_{2n-2}, W_{2n-2}, und V_{2n-1} in (I.3.22) erklärt. ∂v_{2n-1} ist das euklidische Oberflächenelement der Hyperkugel. $\int_{r_0 \mathfrak{N}(a)}^{r}$ bezeichnet die Integration über den in der Kugelschale $r_0 \leq |\mathfrak{z}| \leq r$ liegenden Teil von $\mathfrak{N}(a)$. In (I.3.5) ist $(\mathfrak{v}|\mathfrak{z})$ erklärt.

definieren. *Die Valenz* $N(r, a)$ (*große Anzahlfunktion*) sei

$$N(r,a)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t,a)}{t}\,dt. \tag{1.2}$$

Setzt man $a=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, so sei die *Schmiegungsfunktion*[2])

$$m(r,a)=\frac{1}{W_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\log\frac{\sqrt{1+|f|^2}\sqrt{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2}}{\alpha_1 f+\alpha_2}\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{z}). \tag{1.3}$$

Mit $K=[|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2=1]$ definiert man

$$\nu=\frac{1}{2\pi^2}\int_K \nu\left(0,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\partial v_3. \tag{1.4}$$

Dann gilt

$$A(r)=\frac{1}{\pi W_{2n-2}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|\le r}\frac{\partial f\,\partial\bar f}{(1+|f|^2)^2}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{z})$$

$$=\frac{1}{\pi W_{2n-2}}\int_{|\mathfrak{z}|\le r}\frac{\partial f\,\partial\bar f}{(1+|f|^2)^2}\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})+\nu.$$

Die *Charakteristik* wird durch

$$T(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{A(t)}{t}\,dt$$

erklärt. Nach H. KNESER [3] § 4 gilt nun der 1. Hauptsatz:

$$T(r)=N(r,a)+m(r,a)-m(r_0,a)\ ^3). \tag{1.7}$$

Es werde $\nu(\mathfrak{z})=\nu(\mathfrak{z},0)-\nu(\mathfrak{z},\infty)$ und $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(0)\cup\mathfrak{N}(\infty)$ gesetzt. In der Kugel $[|\mathfrak{z}|\le r_0]$ sei $\log f(\mathfrak{z})$ regulär, d.h. $\mathfrak{N}_{0r_0}$ sei leer. Mit $E(x,q)=(1-x)\exp\left(\sum_{\nu=1}^{q}\frac{x^\nu}{\nu}\right)$ werde der WEIERSTRASSsche Primfaktor abgekürzt. Ferner sei

$$e(x,q)=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{x^{n-1}\log E(x,q)\}. \tag{1.8}$$

Für eine ganze Zahl $q\ge 0$ strebe

$$T(r)\,r^{-q-1}\to 0\quad\text{für}\quad r\to\infty. \tag{1.9}$$

Dann gilt nach H. KNESER [3] § 6 *in der Vollkugel* $[|\mathfrak{y}|\le r_0]$ *die Gleichung*[2]):

$$\log f(\mathfrak{y})=g(\mathfrak{y})+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{W_{2n-2}}\int_0^r\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\,e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q\right)\partial\omega_{2n-2}, \tag{1.10}$$

[3]) Die Größen $N(r,a)$, $n(r,a)$, $m(r,a)$, $m(r_0,a)$ und $T(r)$ sind analog zu WEYL [8], Kap. II, § 2 gebildet. Für $r_0\to 0$ gehen sie in die von H. KNESER [3], § 4 über, die denen von R. NEVANLINNA [5], Kap. VIII, § 3 im Falle einer Veränderlichen entsprechen. Vgl. auch die letzte Gleichung von [5], Kap. VI, § 1, S. 156.

wobei $g(\mathfrak{y})$ ein Polynom höchstens q-ten Grades ist. Existiert sogar das Integral $\int_{r_0}^{r} T(r)\, r^{-q-2}\, dr$, so ist auch $\int_{\mathfrak{N}} \nu\, e\, \partial\omega_{2n-2}$ vorhanden, und man darf gemäß I Definition 4 jetzt $\int_{\mathfrak{N}}$ statt $\lim_{r\to\infty} \int_{0\mathfrak{N}}^{r}$ schreiben. Das Integral in (1.10) und auch der Grenzübergang in (1.10) existieren, wenn $(\mathfrak{y}|\mathfrak{z}) \neq (\mathfrak{z}|\mathfrak{z})$ für jeden Punkt $\mathfrak{z} \in \mathfrak{N}$ gilt. Die Gl. (1.10) gilt also in dem größten Teilgebiet $\mathfrak{R}$ der Menge[2]) $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^{2n} - [(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}|\mathfrak{z}) = 0 \text{ mit } \mathfrak{z} \in \mathfrak{N}]_{\mathfrak{y}}$, das den Nullpunkt enthält. Das Gebiet $\mathfrak{R}$ umfaßt die Vollkugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$. Wenn $\mathfrak{N}$ nicht leer ist, so ist $\mathfrak{R}$ ein echtes Teilgebiet von $\mathfrak{R}^{2n}$. Es kann beschränkt und unbeschränkt sein[4]). Im Falle $n = 1$ geht (1.10) in den WEIERSTRASSschen Produktsatz in logarithmischer Gestalt über.

Wie bei einer Veränderlichen stellen sich nun zwei Fragen[5]):

I. Wird bei vorgegebener Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ durch

$$h(\mathfrak{y}) = \exp\left\{\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}\right\} \tag{1.11}$$

eine überall meromorphe Funktion $h(\mathfrak{y})$ definiert, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, bzw. unendlich wird, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$?

II. Wenn ja, was läßt sich über die Ordnung von $h(\mathfrak{y})$ aussagen?

Unter einer geeigneten Konvergenzvoraussetzung (vgl. Satz 3) existiert das Integral (1.11) im Gebiet $\mathfrak{R}$. Durch (1.11) wird eine in $\mathfrak{R}$ analytische Funktion $h(\mathfrak{y})$ erklärt. Das Integral konvergiert aber nur auf dem Teil $\mathfrak{R}^*$

[4]) Das Gebiet $\mathfrak{R}$ heiße Existenzgebiet zur Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$. Als Beispiel werde die Ebene $\mathfrak{N} = [z_n = 1]_{\mathfrak{z}}$ betrachtet. Es werde

$$r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \bar{y}_\nu,\quad t^2 = \sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu \bar{y}_\nu,\quad p^2 = \sum_{\nu=1}^{n-2} y_\nu \bar{y}_\nu,\quad y_{n-1} = u + iv,\quad y_n = x + iy$$

gesetzt. Eine leichte, etwas längere Rechnung zeigt, daß das Existenzgebiet $\mathfrak{R}$ zur Ebene $\mathfrak{N}$ das Gebiet

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* = [t^2 < 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2}]_{\mathfrak{y}}$$

ist. Es ist offensichtlich *unbeschränkt*. Als zweites Beispiel liefert die Ebene $\mathfrak{N}_1 = [z_{n-1} = 1]_{\mathfrak{z}}$ das Existenzgebiet

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1^* = [p^2 + x^2 + y^2 < 2(1-u) + 2\sqrt{(1-u)^2 + v^2}]_{\mathfrak{y}}.$$

Als drittes Beispiel werde das Existenzgebiet $\mathfrak{R}_2$ der Vereinigung $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}_1$ betrachtet. Es liegt im Durchschnitt $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}_1$. Die Ungleichungen (a) und (b) liefern die Abschätzung

$$\begin{aligned} r^2 = t^2 + x^2 + y^2 &< 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2} + 2(1-u) + \sqrt{(1-u)^2 + v^2} \\ r^2 &< 4|1-x| + 2|y| + 4|1-u| + 2|v| \\ r^2 &< 4 + 4|x| + 2|y| + 4 + 4|u| + 2|v| \\ r^2 &< 8 + 12r \\ r &< 13 \end{aligned}$$

Das Existenzgebiet $\mathfrak{R}_2$ liegt in der Kugel mit dem Radius 13 um den Nullpunkt, ist also *beschränkt*.

[5]) Für zwei Veränderliche wurden diese Fragen schon von H. KNESER [2] beantwortet. Die dortige Beweismethode versagt anscheinend bei mehr als zwei Veränderlichen.

von $\mathfrak{R}^{2n}$. Daher ist es allein sinnvoll, die Gültigkeit von (1.11) auf $\mathfrak{R}$ zu verlangen. Hier tritt ein großer Unterschied gegenüber der Theorie einer Veränderlichen auf: 1. Die Darstellung (1.11) liefert nicht automatisch $h(\mathfrak{y})$ für alle $\mathfrak{y}$. Die Fortsetzbarkeit von $h(\mathfrak{y})$ scheint sehr fraglich zu sein. 2. Aus (1.11) läßt sich nicht unmittelbar ablesen, daß $h(\mathfrak{y})$ auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, bzw. unendlich wird, und noch weniger, mit welcher Vielfachheit das etwa geschieht. 3. Die Darstellung (1.11) ist ungeeignet, um $M(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{y}| \leq r} |h(\mathfrak{y})|$ nach oben abzuschätzen, da für große r die Kugeln $[|\mathfrak{y}| \leq r]$ nicht in $\mathfrak{R}$ liegen. Ja selbst in $\mathfrak{R}$ läßt sich wegen (1.8) schlecht abschätzen.

Die gestellten Fragen sind also keineswegs trivial. Zu ihrer Beantwortung werden in § 2 die einfachsten Tatsachen über Ordnung, Klasse, Typ meromorpher Funktionen zusammengestellt. In § 3 werden die benötigten Hilfssätze bereitgestellt, wovon die Hilfssätze 6 und 7 die grundlegenden sind. In § 4 und § 5 werden die gestellten Fragen I. und II. beantwortet.

§ 2. Ordnung, Klasse, Typ und Grenzexponent[6]).

Die *Ordnung* einer nicht abnehmenden Funktion $s(r)$ definiert man bekanntlich durch

$$\lambda = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log s(r)}{\log r}.$$

Wenn die Ordnung $\lambda < \infty$ ist, so sei die Funktion $s(r)$ vom

$$\textit{Maximaltyp, wenn } \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda} = \infty \textit{ ist,}$$

$$\textit{Mitteltyp, wenn } 0 < \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda} < \infty \textit{ ist,}$$

$$\textit{Minimaltyp, wenn } \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda} = 0 \textit{ ist.}$$

Ist $r_0 > 0$ beliebig gewählt, so sei die Funktion $s(r)$ in der

$$\left.\begin{matrix} \textit{Divergenzklasse, wenn} \\ \textit{Konvergenzklasse, wenn} \end{matrix}\right\} \int_{r_0}^{\infty} \frac{s(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt \left\{\begin{matrix} = \infty \textit{ ist,} \\ < \infty \textit{ ist.} \end{matrix}\right.$$

Dazu werden die Ordnungsbeziehungen:

Maximaltyp > Mitteltyp > Minimaltyp

Divergenzklasse > Konvergenzklasse

eingeführt.

Eine meromorphe Funktion f habe dieselbe Ordnung, Klasse und Typ wie ihre Charakteristik. Diese Festsetzung hängt nicht von der Wahl des Nullpunktes ab. Besitzt nämlich die Funktion $f(\mathfrak{y} + \mathfrak{c})$ mit festem Vektor $\mathfrak{c}$ die Charakteristik $\tilde{T}(r)$, so gilt nach H. KNESER [3] § 4

$$A(t) \leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \tilde{A}(t + |\mathfrak{c}|),$$

[6]) Vergleiche [5] Kap. VIII, § 1, S. 208—211.

also

$$T(r) \leq \left(1 + \frac{|c|}{r_0}\right)^{2n-1} \tilde{T}(r + |c|).$$

Entsprechend folgt die umgekehrte Abschätzung

$$\tilde{T}(r) \leq \left(1 + \frac{|c|}{r_0}\right)^{2n-1} T(r + |c|).$$

Daher stimmen $T(r)$ und $\tilde{T}(r)$ in Ordnung, Klasse und Typ überein.

Wie bei einer Veränderlichen definiert man den Grenzexponenten:

Definition 1 (Grenzexponent). *Die* Cousinsche *Verteilung*[2]) $F_{\mathfrak{R}^{2n}}$ *habe die Nullstellenfläche* $\mathfrak{N}$ *mit der Vielfachheit* $\nu(\mathfrak{z})$. *Wenn* $r_0 > 0$ *beliebig gewählt ist, so heiße die reelle Zahl* μ

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Konvergenzexponent, wenn} \\ \textit{Divergenzexponent, wenn} \end{array}\right\} \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{r_0 \mathfrak{N}}^{\infty} \nu(\mathfrak{z})\, |\mathfrak{z}|^{-\mu}\, \partial\omega_{2n-2} \left\{\begin{array}{l} < \infty \textit{ ist,} \\ = \infty \textit{ ist.} \end{array}\right.$$

Die untere Grenze aller Konvergenzexponenten heiße Grenzexponent.

Diese Einteilung ist von der Wahl von r_0 unabhängig. Der Grenzexponent ist zugleich die obere Grenze aller Divergenzexponenten. Wie im Falle einer Veränderlichen gilt:

Satz 1[6]).

Voraussetzung. *Die* Cousinsche *Verteilung* F *auf* $\mathfrak{R}^{2n}$ *habe die Nullstellenfläche* $\mathfrak{N}$; *die Vielfachheit der Nullstelle von* F *sei* $\nu(\mathfrak{z})$. *Der Vektor* c *und der Radius* $r_0 > 0$ *seien fest gewählt. Dann werde gesetzt:*

$$\tilde{\mathfrak{N}} = [\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} - c \text{ mit } \mathfrak{z} \in \mathfrak{N}]_{\tilde{\mathfrak{z}}}, \qquad \tilde{\nu}(\tilde{\mathfrak{z}}) = \nu(\tilde{\mathfrak{z}} + c),$$

$$n(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{0\mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, \partial\omega_{2n-2} + \nu(0), \qquad \tilde{n}(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{0\,\tilde{\mathfrak{N}}}^{r} \tilde{\nu}(\tilde{\mathfrak{z}})\, \partial\omega_{2n-2} + \tilde{\nu}(0),$$

$$N(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt, \qquad \tilde{N}(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{n}(t)}{t}\, dt.$$

Behauptung.

1. *Für jede positive Zahl* μ *konvergieren bzw. divergieren die Integrale*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} N(r)\, r^{-\mu-1}\, dr, \qquad \int\limits_{r_0}^{\infty} n(r)\, r^{-\mu-1}\, dr, \qquad \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{r_0 \mathfrak{N}}^{\infty} \nu(\mathfrak{z})\, |\mathfrak{z}|^{-\mu}\, \partial\omega_{2n-2}$$

zugleich.

2. a) Ord $N(r)$ = Ord $n(r)$ = ϱ = *Grenzexponent von* $\mathfrak{N}$,

b) Typ $N(r)$ = Typ $n(r)$, *falls* $\varrho > 0$ *ist,*

c) Klasse $N(r)$ = Klasse $n(r)$, *falls* $\varrho > 0$ *ist.*

Und zwar ist die gemeinsame Klasse die Konvergenzklasse, wenn der Grenzexponent ϱ *ein Konvergenzexponent ist, bzw. die Divergenzklasse, wenn der Grenzexponent* ϱ *ein Divergenzexponent ist.*

3. *Die Funktionen $N(r)$ und $\tilde{N}(r)$ (bzw. $n(r)$ und $\tilde{n}(r)$) stimmen in Ordnung, Klasse und Typ überein. Die Nullstellenflächen $\mathfrak{N}$ und $\tilde{\mathfrak{N}}$ haben denselben Grenzexponenten.*

Beweis. Die Zahl μ sei positiv. Wie bei einer Veränderlichen folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z}) |\mathfrak{z}|^{-\mu} \partial\omega_{2n-2} \\
&\quad = \frac{\mu}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z}) \int_{|\mathfrak{z}|}^{r} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \partial\omega_{2n-2} + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, r^{-\mu} \partial\omega_{2n-2} \\
&\quad = \frac{\mu}{W_{2n-2}} \int_{r_0}^{r} t^{-\mu-1} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{t} \nu(\mathfrak{z})\, \partial\omega_{2n-2}\, dt + \frac{n(r) - n(r_0)}{r^{\mu}} \\
&\quad = \mu \int_{r_0}^{r} \frac{n(t) - n(r_0)}{t^{\mu+1}}\, dt + \frac{n(r) - n(r_0)}{r^{\mu}}
\end{aligned}$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t^{\mu+1}}\, dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dN(t)}{t^{\mu}} = \frac{N(r)}{r^{\mu}} - \frac{N(r_0)}{r_0^{\mu}} + \mu \int_{r_0}^{r} \frac{N(t)}{t^{\mu+1}}\, dt.$$

Aus diesen Umformungen folgen die Behauptungen 1 und 2a, c. Der Beweis von 2b ergibt sich von selbst aus den Abschätzungen

$$N(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leq n(r) \log \frac{r}{r_0},$$

$$n(r) \leq \int_{r}^{er} \frac{n(t)}{t}\, dt \leq N(er).$$

Nach (1.1) gilt bezüglich der Parallelverschiebung:

$$\begin{aligned}
n(t) &= \frac{1}{V_{2n-2}(t)} \int_{0 \mathfrak{N}}^{t} \nu(\mathfrak{z})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \\
&\leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \frac{1}{V_{2n-2}(t + |\mathfrak{c}|)} \int\limits_{\substack{\mathfrak{z} \in \mathfrak{N} \\ |\mathfrak{z}+\mathfrak{c}| \leq t+|\mathfrak{c}|}} \nu(\mathfrak{z})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \\
&\leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \frac{1}{V_{2n-2}(t + |\mathfrak{c}|)} \int_{0 \tilde{\mathfrak{N}}}^{t+|\mathfrak{c}|} \tilde{\nu}(\tilde{\mathfrak{z}})\, \partial v_{2n-2}(\tilde{\mathfrak{z}}) \\
&\leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \tilde{n}(t + |\mathfrak{c}|).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$N(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{r_0}\right)^{2n-1} \int_{r_0}^{r} \frac{\tilde{n}(t + |\mathfrak{c}|)}{t + |\mathfrak{c}|}\, dt \leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{r_0}\right)^{2n-1} \tilde{N}(r + |\mathfrak{c}|).$$

Da auch die „umgekehrten" Abschätzungen gelten, erhält man die Behauptung 3 mittels 1. und 2. w. z. b. w.

§ 3. Hilfssätze.

Zunächst werden einige bekannte Hilfssätze zusammengestellt.

Hilfssatz 1 (CARATHÉODORY).

Voraussetzung. *Die Funktion $f(z)$ sei im Kreis $|z|<R$ analytisch. Es werde* $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ *und* $A(r)=\max_{|z|=r}\Re e\, f(z)$ *gesetzt.*

Behauptung. *Für alle r,ϑ in $0<r<R$ und $0<\vartheta<1$ gilt:*

$$M(\vartheta r)\leq \frac{2}{(1-\vartheta)}\{A(r)+2|f(0)|\}.$$

Zum Beweis siehe LANDAU [4] S. 89.

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gilt:*

$$\left|\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}f(z)\right|\leq\frac{1}{(1-\vartheta)^s}\frac{M(r)}{r^{s-1}}\quad\text{für}\quad|z|\leq\vartheta r.$$

Hilfssatz 3. *Für eine beliebige Konstante c gilt:*

a) *Wenn $p=3e\,(2+\log q)$ und $q\geq 1$ ist, so gilt:*

$$\log|E(xc,q)|\leq p\frac{|xc|^{q+1}}{1+|xc|}\quad\text{für alle } x.$$

b) *Für jede nichtnegative ganze Zahl μ und q, jedes η und x in $|xc|\leq|c|r<|c|r\eta<1$ gilt:*

$$\left|\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\{x^{n-1}\log E(xc,q)\}\right|\leq\frac{\eta^n}{(\eta-1)^{\mu+1}}\frac{|cr\eta|^{q+1}}{1-|cr\eta|}r^{n-\mu-1}.$$

c) *Im Nullpunkt ist*

$$\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\{x^{n-1}\log E(xc,q)\}\Big|_{x=0}=0\quad\text{für}\quad 0\leq\mu\leq n+q-1.$$

Beweis. a) folgt aus [5] Kap. VIII, § 3, S. 214. Die Behauptung c) ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung b). Diese erhält man gemäß Hilfssatz 2 mit $\vartheta=\eta^{-1}$ aus

$$|x^{n-1}\log E(xc,q)|\leq|x|^{n-1}\sum_{\nu=q+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}|xc|^\nu\leq\frac{|cr\eta|^{q+1}}{1-|cr\eta|}(r\eta)^{n-1}$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 4.

Voraussetzung. *Die nicht abnehmende Funktion $s(r)$ habe die Ordnung $\lambda<\infty$ und verschwinde im Intervall $0\leq r\leq r_0$. Es sei q eine ganze Zahl mit $0\leq q\leq\lambda\leq q+1$, für die das Integral $\int_0^\infty\frac{s(t)}{t^{q+2}}dt$ existiert. Es werde*

$\varkappa = 3e\{\log(1+q)+2\}\cdot(q+1)$ *gesetzt. Der Funktion* $s(r)$ *werde die Funktion*

$$K(r) = K(r;s) = \varkappa r^q \left\{ \int_0^r \frac{s(t)}{t^{q+1}}\, dt + r \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \right\}$$

zugeordnet.

Behauptung. *Zwischen den nicht abnehmenden Funktionen* $K(r)$ *und* $s(r)$ *bestehen die Beziehungen*:

$$\begin{aligned} \text{Ord } K(r) &= \text{Ord } s(r), && \text{falls } q \leq \lambda \leq q+1 \text{ ist,} \\ \text{Typ } K(r) &= \text{Typ } s(r), && \text{falls } q < \lambda \leq q+1 \text{ ist,} \\ \text{Klasse } K(r) &= \text{Klasse } s(r), && \text{falls } q < \lambda < q+1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Beweis. Fast überall ist die Funktion $K(r)$ differenzierbar:

$$K'(r) = \varkappa q r^{q-1} \int_0^r \frac{s(t)}{t^{q+1}}\, dt + \varkappa(q+1) r^q \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \geq 0.$$

Daher nimmt die monotone Funktion $K(r)$ nicht ab. Aus der Abschätzung

$$K(r) \geq \varkappa r^{q+1} \int_r^{2r} \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \geq \frac{\varkappa}{q+1}\, s(r) \left\{ 1 - \frac{1}{2^{q+1}} \right\}$$

folgt, daß die Ordnung von $K(r)$ mindestens so groß, wie die von $s(r)$ ist. Sind die beiden Ordnungen sogar gleich, so folgt, daß die Klasse, bzw. der Typ, von $K(r)$ mindestens so groß wie die Klasse, bzw. der Typ von $s(r)$ ist. Dieser Sachverhalt werde kurz mit „Ord, Typ, Klasse $K(r) \geq$ Ord, Typ, Klasse $s(r)$" bezeichnet. Für $q < \lambda < q+1$ folgt umgekehrt Ord, Typ, Klasse $K(r) \leq$ Ord, Typ, Klasse $s(r)$ gemäß [5] Kap. VIII, § 3, S. 216–217. Für $\lambda = q+1$ gehört die Funktion $s(r)$ zur Konvergenzklasse, ist also vom Minimaltyp. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein R, so daß $s(r)\cdot r^{-q-1} < \varepsilon$ für alle $r > R$ ist. Daher gilt:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} K(r)\, r^{-q-1} \leq \overline{\lim_{r\to\infty}} \left\{ \frac{\varkappa}{r} \int_0^R \frac{s(t)}{t^{q+1}}\, dt + \varkappa\varepsilon + \varkappa \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \right\} = \varkappa\varepsilon.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zeigt, daß auch $K(r)$ vom Minimaltyp ist, w. z. b. w.

Hilfssatz 5.

Voraussetzung. *Die ganzzahlige Funktion* $\nu(z) \geq 0$ *verschwinde in jedem Kreis bis auf endlich viele Stellen. Setzt man* $n(r) = \sum_{|z|\leq r} \nu(z) < \infty$, *so existiere für eine ganze Zahl* $q \geq 0$ *das Integral* $\int_0^\infty n(t)\, t^{-q-2}\, dt$.

Behauptung. *Für* $|y| \leq r$ *gilt die Abschätzung*:

$$\sum_{|z|<\infty} \nu(z) \log \left| E\left(\frac{y}{z}, q\right) \right| \leq K(r; n(r)).$$

Zum Beweis siehe für $q \geq 1$ NEVANLINNA [5] Kap. VIII, § 3, S. 215. Für $q=0$ gilt im Kreis $[|y| \leq r]$ die Abschätzung:

$$\sum_{|z|<\infty} \nu(z) \log\left|1-\frac{y}{z}\right| \leq \sum_{|z|<\infty} \nu(z) \log\left(1+\frac{r}{|z|}\right) = \int_0^\infty \log\left(1+\frac{r}{t}\right) dn(t)$$

$$= r\int_0^\infty \frac{n(t)}{\left(1+\frac{r}{t}\right)} \cdot \frac{dt}{t^2} = r\int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t+r)}\, dt$$

$$\leq \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt + r\int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2}\, dt < K(r; n(r)),$$

w. z. b. w.

Jetzt werden die beiden grundlegenden Hilfssätze bewiesen.

Hilfssatz 6.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(\mathfrak{y})$ sei in der „Kugel" $[|\mathfrak{y}|<R \leq \infty]$ regulär und verschwinde in der kleineren Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ mit $r_0 > 0$ nicht.*

Behauptung. *Für $|\mathfrak{y}|<R$ besteht die Abschätzung:*

$$(3.1) \quad \begin{cases} (n-1)\int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log|f(\tau\,\mathfrak{y})|\, d\tau \\ \qquad \leq \frac{1}{V_{2n-1}(1)} \int_{|\mathfrak{a}|=1} \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{a})|\, \partial v_{2n-1}(\mathfrak{a}). \end{cases}$$

In der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ gilt (3.1) mit dem Gleichheitszeichen, und zwar sogar ohne Betragszeichen.

Anmerkung. Nach I Hilfssatz 1 ist

$$(3.2) \quad \frac{1}{V_{2n-1}(1)} \int_{|\mathfrak{a}|=1} \log f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})\, \partial v_{2n-1}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{Q}} \log f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}).$$

Beweis. Der Vektor $\mathfrak{y}$ werde in der Kugel $[|\mathfrak{y}|<R]$ beliebig, aber fest gewählt. Von dem vorgegebenen, normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ kann man zu einem Koordinatensystem $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ übergehen, in dem $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{e}'_n$ gilt, und das wieder normal ist. Daher kann man o. B. d. A. den Vektor $\mathfrak{y}$ in der Gestalt $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{e}_n$ annehmen, wobei $|\mathfrak{y}| = |y| < R$ ist.

Die Existenz des rechten Integrals in (3.1) kann man auf verschiedene Arten beweisen. Sie soll hier gleich mitbewiesen werden. Dazu setzt man

$$(3.3) \quad \lambda_\varrho(\mathfrak{z}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ für } \left|f\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}\,\mathfrak{z}\right)\right| < \varrho \\ 1 \text{ für } \left|f\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}\,\mathfrak{z}\right)\right| \geq \varrho \end{array} \right\} \text{ in } |\mathfrak{z}|<\infty \text{ und } 0<\varrho<1.$$

Für jede komplexe Zahl $x \neq 0$ gilt $\lambda_\varrho(x\,\mathfrak{z}) = \lambda_\varrho(\mathfrak{z})$. Die Funktion

$$\lambda_\varrho(\mathfrak{a}) \log |f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|$$

ist auf der Einheitskugel meßbar und beschränkt. Nach I Hilfssatz 1 gilt:

$$(3.4)\quad \begin{cases} I_\varrho = \dfrac{1}{V_{2n-1}(1)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{a}|=1} \lambda_\varrho(\mathfrak{a}) \log |f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|\, \partial v_{2n-1} \\ \quad = \dfrac{1}{\pi^n} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|<\infty} \lambda_\varrho(\mathfrak{z})\, e^{-|\mathfrak{z}|^2} \log \left| f\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}\,\mathfrak{z}\right)\right| \partial v_{2n}. \end{cases}$$

In das letzte Integral führt man die Substitution

$$z_1 = u\,x_1, \ldots, z_{n-1} = u\,x_{n-1}, z_n = u \quad \text{d.h.} \quad x_1 = \frac{z_1}{z_n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n}, \; u = z_n$$

ein. Dann wird $\partial\mathfrak{z} = \partial(u\,\mathfrak{x} + u\,\mathfrak{e}_n) = \partial u(\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_n) + u\,\partial\mathfrak{x}$. Also gilt:

$$(\partial\mathfrak{z}|\partial\mathfrak{z}) = \partial u\,\partial\bar{u}\,(1 + |\mathfrak{x}|^2) + \bar{u}\,\partial u(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x}) + u\,(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\partial\bar{u} + u\bar{u}(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x}).$$

Da der Vektor $\mathfrak{x}$ nur von $(n-1)$ Veränderlichen abhängt, wird

$$\begin{aligned} \partial v_{2n}(\mathfrak{z}) &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (\partial\mathfrak{z}|\partial\mathfrak{z})^n \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\mu+\nu+\varrho+\sigma=n} (\mu!\,\nu!\,\varrho!\,\sigma!)^{-1} \{\partial u\,\partial\bar{u}\,(1 + |\mathfrak{x}|^2)\}^\mu \times \\ &\quad \times \{\bar{u}\,\partial u(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\}^\nu \{u(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\partial\bar{u}\}^\varrho \{u\bar{u}(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\}^\sigma \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{(n-1)!} (u\bar{u})^{n-1}(1 + |\mathfrak{x}|^2)\,\partial u\,\partial\bar{u}\,(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-1} + \\ &\quad + \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{(n-2)!} (u\bar{u})^{n-1}\,\partial u(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\,(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\partial\bar{u}\,(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-2}. \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\,(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\frac{(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-2}}{(n-2)!} &= -\sum_{\varrho,\sigma=1}^{n-1} \bar{x}_\varrho\, x_\sigma\, \partial x_\varrho\, \partial\bar{x}_\sigma \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial x_1\, \partial\bar{x}_1 \ldots \overset{\mu}{|} \ldots \partial x_{n-1}\, \partial\bar{x}_{n-1} \\ &= -\sum_{\mu=1}^{n-1} x_\mu \bar{x}_\mu\, \partial x_1\, \partial\bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial\bar{x}_{n-1} \\ &= -|\mathfrak{x}|^2 \frac{(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ist, erhält man

$$\partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\,|u|^{2n-2}\,\partial u\,\partial\bar{u}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x}).$$

Der $(2n-4)$ dimensionale, projektive Raum $\mathfrak{P}^{2n-4}$ sei nach I § 3 b auf der Einheitskugel $[|\mathfrak{x}| = 1]$ durch Q^* dargestellt. Weil $(\mathfrak{y}|\mathfrak{z}) = y\,\bar{z}_n = y\,\bar{u}$ und

$\lambda_\varrho(\mathfrak{z}) = \lambda_\varrho(x\,\mathfrak{z})$ für $x \neq 0$ ist, gilt [vgl. (I.3.18), (I.3.19)]:

$$
(3.5)\quad \left\{\begin{aligned}
I_\varrho &= \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{|\mathfrak{x}|<\infty}\left\{\int\limits_{|\mathfrak{u}|<\infty}|\mathfrak{u}|^{2n-2}e^{-|\mathfrak{u}|^2(|\mathfrak{x}|^2+1)}\frac{i}{2}\,\partial\mathfrak{u}\,\partial\bar{\mathfrak{u}}\right\}\times\\
&\quad\times\lambda_\varrho(\mathfrak{x},1)\log\left|f\left(\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\,\mathfrak{x},\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\right)\right|\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x})\\
&= \frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}}\int\limits_{|\mathfrak{x}|<\infty}\frac{1}{(|\mathfrak{x}|^2+1)^n}\,\lambda_\varrho(\mathfrak{x},1)\times\\
&\quad\times\log\left|f\left(\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\,\mathfrak{x},\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\right)\right|\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x})\\
&= \frac{(n-1)!}{\pi^{n-2}}\int\limits_0^\infty\frac{t^{n-2}}{(t+1)^n}\left[\int\limits_{\mathfrak{a}\in Q^*}\times\right.\\
&\quad\left.\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda_\varrho\left(\sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a},1\right)\log\left|f\left(\frac{\sqrt{t}\,e^{i\varphi}y}{t+1}\,\mathfrak{a},\frac{y}{t+1}\right)\right|d\varphi\right\}\partial\omega_{2n-4}\right]dt,
\end{aligned}\right.
$$

wobei im letzten Integral $\mathfrak{x} = \sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}\in Q^*$ gesetzt wurde. Die Funktion $f(0,\ldots,0,x)$ ist im Kreis $[|x|<R]$ analytisch und verschwindet wegen $f(0,\ldots,0)\neq 0$ nicht identisch. Die Funktion $f\left(\frac{\sqrt{t}\,z\,y}{t+1}\,\mathfrak{a},\frac{y}{t+1}\right)$ ist als Funktion der einen Veränderlichen z im Einheitskreis analytisch, und verschwindet bis auf endlich viele Werte t im Nullpunkt der z-Ebene nicht. Daher gilt:

$$
(3.6)\quad \left\{\begin{aligned}
\log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right| &= \log\left|f\left(0,\ldots,0,\frac{y}{t+1}\right)\right|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{\sqrt{t}\,e^{i\varphi}y}{t+1}\,\mathfrak{a},\frac{y}{t+1}\right)\right|d\varphi
\end{aligned}\right.
$$

bis auf endlich viele Werte t. Weil $0\leq\lambda_\varrho\leq 1$ ist, und weil für positive Werte von $\log|f|$ auch $\lambda_\varrho = 1$ ist, ergibt sich

$$
(3.7)\qquad \log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda_\varrho\left(\sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a},1\right)\log\left|f\left(\frac{\sqrt{t}\,e^{i\varphi}y}{t+1}\,\mathfrak{a},\frac{y}{t+1}\right)\right|d\varphi.
$$

Weil $\log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right|$ unabhängig von $\mathfrak{a}$, und weil $W_{2n-4} = \frac{\pi^{n-2}}{(n-2)!}$ ist, erhält man mit (3.5) und (3.7) die Abschätzung

$$
(3.8)\quad \left\{\begin{aligned}
I_\varrho &\geq \frac{(n-1)!}{\pi^{n-2}}\,W_{2n-4}\int\limits_0^\infty\frac{t^{n-2}}{(1+t)^n}\log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right|dt\\
&= (n-1)\int\limits_0^1(1-\tau)^{n-2}\log|f(\tau\,\mathfrak{y})|\,d\tau.
\end{aligned}\right.
$$

Würde die Funktion $f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})$ auf einer Menge von positivem Maß auf der Einheitskugel $[|\mathfrak{a}|=1]$ verschwinden, so würde nach der vorangehenden

Rechnung auch $F(\mathfrak{w}) = f\left(\frac{\sqrt{t}\,y}{t+1}\,\mathfrak{w}, \frac{y}{t+1}\right)$ als Funktion von $\mathfrak{w}$ auf einer Menge von positivem Maß auf der Einheitskugel verschwinden, und dies für eine Menge von Werten t die selbst positives Maß hat. Da die Funktion $F(\mathfrak{w})$ analytisch ist, würde sie identisch für diese Werte t verschwinden. Dann wäre $f\left(0, \ldots, 0, \frac{y}{t+1}\right) = 0$ für mehr als abzählbar viele Werte t, d. h. $f(0, \ldots, 0, x) \equiv 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $f(0, \ldots, 0, 0) \neq 0$ ist. Die Funktion $\log|f(\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|$ ist abgesehen von einer Nullmenge auf der Einheitskugel stetig. Es strebt monoton $\lambda_\varrho(\mathfrak{a}) \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})| \searrow \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|$ für $\varrho \to +0$ fast überall auf der Einheitskugel $[|\mathfrak{a}| = 1]$. Da die Integrale I_ϱ nach unten beschränkt sind, so strebt

$$I_\varrho \to I = \frac{1}{V_{2n-1}(1)} \int_{|\mathfrak{a}|=1} \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{a}) \quad \text{für } \varrho \to +0.$$

Dies ergibt die behauptete Ungleichung (3.1). Wenn jedoch $|\mathfrak{y}| \leq r_0$ ist, so führt man die ganze Rechnung mit $\lambda_\varrho \equiv 1$ durch. Überall gelten die Gleichheitszeichen. Die Rechnung bleibt auch für $\log f$ statt $\log|f|$ richtig, w. z. b. w.

Hilfssatz 7.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(\mathfrak{y})$ sei in der Kugel $|\mathfrak{y}| < R$ analytisch mit $f(0) = 1$. Die Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}$ bezüglich der Funktion f sei $\nu(\mathfrak{z})$. Für $n = 1$ werde $n(r) = \sum_{|\mathfrak{z}| \leq r} \nu(\mathfrak{z})$, für $n > 1$ werde $n(r) = \int_{0\mathfrak{R}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}$ und in beiden Fällen $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$ gesetzt. Für eine beliebige natürliche Zahl $m \geq 2$ sei*

$$F(\mathfrak{y}) = (m-1) \int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log|f(\tau\,\mathfrak{y})|\,d\tau.$$

Weiter werde $M(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{y}| \leq r} |f(\mathfrak{y})|$ und $H(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{y}| \leq r} F(\mathfrak{y})$ abgekürzt.

Behauptung. *Für jede Zahl ϑ und r in $0 < \vartheta < 1$ und $0 < r < R$ gilt:*

$$\log M(\vartheta^3 r) \leq \frac{4}{(1-\vartheta)^{m+2n}} [H(r) + (2m-1)\,n(r) + N(r)], \tag{3.9}$$

$$\log M\left(\frac{r}{4}\right) \leq 8^{m+2n-1} [H(r) + n(r) + N(r)]. \tag{3.10}$$

Beweis. Wenn, im Falle $n = 1$, $g(y) = \prod_{|z| \leq r} \left(1 - \frac{y}{z}\right)^{\nu(z)}$ und $h(y) = f(y)\,g^{-1}(y)$ gesetzt wird, so ist $\log h(y)$ durch $\log h(0) = 0$ eindeutig als analytische Funktion erklärt. Im Kreis $|y| \leq r$ gilt die Abschätzung:

$$\left\{ \begin{aligned} &(m-1) \int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log|h(\tau\,y)|\,d\tau \\ &\qquad \leq H(r) - (m-1) \int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log|g(\tau\,y)|\,d\tau. \end{aligned} \right. \tag{3.11}$$

Mit $x = r/|z|$ und $|y| = r$ erhält man für $m = 2$ die Ungleichung:

$$\begin{aligned}(m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log\left|1-\frac{\tau y}{z}\right| d\tau &\geq \int_0^1 \log|1-\tau x|\, d\tau \\ &\geq \frac{x-1}{x}\{\log|1-x|-1\}-\frac{1}{x} \\ &\geq -\frac{2}{x} \\ &\geq -\frac{2(m-1)}{r}|z|.\end{aligned}$$

Für $m > 2$ erhält man:

$$(3.13)\quad \begin{cases} (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log\left|1-\frac{\tau y}{z}\right| d\tau \geq (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log|1-\tau x|\, d\tau \\ \quad \geq (m-1)(m-2)\cdot\int_0^1 (1-t)^{m-3}\left\{\int_0^t \log|1-\tau x|\, d\tau\right\} dt \\ \quad \geq (m-1)(m-2)\, x^{-1}\int_0^1 (1-t)^{m-3}\{(tx-1)(\log|1-tx|-1)-1\}\, dt \\ \quad \geq (m-1)(m-2)\, x^{-1}\int_0^1 (1-t)^{m-3}(-2)\, dt \\ \quad \geq -\frac{2m-2}{r}|z|. \end{cases}$$

Addition ergibt:

$$(3.14)\quad \begin{cases} -(m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log|g(\tau y)|\, d\tau \\ \quad = -(m-1)\sum_{|z|\leq r} \nu(z)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log\left|1-\tau\frac{\nu}{z}\right| d\tau \\ \quad \leq \frac{2m-2}{r}\sum_{|z|\leq r}\nu(z)\,|z| \\ \quad \leq 2(m-1)\, n(r). \end{cases}$$

Da der Realteil einer analytischen Funktion sein Maximum auf dem Rand annimmt, folgt aus (3.11) und (3.14) die Abschätzung

$$(3.15)\quad \begin{cases} \Re\mathfrak{e}\,\frac{(m-1)!}{y^{m-1}}\int_0^y\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{m-2}} \log h(x_{m-1})\, dx_{m-1}\ldots dx_1 \\ \quad = (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log|h(\tau y)|\, d\tau \\ \quad \leq H(r)+2(m-1)\, n(r). \end{cases}$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 1 an, so gewinnt man wegen $h(0)=1$ in $|y| \leqq \vartheta r < r$ die Ungleichung

$$\left|(m-1)! \int_0^y \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{m-2}} \log h(x_{m-1})\, d x_{m-1} \ldots d x_1\right| \leqq \frac{2(\vartheta r)^{m-1}}{1-\vartheta}\{H(r)+2(m-1)n(r)\}.$$

Für $|y| \leqq \vartheta^2 r$ folgt aus Hilfssatz 2

$$(3.16)\quad \begin{cases} \log|h(y)| \leqq |\log h(y)| \\ \qquad \leqq \dfrac{1}{(1-\vartheta)^m} \dfrac{1}{(\vartheta r)^{m-1}} \dfrac{2(\vartheta r)^{m-1}}{1-\vartheta}\{H(r)+2(m-1)n(r)\} \\ \qquad \leqq \dfrac{2}{(1-\vartheta)^{m+1}}\{H(r)+2(m-1)n(r)\}. \end{cases}$$

Andererseits gilt im Kreis $|y| \leqq \vartheta^2 r$ die Abschätzung

$$(3.17)\quad \begin{cases} \log|g(y)| \leqq \sum\limits_{|z| \leqq r} \nu(z) \log\left(1+\dfrac{r}{|z|}\right) = \displaystyle\int_0^r \log\left(1+\frac{r}{t}\right) d n(t) \\ \qquad = r \displaystyle\int_0^r \frac{n(t)}{t(t+r)}\, d t + n(r)\log 2 \leqq \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, d t + n(r) = N(r)+n(r). \end{cases}$$

Da $f(y)=g(y)\,h(y)$ war, folgt aus (3.16) und (3.17) insgesamt

$$(3.9')\qquad \log|f(y)| \leqq \frac{2}{(1-\vartheta)^{m+1}}\{H(r)+(2m-1)n(r)+N(r)\}$$

für $|y| \leqq \vartheta^2 r$. Dies ist (3.9). Setzt man $\vartheta=\frac{1}{2}$, so folgt leicht (3.10).

Ist $n \geqq 2$, so wendet man (3.9') auf die Funktion $f(y\,\mathfrak{a})$ mit $|\mathfrak{a}|=1$ an, wobei die Funktionen H, n, N von $\mathfrak{a}$ abhängen: $H(r,\mathfrak{a})$, $n(r,\mathfrak{a})$ und $N(r,\mathfrak{a})$. Wegen $n(r)=\dfrac{1}{V_{2n-1}(1)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{a}|=1} n(r,\mathfrak{a})\,\partial v_{2n-1}$, $N(r)=\dfrac{1}{V_{2n-1}(1)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{a}|=1} N(r,\mathfrak{a})\,\partial v_{2n-1}$ und $\log M(\vartheta r) \leqq \dfrac{1+\vartheta}{(1-\vartheta)^{2n-1}} \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{y}|=r} \overset{+}{\log}|f(\mathfrak{y})|\,\partial v_{2n-1}$[7]) folgt aus (3.9') sofort (3.9). Setzt man $\delta=1/\sqrt[3]{4}$, so folgt leicht (3.10), w. z. b. w.

Satz 2. *Eine ganze Funktion f und ihr Betragsmaximum $M(r)=\operatorname{Max}\limits_{|\mathfrak{z}| \leqq r}|f(\mathfrak{z})|$ stimmen in Ordnung, Typ und Klasse überein.*

Beweis. Wählt man $\alpha_1=0, \alpha_2=1$, so folgt aus (1.3) und (1.7)

$$(3.18)\quad \begin{cases} T(r)=m(r,\infty)-m(r_0,\infty) \leqq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \log\sqrt{1+|f|^2}\,\partial v_{2n-1} \\ \qquad \leqq \overset{+}{\log} M(r)+\dfrac{1}{2}\log 2. \end{cases}$$

Eine umgekehrte Abschätzung ist nicht so leicht zu beweisen. Dazu werden die beiden genannten Hilfssätze gebraucht. Ist $m(r,a,\mathfrak{a})$ die Schmiegungs-

[7]) Dies wird genau so wie bei H. KNESER [3] §6 bewiesen.

funktion von $f(z\,\mathfrak{a})$ als Funktion in z, so hat nach H. KNESER [3] § 4 die Funktion f die Schmiegungsfunktion

$$(3.19)\qquad m(r,a)=\frac{1}{V_{2n-1}}\int\limits_{|\mathfrak{a}|=1} m(r,a,\mathfrak{a})\,\partial v_{2n-1}=\frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{a}\in Q} m(r,a,\mathfrak{a})\,\partial\omega_{2n-2}.$$

Für $f(z\,\mathfrak{a})$ gilt in $|z|\leq r<\varrho$ mit $\mathfrak{a}\in Q$ die Abschätzung[8])

$$(3.20)\qquad \log|f(z\,\mathfrak{a})|\leq\frac{\varrho+r}{\varrho-r}\{m(\varrho,\infty,\mathfrak{a})+\log 2\}.$$

Setzt man $z=(\mathfrak{y}|\mathfrak{a})$ und $\varrho=2r$, so gibt die Integration über Q

$$(3.21)\qquad \frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{a}\in Q}\log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|\,\partial\omega_{2n-2}\leq 3\,m(2r,\infty)+3\log 2.$$

Die Hilfssätze 6 und 7 geben die Abschätzung

$$(3.22)\qquad \begin{cases}\log M(r)\leq 8^{3n}\{3\,m(8r,\infty)+3\log 2+N(4r,0)+n(4r,0)\}\\ \qquad\leq 5\cdot 8^{3n}\{T(8e\,r)+m(r_0,\infty)+m(r_0,0)+\log 2\}.\end{cases}$$

Wenn $\log M(r)$ nicht beschränkt ist, so folgt aus (3.18) und (3.22) die Behauptung. Wenn $\log M(r)$ beschränkt ist, so ist sie trivial, w. z. b. w.

§ 4. Ein Analogon zum WEIERSTRASSschen Produktsatz.

Die erste Aufgabe, die in § 1 gestellt wurde, kann jetzt sogar für Nullstellenflächen mit beliebigem Grenzexponenten $\varrho\leq\infty$ gelöst werden.

Satz 3. WEIERSTRASSscher Produktsatz.

Voraussetzung. *Die abgeschlossene Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{R}^{2n}$ habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Für ein $r_0>0$ sei $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer.*

Behauptung.

1. *Es gibt eine Funktion $q(r)$ mit den Eigenschaften*

a) *Es ist $q(r)\geq 0$, nicht abnehmend und ganzzahlig.*

b) *Für jedes feste r existiert das Integral:*

$$(4.1)\qquad \frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})<\infty.$$

2. *Wenn $q(r)$ irgendeine Funktion ist, die die in 1. genannten Eigenschaften besitzt, so gibt es eine ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, und für die in der Kugel $[|\mathfrak{y}|\leq r_0]$ gilt:*

$$(4.2)\qquad \log h(\mathfrak{y})=\frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\,e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q(|\mathfrak{z}|)\right)\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})\ ^{9}).$$

---

[8]) Vergleiche [5] Kap. VIII, § 1, S. 208 und Kap. VI, § 3, Nr. 139, S. 165.

[9]) Die Funktion $e(x,q)$ ist auf S. 212, Gl. (1.8) erklärt.

Beweis. Nach dem zweiten Satz von COUSIN gibt es eine ganze Funktion $f(\mathfrak{z})$, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Sie werde zu $f(0)=1$ normiert und für den gesamten Beweis fest gewählt. Es sei $M(r)=\max_{|\mathfrak{z}|\leqq r}|f(\mathfrak{z})|$. Man definiert die ganze Zahl $q(r)$ eindeutig durch $q(r)\leqq \log M(er)+1<q(r)+1$. Wenn $n(r,a;\mathfrak{a})$ bzw. $N(r,a;\mathfrak{a})$ die Anzahlfunktion von $f(z\,\mathfrak{a})$ ist, so gilt nach der JENSENschen Formel

$$n(r,0;\mathfrak{a})\leqq\int_{r_0}^{er}\frac{n(t,0;\mathfrak{a})}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(er\,e^{i\varphi}\mathfrak{a})|\,d\varphi\leqq\log M(er)<q(r).$$

Die Nullstellen z_ν der Funktion $f(z\,\mathfrak{a})$ mit dem festen Vektor $\mathfrak{a}$ werden monoton angeordnet: $|z_\nu|\leqq|z_{\nu+1}|$. Dabei wird jede Nullstelle so oft gezählt, als ihre Vielfachheit $\nu(z,0;\mathfrak{a})$ angibt. Wählt man $R>R_1\geqq 2r$, so ist

$$\sum_{R_1\leqq|z|\leqq R}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}=\sum_{R_1\leqq|z_\nu|\leqq R}\left(\frac{r}{|z_\nu|}\right)^{q(|z_\nu|)+1}\leqq\frac{r}{R_1}\sum_{R_1\leqq|z_\nu|\leqq R}\left(\frac{1}{2}\right)^{q(|z_\nu|)}$$

$$\leqq\frac{r}{R_1}\sum_{R_1\leqq|z_\nu|\leqq R}\left(\frac{1}{2}\right)^{n(|z_\nu|,0;\mathfrak{a})}\leqq\frac{r}{R_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}=\frac{2r}{R_1}.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}\leqq\frac{2r}{r_0}$ in $\mathfrak{a}\in\overline{Q}$ gleichmäßig. Aus I Satz 9 folgt dann:

$$\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}\partial\omega_{2n-2}=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}\partial\omega_{2n-2}.$$

Es ist $q(r)\geqq 0$, nicht abnehmend und ganzzahlig. Die erste Behauptung ist bewiesen.

2. Die Aussagen 1a und b werden jetzt vorausgesetzt. Dann folgt aus I Satz 9

$$\infty>\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}\partial\omega_{2n-2}$$

$$=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}\partial\omega_{2n-2}.$$

Daher konvergiert die Reihe $\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}$ für fast alle Vektoren $\mathfrak{a}\in Q$ d.h. alle $\mathfrak{a}\in Q-N_r$. Die Nullmengen $N_r\subseteqq N_{r'}$ wachsen monoton mit $r<r'$. Daher ist ihre Vereinigung $N=\bigcup_{r\geqq 0}N_r$ wieder eine Nullmenge. Die Reihe konvergiert für alle r und für alle Vektoren $\mathfrak{a}\in Q-N$. Für diese Vektoren $\mathfrak{a}$ gilt der WEIERSTRASSsche Produktsatz:

$$\log f(x\,\mathfrak{a})=g(x;\mathfrak{a})+\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\log E\left(\frac{x}{z},q(|z|)\right)\tag{4.3}$$

für alle komplexen x. Die Funktion $g(x;\mathfrak{a})$ ist bei festem Vektor $\mathfrak{a}\in Q-N$ ganz in x. Es gilt $g(0;\mathfrak{a})=0$. Der Betrag $|g|$ soll abgeschätzt werden. Zunächst ist

$$\int_0^1 \log\left|E\left(\frac{x\,\tau}{z},q\right)\right| d\tau = \int_0^1 \log\left|1-\frac{x}{z}\,\tau\right| d\tau + \Re\mathfrak{e}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu}$$
$$\geq -2\left|\frac{z}{x}\right| - 1 - \left|\frac{x}{z}\right|^{q}.$$

Da $\log|E(u,q)|\leq\frac{|u|^{q+1}}{1-|u|}$ für $|u|<1$ ist, gilt für $|x|=r$ die Abschätzung

$$\Re\mathfrak{e}\int_0^1 g(\tau\,x;\mathfrak{a})\,d\tau = \int_0^1 \log|f(x\,\tau\,\mathfrak{a})|\,d\tau - \int_0^1\sum_{|z|<\infty}\nu(z)\log\left|E\left(\frac{x\,\tau}{z},q(|z|)\right)\right| d\tau$$
$$\leq \log M(r) + \sum_{|z|<2r}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left\{2\left|\frac{z}{x}\right| + 1 + \left|\frac{x}{z}\right|^{q}\right\} + \sum_{|z|\geq 2r}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left|\frac{x}{z}\right|^{q+1}\frac{1}{1-x/z}$$
$$\leq \log M(r) + \left\{5+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{q(2r)}\right\} n(r,0;\mathfrak{a}) + 2\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left|\frac{r}{z}\right|^{q(|z|)+1} \equiv L(r;\mathfrak{a}).$$

Die Funktion $L(r;\mathfrak{a})$ ist über Q integrierbar. Wendet man Hilfssatz 7 mit $m=2$ und Hilfssatz 1 mit $\vartheta=\frac{1}{2}$ auf $e^{g(y;\mathfrak{a})}$ an, so wird

$$|g(x;\mathfrak{a})|\leq 2^{10}L(8r;\mathfrak{a}) \quad \text{für alle } |x|\leq r,$$

$$|g((\mathfrak{y}|\mathfrak{a});\mathfrak{a})|\leq 2^{10}L(8r;\mathfrak{a}) \quad \text{für alle } |\mathfrak{y}|\leq r \text{ und } \mathfrak{a}\in Q-N. \tag{4.4}$$

Nach (4.4) existiert dann auch das Integral

$$\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q} g((\mathfrak{y}|\mathfrak{a});\mathfrak{a})\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) = H(\mathfrak{y}). \tag{4.5}$$

Weil die Funktion $g((\mathfrak{y}|\mathfrak{a});\mathfrak{a})$ ganz in $\mathfrak{y}$ ist, und nach (4.4) gleichmäßig abgeschätzt wird, ist auch das Integral $H(\mathfrak{y})$ analytisch in der Kugel $[|\mathfrak{y}|<r]$. Da aber r beliebig gewählt war, ist $H(\mathfrak{y})$ sogar eine ganze Funktion.

Da die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ abgeschlossen und $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer ist, gibt es eine Zahl $r_1>r_0$, für die $\mathfrak{N}_{0r_1}$ ebenfalls leer ist. Für $\mathfrak{z}\in\mathfrak{N}$ und $|\mathfrak{y}|\leq r_0$ kann man also

$$\left|\nu(\mathfrak{z})\cdot\log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q(|\mathfrak{z}|)\right)\right| \leq \frac{\nu(\mathfrak{z})}{1-\frac{r_0}{r_1}}\left(\frac{r_0}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1} \tag{4.6}$$

abschätzen. Da das Integral in (4.1) existiert, folgt aus (4.6) und I Satz 9 die Integralumformung

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{a})}{z},q\right)\right\}\partial\omega_{2n-2}\\ &\qquad=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q(|\mathfrak{z}|)\right)\partial\omega_{2n-2}.\end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

In der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ gilt andererseits nach Hilfssatz 6 Anmerkung:

$$\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a} \in Q} \log f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})\,\partial\omega_{2n-2} = (n-1)\int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log f(\tau\,\mathfrak{y})\,d\tau. \tag{4.8}$$

In (4.3) werde $x = (\mathfrak{y}|\mathfrak{a})$ gesetzt und über Q integriert. Mit (4.3), (4.5), (4.7) und (4.8) ergibt sich in der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &(n-1)\int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log f(\tau\,\mathfrak{y})\,d\tau \\ &\qquad = H(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z}) \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}. \end{aligned}\right. \tag{4.9}$$

Es seien r_2 und $\eta > 1$ so gewählt, daß $r_0 < r_2 < r_2\eta < r_1$ gilt. Sind der Vektor $\mathfrak{b}$ in Q, der Vektor $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{R}$ und die Zahl y mit $|y| \leq r_2$ beliebig gewählt, so werde in Hilfssatz 3 b die Zahl $q = q(|\mathfrak{z}|)$ der Vektor $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{b}$ und $c = \frac{(\mathfrak{b}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}$ gesetzt. Wegen $|c\,y| \leq |c|\,r_2 \leq |c|\,r_2\eta \leq |\mathfrak{z}|^{-1} r_2\eta \leq \frac{r_2}{r_1}\eta < 1$ ist

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\nu(\mathfrak{z})\,\frac{1}{\mu!}\,\frac{d^\mu}{dy^\mu}\left\{y^{n-1}\log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right)\right\}\right| \\ &\qquad \leq \frac{\eta^n}{(\eta-1)^{\mu+1}} \cdot \frac{r_2^{n-\mu-1}}{1 - r_2\eta\, r_1^{-1}}\, \nu(\mathfrak{z}) \left(\frac{r_1}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}. \end{aligned}\right. \tag{4.10}$$

Da die rechte Seite nicht vom Vektor $\mathfrak{y}$ abhängt und über die Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ integrierbar ist, kann man (4.9) nach Multiplikation mit $\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$ beliebig oft nach y differenzieren. Wegen

$$\left\{\begin{aligned} &(n-1)\int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log f(\tau\,\mathfrak{y})\,d\tau \\ &\qquad = \frac{(n-1)!}{y^{n-1}} \int_0^y \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-2}} \log f(x_{n-1}\,\mathfrak{b})\,dx_{n-1} \ldots dx_1 \end{aligned}\right. \tag{4.11}$$

erhält man für $|\mathfrak{y}| \leq r_0$ nach $(n-1)$-maliger Differentiation

$$\log f(\mathfrak{y}) = G(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}, \tag{4.12}$$

wobei statt $G(\mathfrak{y})$ zunächst zu schreiben ist:

$$G^*(y;\mathfrak{b}) = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\{y^{n-1} H(y\,\mathfrak{b})\}. \tag{4.13}$$

Die Funktion $G^*(y;\mathfrak{b})$ ist in $|y| < \infty$ und $|\mathfrak{b}| < \infty$ analytisch. Für eine komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ gilt: $G^*(\lambda\,y;\mathfrak{b}) = G^*(y;\lambda\,\mathfrak{b})$. Die Funktion $G(\mathfrak{y}) = G^*(1;\mathfrak{y})$ ist also ganz in $\mathfrak{y}$. Für $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{b}$ gilt $G(y\,\mathfrak{b}) = G^*(y;\mathfrak{b})$. Nach (4.13) und gemäß der Konstruktion von $f(\mathfrak{y})$ erfüllt die Funktion $h(\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{y})\,e^{-G(\mathfrak{y})}$ die Forderungen der zweiten Behauptung, w. z. b. w.

Damit ist die erste Frage von § 1 beantwortet. Wenn insbesondere die ganze, positive, konstante Zahl $q+1$ ein Konvergenzexponent der Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ ist, wenn also das Integral

$$\int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\,|\mathfrak{z}|^{-q-1}\,\partial\omega_{2n-2} \tag{4.14}$$

existiert, so gibt es eine *ganze* Funktion $h(\mathfrak{y})$, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der vorgegebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, und für die

$$\log h(\mathfrak{y}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2} \tag{4.15}$$

in der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ genauer in $\mathfrak{N}$ gilt. Die Funktion $h(\mathfrak{y})$ aus (4.15) heiße *kanonisch*.

§ 5. Die Ordnung einer kanonischen Funktion.

Um eine Aussage über die Ordnung einer kanonischen Funktion machen zu können, ist noch eine Abschätzung nötig.

Satz 4. Abschätzung von $\log|h|$.

Voraussetzung. *Es werden dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3 gemacht. Die Funktion $q(r) = q$ sei konstant und erfülle die Bedingung 1 b) der Behauptung von Satz 3. Durch (4.2) werde die ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$ definiert. Nach Hilfssatz 4 werde die Funktion $K(r) = K(r, n(r, 0))$ gebildet.*

Behauptung. *Für $|\mathfrak{y}| \leq r$, mit beliebigem $r > 0$, gilt die Abschätzung:*

$$\log|h(\mathfrak{y})| \leq 8^{3n}\,[K(4r) + n(4r, 0) + N(4r, 0)]. \tag{5.1}$$

Der Beweis beginnt wie derjenige von Satz 3. Für fast alle Vektoren $\mathfrak{a} \in Q$ gilt für h statt f jetzt

$$\log h(x\,\mathfrak{a}) = g(x;\mathfrak{a}) + \sum_{|z|<\infty} \nu(z, 0;\mathfrak{a}) \log E\left(\frac{x}{z}, q\right), \tag{5.2}$$

wobei wieder $g(x;\mathfrak{a})$ in x ganz ist. Ebenfalls existiert das Integral

$$\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a}\in Q} g\left((\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{a});\mathfrak{a}\right) \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) = H(\mathfrak{y})$$

und ist eine ganze Funktion. Für $|y| \leq r_0$ und $\mathfrak{b} \in Q$ gilt nach (4.9) und (4.11) die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(n-1)!}{y^{n-1}} \int_0^y \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-2}} \log h(x_{n-1}\,\mathfrak{b})\, d\,x_{n-1} \cdots d\,x_1 \\ &\qquad = H(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}. \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

In (4.2) werde $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{b}$ gesetzt und $(n-1)$-mal nach y integriert. Wegen (4.10) kann man rechts die Integrationsreihenfolge vertauschen. Nach (4.8),

(4.2) und Hilfssatz 3c gilt:

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{(n-1)!}{y^{n-1}} \displaystyle\int_0^y \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-2}} \log h(x_{n-1}\mathfrak{b})\, d x_{n-1} \ldots d x_1 \\ \qquad = \dfrac{1}{W_{2n-2}} \displaystyle\int_{\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z}) \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}. \end{cases}$$

Der Vergleich von (5.3) und (5.4) lehrt, daß $H(\mathfrak{y})$ in der Kugel $|\mathfrak{y}| \leq r_0$, also auch für alle $\mathfrak{y}$ identisch verschwindet.

Hilfssatz 5 liefert die Abschätzung

$$(5.5)\qquad \log|h(x\,\mathfrak{a})| \leq \Re e\, g(x;\mathfrak{a}) + K\big(r; n(r,0;\mathfrak{a})\big) \quad \text{für} \quad |x| \leq r.$$

In (5.5) werde $x = (\mathfrak{y}|\mathfrak{a})$ gesetzt und über Q integriert. Wegen

$$n(r,0) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_Q n(r,0;\mathfrak{a})\, \partial\omega_{2n-2}$$

erhält man

$$(5.6)\qquad \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a}\in Q} \log|h\big((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}\big)|\, \partial\omega_{2n-2} \leq \Re e\, H(\mathfrak{y}) + K\big(r; n(r,0)\big) = 0 + K(r).$$

Mit Hilfssatz 6 gewinnt man die Abschätzung

$$(5.7)\qquad (n-1) \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log|h(\tau\,\mathfrak{y})|\, d\tau \leq K(r)$$

für $|\mathfrak{y}| \leq r$ und alle $r > 0$. Wegen $h(0) = 1$ folgt aus (5.7) und Hilfssatz 7 die Behauptung, w. z. b. w.

Satz 5. Zusammenfassung.

Voraussetzung. *Die in $\mathfrak{R}^{2n}$ abgeschlossene Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ und den Grenzexponenten $\varrho < \infty$. Die Zahl $q+1$ sei der kleinste ganze positive Konvergenzexponent. Für einen Radius $r_0 > 0$ sei $\mathfrak{R}_{0r_0}$ leer.*

Behauptung.

1. *Es gibt eine ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$, die durch die beiden folgenden Forderungen* a) *und* b) *eindeutig bestimmt ist:*

a) *Die ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$ verschwindet auf der Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ und nur auf ihr, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$.*

b) *In der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ (genauer in $\mathfrak{R}$) gilt:*

$$(5.8)\qquad \log h(\mathfrak{y}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})\ ^{9}).$$

2. *Ist $\nu(z, 0; \mathfrak{a})$ die Vielfachheit der Nullstelle z der Funktion $h(z\,\mathfrak{a})$, so gilt:*

$$(5.9)\qquad h(y\,\mathfrak{a}) = \lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leq r} E\left(\frac{y}{z}, q\right)^{\nu(z,0;\mathfrak{a})}\ ^{10})$$

---

[10]) Daraus folgt, daß für die Funktion $g(x;\mathfrak{a})$ aus (4.3) und $G(\mathfrak{y})$ aus (4.12) die Gleichung $g(1;\mathfrak{y}) = G(\mathfrak{y})$ besteht.

für alle y und alle $\mathfrak{a} \neq 0$. Ist der Grenzexponent $\varrho < q+1$, so konvergiert das Produkt absolut. Man darf $\lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leq r} = \prod_{|z|<\infty}$ *schreiben.*

3. a) Ord h $=$ Ord $n(r,0) = \varrho =$ *Grenzexponent,*

b) Typ h $=$ Typ $n(r,0)$, *falls* $q < \varrho \leq q+1$ *ist,*

c) Klasse $h =$ Klasse $n(r,0)$, *falls* $q < \varrho < q+1$ *ist.*

Beweis. Die 1. Behauptung wurde schon in Satz 3 bewiesen. Nach dem 1. Hauptsatz ist $T(e\,r) \geq N(e\,r,0) - m(r_0,0) \geq n(r,0) - m(r_0,0)$. Also gilt Ord, Typ, Klasse $h \geq$ Ord, Typ, Klasse $n(r,0)$. Nach Satz 4 ist $\log M(r) \leq 8^{3n}\{K(4r) + n(4r,0) + N(4r,0)\}$. Nach Hilfssatz 4, Satz 1 und Satz 2 wird also

$$\begin{aligned}\text{Ord } T(r) = \text{Ord} \log M(r) &\leq \text{Max}\{\text{Ord } K, \text{Ord } n(r,0), \text{Ord } N(r,0)\}\\ &= \text{Ord } n(r,0) = \varrho.\end{aligned}$$

Falls $q < \varrho \leq q+1$ ist, ergeben dieselben Sätze

$$\begin{aligned}\text{Typ } T(r) = \text{Typ} \log M(r) &\leq \text{Max}\{\text{Typ } K, \text{Typ } n(r,0), \text{Typ } N(r,0)\}\\ &= \text{Typ } n(r,0).\end{aligned}$$

Falls $q < \varrho < q+1$ ist, erhält man dasselbe für die Klasse. Damit ist auch die dritte Behauptung bewiesen.

Für $|\mathfrak{a}| = 1$ werde $M(r;\mathfrak{a}) = \underset{|y|\leq r}{\text{Max}} |h(y\,\mathfrak{a})|$ gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned}\text{Ord, Typ, Klasse } h(y\,\mathfrak{a}) &= \text{Ord, Typ, Klasse} \log M(r;\mathfrak{a})\\ &\leq \text{Ord, Typ, Klasse} \log M(r).\end{aligned}$$

Da die Zahl $q+1$ ein Konvergenzexponent ist, existiert das Integral $\int_{r_0}^{\infty} n(r,0)\, r^{-q-2}\, dr$. Wenn $\varrho = q+1$ ist, so gehört $n(r,0)$, also auch $\log M(r)$ zum Minimaltyp. Wenn auch noch die Charakteristik $T(r;\mathfrak{a})$ von $h(y\,\mathfrak{a})$ die Ordnung $q+1$ hat, so gehört auch $\log M(r;\mathfrak{a})$ zum Minimaltyp. Dasselbe gilt von $T(r;\mathfrak{a})$. Es strebt $T(r;\mathfrak{a})\, r^{-q-1} \to 0$ für $r \to \infty$. Daraus folgt (5.9). Ist die Ordnung von $T(r;\mathfrak{a})$ kleiner als $q+1$, so existiert das Integral $\int_{r_0}^{\infty} T(r;\mathfrak{a})\, r^{-q-2}\, dr$. Daraus folgt (5.9) mit $\lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leq r} = \prod_{|z|<\infty}$. Wenn $\varrho < q+1$ ist, so hat $\log M(r)$, also $\log M(r;\mathfrak{a})$, also $T(r;\mathfrak{a})$ eine Ordnung kleiner als $q+1$. Daraus folgt wieder (5.9) mit $\lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leq r} = \prod_{|z|<\infty}$, w. z. b. w.

Wie bei einer Veränderlichen kann man nun Aussagen über das Geschlecht und die Ordnung meromorpher Funktionen machen. Diese Sätze lassen sich jedoch leicht auch für meromorphe Vektorfunktionen, sog. „meromorphe Flächen", aussprechen, was jetzt geschehen soll. Zunächst müssen diese meromorphen Flächen noch definiert werden.

Der Vektor $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ gehöre zum projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m-2}$. Der Vektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gehöre dem *dualen Raum*[11]) ${}^*\mathfrak{P}^{2m-2}$ an. Die Koordinatensysteme der beiden Räume seien so gekoppelt, daß das *innere Produkt*[11])

$$(5.10) \qquad (\mathfrak{w}, \vec{\alpha}) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu \alpha_\mu$$

invariant gegenüber Koordinatentransformationen ist. Das *skalare Produkt*[11]) wird durch eine positiv definite HERMITEsche Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{m} g_{\mu\nu} w_\mu \overline{w}_\nu$ erklärt:

$$(5.11) \qquad (\mathfrak{w}|\mathfrak{v}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{m} g_{\mu\nu} w_\mu \overline{v}_\nu \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{w}| = \sqrt{(\mathfrak{w}|\mathfrak{w})}.$$

Der Abstand von $\mathfrak{w}$ zur Ebene $\vec{\alpha}$[11]) sei

$$(5.12) \qquad ||\mathfrak{w}, \vec{\alpha}|| = \frac{|(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})|}{|\mathfrak{w}|\,|\vec{\alpha}|}.$$

Eine meromorphe Fläche ist eine meromorphe Abbildung $\mathfrak{W}(P)$ einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m-2}$. Eine Darstellung

$$\mathfrak{w}(P) = \big(w_1(P), \ldots, w_m(P)\big) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\, \mathfrak{e}_\mu$$

braucht nur auf einer offenen Teilmenge $U \subseteqq \mathfrak{M}^{2n}$ erklärt zu sein. Im Durchschnitt der Gültigkeitsbereiche U_1, U_2 zweier Darstellungen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ sei eine meromorphe Funktion $\lambda(P) \not\equiv 0$ erklärt, für die $\mathfrak{w}_1(P) = \lambda(P)\, \mathfrak{w}_2(P)$ in $U_1 \cap U_2$ gilt. Zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^{2n}$ gebe es eine offene Umgebung U und eine Darstellung $\mathfrak{w}$ auf U. Eine Darstellung heiße *meromorph*, bzw. *analytisch*, wenn es die Koordinatenfunktionen $w_\mu(P)$ sind. Sie heiße *reduziert im Punkt* P, wenn die $w_\mu(P)$ in P analytisch sind, und den größten gemeinsamen Teiler 1 haben; sie heiße *in* U *reduziert*, wenn sie in jedem Punkt von U reduziert ist. Ist $U = \mathfrak{M}^{2n}$, so heiße die Darstellung *einheitlich*. Meromorphe, einheitliche Darstellungen gibt es immer, aber nicht immer analytische oder gar reduzierte. Ist $\mathfrak{M}^{2n}$ ein COUSINsches Gebiet zweiter Art, so gibt es immer einheitliche analytische und reduzierte Darstellungen.

Eine meromorphe Funktion f ist ein Spezialfall der meromorphen Flächen, nämlich die Fläche: $\mathfrak{w} = (1, f)$.

Bei Flächen übernimmt die Rolle der a-Stelle die *Schnittstelle mit der Ebene* $\vec{\alpha}$, deren Vielfachheit $\nu(P, \vec{\alpha})$ die Vielfachheit der Nullstelle P von $(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha})$ bei reduzierter Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ ist. Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) = [\nu(P, \vec{\alpha}) > 0]$ heiße die Schnittstellenfläche zur Ebene $\vec{\alpha}$. Dabei werde $(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha}) \not\equiv 0$ für jeden Vektor $\vec{\alpha} \neq 0$ vorausgesetzt. Jetzt sei als Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ der $\mathfrak{z}$-Raum $\mathfrak{R}^{2n}$ gewählt.

---

[11]) Das sind dieselben Bezeichnungen wie bei WEYL [8] Kap. I A. Im übrigen ist ${}^*\mathfrak{P}^{2m-2}$ lediglich ein zweites Exemplar von $\mathfrak{P}^{2m-2}$.

Für meromorphe Flächen kann man auch einen *„ersten Hauptsatz"* beweisen. Wegen Satz 10 aus I kann man die *Anzahlfunktion* $n(r, \vec{\alpha})$ durch

$$(5.13)\quad \begin{cases} n(r,\vec{\alpha}) = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)} \displaystyle\int_{r_0 \mathfrak{N}(\vec{\alpha})}^{r} \nu(\mathfrak{z},\vec{\alpha})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \\ \qquad = \dfrac{1}{W_{2n-2}} \displaystyle\int_{r_0 \mathfrak{N}(\vec{\alpha})}^{r} \nu(\mathfrak{z},\alpha)\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu(0,\vec{\alpha}) \end{cases}$$

definieren. Die *Valenz* (*große Anzahlfunktion*) ist

$$(5.14)\quad N(r,\vec{\alpha}) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t,\vec{\alpha})}{t}\, dt.$$

Die *Schmiegungsfunktion* ist

$$(5.15)\quad m(r,\vec{\alpha}) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \cdot \int_{|\mathfrak{z}|=r} \log \frac{1}{|\mathfrak{w},\vec{\alpha}|}\, \partial v_{2n-1}.$$

Die *Charakteristik* werde durch

$$(5.16)\quad T(r) = N(r,\vec{\alpha}) + m(r,\vec{\alpha}) - m(r_0,\vec{\alpha})$$

definiert. Der *erste Hauptsatz*[12]) besagt, daß sie nicht von der Wahl des dualen Vektors $\vec{\alpha}$ abhängt. Für die *Charakteristik* kann man noch verschiedene *Darstellungen*[12]) geben, z. B.:

$$(5.17)\quad T(r) \leq \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int_{|\mathfrak{z}|=r} \log |\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|\, \partial v_{2n-1} - \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \int_{|\mathfrak{z}|=r_0} \log |\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|\, \partial v_{2n-1},$$

wobei $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ eine einheitliche analytische Darstellung ist. Wenn $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ sogar reduziert ist, so gilt in (5.17) das Gleichheitszeichen für alle r. Setzt man

$$(5.18)\quad \nu = \frac{1}{V_{2m-1}(1)} \int_{|\vec{\alpha}|=1} \nu(0,\vec{\alpha})\, \partial v_{2m-1}(\vec{\alpha}),$$

so ist[12])

$$(5.19)\quad \begin{cases} A(t) = \dfrac{1}{W_2 W_{2n-2}} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|\leq t} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu \\ \qquad = \dfrac{1}{W_2 V_{2n-2}(t)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|\leq t} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}). \end{cases}$$

Dann besitzt die Charakteristik $T(r)$ die Darstellung[12])

$$(5.20)\quad T(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{A(t)}{t}\, dt.$$

[12]) Der Beweis wird in einer späteren Arbeit geführt werden. Er ergibt sich leicht, wenn man nach der Methode von H. KNESER [3] die Sätze von WEYL [8] auf mehrere Veränderliche überträgt.

Der Beweis dieser Sätze (5.16) bis (5.20) würde hier zu weit führen. Er wird unabhängig von den folgenden Sätzen in einer späteren Arbeit erbracht werden. Die folgenden Aussagen sollen dagegen hier bewiesen werden, was analog dem Fall $n=1$ geschehen kann.

Die Charakteristik ist unabhängig von der Wahl der Koordinatensystems $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m$. Also kann man immer ein normales Koordinatensystem wählen: $|\mathfrak{w}|^2 = \sum_{\mu=1}^{m} |w_\mu|^2$. Der Funktion f entspricht die Fläche $(1, f)$, der Funktion f^{-1} die Fläche $(f, 1)$. Also haben f und f^{-1} dieselbe Charakteristik $T(r, f)$. Wenn in den Quotientendarstellungen $f = f_1/f_2$, $g = g_1/g_2$ die ganzen Funktionen f_1, f_2 bzw. g_1, g_2 teilerfremd sind, so schätzt man mittels (5.17) ab:

$$
(5.21)\quad \begin{cases} T(r, f\cdot g) \leq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \frac{1}{2} \log\left(|f_1 g_1|^2 + |f_2 g_2|^2\right) \partial v_{2n-1} + c_1 \text{ [13]} \\ \leq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \left\{ \frac{1}{2} \log\left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right) + \frac{1}{2} \log\left(|g_1|^2 + |g_2|^2\right) \right\} \partial v_{2n-1} + c_1 \\ \leq T(r, f) + T(r, g) + c_2. \end{cases}
$$

Ist $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ eine einheitliche reduzierte Darstellung der meromorphen Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$, und wird $f_{\vec{\alpha}} = (\mathfrak{w}(\mathfrak{z}), \vec{\alpha})$ gesetzt, so gilt für zwei Vektoren $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ vom Betrag 1

$$
(5.22)\quad \begin{cases} \dot{T}(r) + c_3 = \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \log|\mathfrak{w}| \, \partial v_{2n-1} \\ \geq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \frac{1}{2} \log\left\{ |(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})|^2 + |(\mathfrak{w}, \vec{\beta})|^2 \right\} \partial v_{2n-1} - \frac{1}{2} \log 2 \\ \geq T\left(r, \dfrac{f_{\vec{\alpha}}}{f_{\vec{\beta}}}\right) + c_4. \end{cases}
$$

Mit der Abschätzung (5.22), dem in (1.9) und (1.10) erwähnten Satz von H. KNESER [3] (falls im folgenden Satz 6 die Voraussetzung a) gemacht wird) bzw. mit Satz 3 (falls b) vorausgesetzt wird) ergibt sich unmittelbar:

Satz 6. Kanonische Darstellung einer meromorphen Fläche.

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ habe die Charakteristik $T(r)$. Es werde $f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{(\mathfrak{W}(\mathfrak{z}), \vec{\alpha})}{(\mathfrak{W}(\mathfrak{z}), \vec{\beta})}$ gesetzt, und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cup \mathfrak{N}(\vec{\beta})$ sowie $\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}) - \nu(\mathfrak{z}, \vec{\beta})$ abgekürzt. Es sei $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer. Weiter gelte mit einer ganzen Zahl q entweder*

a) $T(r) \cdot r^{-q-1} \to 0$ für $r \to \infty$, *oder*

b) $q+1$ *ist Konvergenzexponent von* $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ *und* $\mathfrak{N}(\vec{\beta})$.

[13] Die Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bedeuten Konstanten.

Behauptung. *Wird nur* b) *vorausgesetzt, so gilt in* $|\mathfrak{y}| \leq r_0$

$$\log f(\mathfrak{y}, \alpha, \vec{\beta}) = g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \int_{\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2} \tag{5.23}$$

mit ganzem $g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$. *Wird nur* a) *vorausgesetzt, so gilt* (5.23) *mit* $\lim_{r\to\infty} \int_{0\mathfrak{R}}^{r}$ *statt* $\int_{\mathfrak{R}}$; *die Funktion* g *ist ein Polynom höchstens* q*-ten Grades.*

Ganz ähnlich lautet

Satz 7. Die Exponentialfaktoren.

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche* $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ *habe die einheitliche reduzierte Darstellung* $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$. *Die Vektoren* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ *seien linear unabhängig. Die Schnittstellenfläche* $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$ *zu* $\vec{\alpha}_\nu$ *habe den kleinsten positiven ganzzahligen Konvergenzexponenten* $q_\nu + 1$. *Für ein* $r_0 > 0$ *seien* $\mathfrak{N}_{0r_0}(\vec{\alpha}_\nu)$ *leer. Die ganze Zahl* σ *sei in* $\max_{\nu=1,\ldots,m} (\operatorname{Ord} T(r), q_\nu) < \sigma + 1 < \infty$ *beliebig gewählt.*

Behauptung. *Für* $|\mathfrak{y}| \leq r_0$ *gilt*

$$\log(\mathfrak{w}(\mathfrak{y}), \vec{\alpha}_\nu) = g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}(\vec{\alpha}_\nu)} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}_\nu)\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q_\nu\right) \partial\omega_{2n-2} \tag{5.24}$$

mit ganzen Funktionen $g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu)$, *deren Differenzen* $G_{\mu\nu} = g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu) - g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\mu)$ *Polynome mit einem Grad* $h_{\mu\nu} \leq \sigma$ *sind.*

Beweis. Aus Satz 3 folgt die Darstellung (5.24). O. B. d. A. sei $|\vec{\alpha}_\nu| = 1$. Setzt man $(\mathfrak{w}(\mathfrak{y}), \vec{\alpha}_\nu)\, e^{-g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu)} = \pi_\nu(\mathfrak{y})$, so ist nach (5.21) und (5.22)

$$\left\{\begin{aligned} T(r, e^{G_{\mu\nu}}) &\leq T\left(r, \frac{(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}_\mu)}{(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}_\nu)}\right) + T(r, \pi_\mu) + T(r, \pi_\nu) + c_5 \\ &\leq T(r) + T(r, \pi_\mu) + T(r, \pi_\nu) + c_6. \end{aligned}\right. \tag{5.25}$$

Da $\operatorname{Ord} T(r) < \sigma + 1$ und nach Satz 5 $\operatorname{Ord} T(r, \pi_\nu) \leq q_\nu + 1 \leq \sigma + 1$ bzw., falls $\operatorname{Ord} T(r, \pi_\nu) = q_\nu + 1$ ist, $\operatorname{Typ} T(r, \pi_\nu) = \operatorname{Typ} n(r, 0, \pi_\nu)$ der Minimaltyp ist, folgt

$$\frac{T(r, e^{G_{\mu\nu}})}{r^{\sigma+1}} \leq \frac{c_6}{r^{\sigma+1}} + \frac{T(r)}{r^{\sigma+1}} + \frac{T(r, \pi_\mu)}{r^{\sigma+1}} + \frac{T(r, \pi_\nu)}{r^{\sigma+1}} \to 0 \quad \text{für } r \to \infty. \tag{5.26}$$

Nach Satz 6 ist $G_{\mu\nu} = \log e^{G_{\mu\nu}}$ ein Polynom höchstens σ-ten Grades, w. z. b. w.

Die Zahl $q = \max_{\mu,\nu,\varrho=1,\ldots,m} (h_{\mu\nu}, q_\varrho)$ heiße das Geschlecht von $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ bezüglich des Koordinatensystemes $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$. Es ist von der Wahl der einheitlichen reduzierten Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ unabhängig.

Satz 8. Geschlecht und Ordnung.

Voraussetzung. *Wie Satz 7. Die Ordnung* λ von $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ *sei positiv.* q *sei das Geschlecht bezüglich des Koordinatensystemes* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \alpha_m$.

Behauptung.

1. $q \leq \operatorname{Ord} T(r) = \lambda \leq q + 1$.

2. *Ist* λ *nicht ganzzahlig, so besitzt jedes Koordinatensystem* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ *dasselbe Geschlecht* q. *Alle Funktionen* $N(r, \vec{\alpha})$ (bzw. $n(r, \vec{\alpha})$) *haben dieselbe*

Ordnung λ wie $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ mit Ausnahme höchstens einer Menge von dualen Vektoren $\vec{\alpha}$, die nicht mehr als $(m-1)$ linear unabhängige Vektoren enthält, die also einen höchstens $(2m-2)$-dimensionalen, linearen Unterraum bilden. Entsprechendes gilt für Klasse und Typ.

3. a) *Dann und nur dann ist $q=\lambda$, wenn eine der Aussagen gilt*

α) *$T(r)$ ist nicht vom Minimaltyp.*

β) *$T(r)$ ist vom Minimaltyp, in der Divergenzklasse und λ Divergenzexponent für wenigstens ein $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$.*

b) *Dann und nur dann ist $q+1=\lambda$, wenn eine der Aussagen gilt*

γ) *$T(r)$ ist vom Minimaltyp, in der Divergenzklasse und λ Konvergenzexponent für alle $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$.*

δ) *$T(r)$ ist in der Konvergenzklasse.*

Diese Aussagen sind wörtlich dieselben wie bei einer Veränderlichen.

Beweis. 1. Setzt man $f_\nu(\mathfrak{z})=(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}),\vec{\alpha}_\nu)=\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{\nu\mu}w_\mu$, so kann man eindeutig auflösen: $w_\mu(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=1}^{m}\beta_{\mu\nu}f_\nu(\mathfrak{z})$. Folglich gilt

$$|\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}g_{\mu\nu}w_\mu\overline{w}_\nu\leq c_7\sum_{\mu=1}^{m}|w_\mu|^2\leq c_8\sum_{\mu=1}^{m}|f_\mu(\mathfrak{z})|^2.$$

Die Konstanten c_7 und c_8 hängen nur von $g_{\mu\nu}$ und $\vec{\alpha}_\nu$ ab. Mit den Bezeichnungen der Sätze 6 und 7 gilt

$$\begin{aligned}T(r)&=\frac{1}{\nu_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\log|e^{-g(\mathfrak{z},\vec{\alpha}_\nu)}\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|\,\partial v_{2n-1}+c_9\\&\leq\frac{1}{\nu_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\frac{1}{2}\log\sum_{\mu=1}^{m}|e^{-g(\mathfrak{z},\vec{\alpha}_\nu)}f_\mu|^2\,\partial v_{2n-1}+c_{10}\\&\leq\frac{1}{\nu_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\left\{\frac{1}{2}\log\sum_{\mu=1}^{m}|e^{G_{\nu\mu}}|^2+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\log(1+|\pi_\mu|^2)\right\}\partial v_{2n-1}+c_{11},\end{aligned}$$

$$T(r)\leq c_{12}r^q+\sum_{\mu=1}^{m}T(r,\pi_\mu)+c_{13}. \tag{5.27}$$

Da die Ordnung von $T(r,\pi_\mu)$ gleich dem Grenzexponenten von $\mathfrak{N}(\alpha_\mu)$ also höchstens gleich $q_\mu+1$ ist, folgt $\lambda=\operatorname{Ord}T(r)\leq q+1$. Ist $\lambda<q+1$, so existiert $\int_{r_0}^{\infty}T(r)\,r^{-\lambda-\varepsilon-1}\,dr$, also $\int_{r_0}^{\infty}N(r,\vec{\alpha}_\nu)\,r^{-\lambda-\varepsilon-1}\,dr$ für alle ν und jedes $\varepsilon>0$, d.h. $\lambda+\varepsilon$ ist Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$. Man erhält $q_\nu\leq\lambda+\varepsilon$ d.h. $q_\nu\leq[\lambda]=\sigma$. Deswegen und wegen $\lambda<\sigma+1$ folgt aus Satz 7 $h_{\mu\nu}\leq\sigma$. Insgesamt ergibt sich $q\leq\sigma=[\lambda]\leq\lambda$.

2. Aus Satz 2, dem ersten Hauptsatz, Satz 5 und (5.27) folgt für $q<\lambda<q+1$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ord}n(r,\vec{\alpha}_\nu)=\operatorname{Ord}N(r,\vec{\alpha}_\nu)&\leq\operatorname{Ord}T(r)=\operatorname{Ord}\left(T(r)-c_{12}r^q\right)\\&\leq\operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,m}\operatorname{Ord}T(r,\pi_\nu)\leq\operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,m}\operatorname{Ord}N(r,\vec{\alpha}_\nu)=\operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,m}\operatorname{Ord}n(r,\vec{\alpha}_\nu).\end{aligned}$$

Für wenigstens ein ν gilt die Gleichheit. Da die $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ beliebig gewählt sind, gibt es unter den Vektoren $\vec{\alpha}$ mit $\operatorname{Ord} n(r, \vec{\alpha}) = \operatorname{Ord} N(r, \vec{\alpha}) < \operatorname{Ord} T(r)$ höchstens $m-1$ linear unabhängige. Entsprechend schließt man für Klasse und Typ.

3. α) Ein ganzzahliges λ hat den Wert q oder $q+1$. Da $q+1$ Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$ ist, streben alle $\frac{n(r, \vec{\alpha}_\nu)}{r^{q+1}} \to 0$ also nach Satz 5 auch alle $\frac{T(r, \pi_\nu)}{r^{q+1}} \to 0$ für $r \to \infty$. Nach (5.27) gehört dann $T(r)$ im Falle $\lambda = q+1$ zum Minimaltyp. α) ist bewiesen.

β) Es ist $\lambda \geqq q \geqq q_\nu$. Ist λ Divergenzexponent eines $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$, so gilt $\lambda = q_\nu$. β) ist bewiesen.

γ) Ist λ Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$, so strebt $n(r, \vec{\alpha}_\nu)\, r^{-\lambda} \to 0$, also nach Satz 5 auch $T(r, \pi_\nu)\, r^{-\lambda} \to 0$ für $r \to \infty$. Ist $T(r)$ noch vom Minimaltyp, so gilt nach (5.25)

$$\frac{T(r, e^{G_{\mu\nu}})}{r^\lambda} \leqq \frac{T(r)}{r^\lambda} + \frac{T(r, \pi_\nu)}{r^\lambda} + \frac{T(r, \pi_\mu)}{r^\lambda} + \frac{c_6}{r^\lambda} \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Daher ist $h_{\mu\nu} \leqq \lambda - 1$. Für den Konvergenzexponenten λ gilt aber auch $q_\nu \leqq \lambda - 1$. Insgesamt folgt $q = \operatorname{Max}(h_{\mu\nu}, q_\nu) \leqq \lambda - 1 \leqq q$. γ) ist bewiesen.

δ) Liegt $T(r)$ in der Konvergenzklasse, so ist $T(r)$ vom Minimaltyp und λ ist nach dem ersten Hauptsatz und Satz 2 Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$. δ) ist bewiesen, w. z. b. w.

Literatur.

[1] Ahlfors, L.: The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. Fennicae nova, Ser. A **3**, 31 (1941). — [2] Kneser, H.: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. Sonderausgabe a. d. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **31**, 19 (1936). — [3] Kneser, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsch. Math.-Ver. **48**, 1—28 (1938). — [4] Landau, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916. — [5] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. 1936. — [6] Weyl, H., and J. Weyl: Meromorphic curves. Ann. of Math. (2) **39**, 516—538 (1938). — [7] Weyl, J.: Analytic curves. Ann. of Math. (2) **42**, 371—408 (1941). — [8] Weyl, H., and J. Weyl: Meromorphic functions and analytic curves. Princeton university press 1943. (Annals of mathematics studies.)

Tübingen, Ebertstr. 8.

(Eingegangen am 9. Juni 1952.)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 238—240 (1953)

Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten.

Von

MARTIN KNESER.

Über die Möglichkeit, ein vorgegebenes Polynom in endlich vielen Schritten in Primfaktoren zu zerlegen, ist seit KRONECKER[1]) folgendes bekannt. Es gibt ein Verfahren, um jedes Polynom $f(t)$ aus dem Polynomring $K[t]$ in Primfaktoren zu zerlegen, falls der Grundkörper K eine der folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) K ist Primkörper, oder

(2) $K = k(a)$, in k gibt es ein solches Verfahren und

a) a ist transzendent über k, oder

b) a ist Nullstelle eines gegebenen separablen Polynoms $f(t) \in k[t]$.

Im folgenden wird an einem Beispiel gezeigt, daß diese Aussage falsch wird, wenn man die Bedingung (2b) abschwächt zu

c) a ist Nullstelle eines (möglicherweise inseparablen) Polynoms $f(t) \in k[t]$.

Als zweites wird das Beispiel zeigen, daß es über Körpern k der Charakteristik $\chi(k) \neq 0$ kein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür gebe.n kann, daß eine Algebra halbeinfach ist, wie dies für $\chi(k) = 0$ das Nichtverschwinden der Diskriminante ist (s. [1] Kap. III § 5, IV §§ 2, 3).

Die Konstruktion des Beispiels ist ähnlich wie in einer Note von V. D. WAERDEN [5], in der gezeigt wird, daß es kein für alle explizit bekannten Körper gültiges Irreduzibilitätskriterium, also erst recht kein Verfahren zur Primpolynomzerlegung geben kann. Dabei heißt ein Körper explizit bekannt, wenn seine Elemente Symbole aus einem abzählbaren Vorrat sind und sich die vier Rechenoperationen in endlich vielen Schritten ausführen lassen. Man überlegt sich leicht, daß alle im folgenden auftretenden Körper explizit bekannt sind. Wie in [5] sei $E(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n, von der für jedes feste n in endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob sie richtig oder falsch ist. Zu jeder solchen Aussage konstruieren wir einen Körper k, eine endliche inseparable Erweiterung K/k und ein Polynom $f(t) \in K[t]$, so daß in k die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten möglich ist, die Reduzibilität von $f(t)$ aber gleichbedeutend ist mit der Aussage: „Es gibt ein n mit der Eigenschaft $E(n)$." Ein Verfahren zur Primpolynomzerlegung unter der Voraussetzung 2c) würde also ein Verfahren zur

[1]) Literaturverzeichnis [3] § 4 oder [4] § 37.

Beantwortung der Frage: „Gibt es ein n mit der Eigenschaft $E(n)$?" liefern, und das ist bei Zugrundelegung einer genauen Definition des Begriffes „Verfahren" nicht möglich (s. [2] und die dort angegebene Literatur).

Es sei jetzt P der Primkörper der Charakteristik $p \neq 0$ und $k_0 = P(x, y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den beiden Unbestimmten x und y. Bezeichnen wir mit $u_0 = x, u_1, u_2, \ldots$ die sämtlichen Elemente von k_0 in irgendeiner festen Reihenfolge, so gibt es unter den Unterkörpern $k_0(\sqrt[p]{u_n})$ von $k_0(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y})$ unendlich viele verschiedene; streichen wir daher aus der Reihe der u_n diejenigen, für die entweder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0$ oder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0(\sqrt[p]{u_m})$ mit $m < n$ ist, so bleibt eine unendliche Reihe $v_0 = x, v_1, v_2, \ldots$ übrig mit der Eigenschaft, daß für jedes n entweder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0$ oder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0(\sqrt[p]{v_m})$ für genau ein $m = \varphi(n)$ ist. Wir setzen jetzt induktiv mit $k_0 = P(x, y)$ beginnend

$$k_n = \begin{cases} k_{n-1}(\sqrt[p]{v_n}), & \text{wenn } n \text{ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft } E(n) \text{ ist,} \\ k_{n-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

In $k = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n$ ist dann die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten möglich. Ist nämlich $f(t) \in k[t]$, so liegen die Koeffizienten von $f(t)^p$ in $k_0 = P(x, y)$. Die Primfaktorzerlegung $f(t)^p = g(t)\, h(t) \ldots$ von $f(t)^p$ in $k_0[t]$ läßt sich daher nach (1) und (2a) ausführen. Wenn wir nun die Primpolynome $g(t), h(t), \ldots$ aus $k_0[t]$ in $k[t]$ zerlegen können, so erhalten wir die Primfaktorzerlegung von $f(t)^p$ und damit auch von $f(t)$ in $k[t]$. Um das zu erreichen nehmen wir einmal an, es sei $g(t) = g_1(t)\, g_2(t) \ldots$ mit Primpolynomen $g_i(t) \in k[t]$; dann folgt $g(t)^p = g_1(t)^p\, g_2(t)^p \ldots$ und da $g_1(t)^p$ in $k_0[t]$ liegt und $g(t)$ in $k_0[t]$ irreduzibel ist, muß $g(t)$ ein Teiler von $g_1(t)^p$ sein, also $g(t) = g_1(t)$ oder $g(t) = g_1(t)^p$. Eine Zerlegung der zweiten Art ist nun genau dann möglich, wenn $g(t)$ ein Polynom in t^p ist, dessen Koeffizienten p-te Potenzen in k sind. Es bleibt also für endlich viele Werte n zu untersuchen, ob die Gleichung $z^p = u_n$ in k eine Lösung besitzt. Dazu muß sie entweder eine Lösung in $k_0 = P(x, y)$ haben — ob das der Fall ist, läßt sich nach (1) und (2a) entscheiden — oder es muß $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0(\sqrt[p]{v_m})$ in k liegen, und das trifft genau dann zu, wenn m die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $E(m)$ ist; ob das der Fall ist, läßt sich aber auf Grund der Voraussetzung über die Eigenschaft E in endlich vielen Schritten feststellen.

Auf Grund der Konstruktion von k ist entweder $k = k_0$ oder $k = k_0(\sqrt[p]{v_n})$ mit $n > 0$; in jedem Fall ist $\sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{v_0}$ nicht in k enthalten; also ist $K = k(\sqrt[n]{x})$ eine inseparable Erweiterung von k und es gilt

$$K = \begin{cases} k_0(\sqrt[p]{v_n}, \sqrt[p]{x}) = k_0(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y}), & \text{wenn es ein } n \text{ mit der Eigenschaft } E(n) \text{ gibt,} \\ k_0(\sqrt[p]{x}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Polynom $t^p - y$ ist also genau dann in K reduzibel, wenn es ein n gibt, für das die Aussage $E(n)$ richtig ist; andererseits erfüllt K/k die Bedingung (2c), womit gezeigt ist, daß (2b) nicht durch (2c) ersetzt werden kann.

Betrachten wir jetzt den Restklassenring $R = K[t]/(t^p - y)$, so zeigt sich, daß R genau dann halbeinfach ist, wenn $t^p - y$ in K irreduzibel ist, wenn es also kein n mit der Eigenschaft $E(n)$ gibt. Damit ist auch gezeigt, daß es über Körpern der Charakteristik $p \neq 0$ kein allgemeines Halbeinfachheitskriterium geben kann.

Literatur.

[1] DEURING, M.: Algebren. In Ergebnisse der Mathematik, Bd. 4, H. 1. 1935. — [2] KLEENE, S. C.: Recursive Predicates and Quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 41—73 (1943). — [3] KRONECKER, L.: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. J. angew. Math. **92**, 1—122 (1882). — [4] WAERDEN, B. L. V. D.: Moderne Algebra, 1. Aufl., Bd. 1. Springer 1930. — [5] WAERDEN, B. L. V. D.: Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102**, 738—739 (1930).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Juli 1952.)

LORENZEN, P.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 241—243 (1953)

Eine Bemerkung über die Abzählbarkeitsvoraussetzung in der Algebra.

Von
PAUL LORENZEN.

§ 1. Ob eine Möglichkeit besteht, über den Unterschied zwischen „endlich" und „unendlich" hinaus noch innerhalb des Unendlichen weitere Unterschiede zu machen, etwa zwischen „abzählbar" und „überabzählbar" oder gar zwischen $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \ldots$ das ist eine Frage, die sicherlich nicht zur Algebra gehört. Sie verlangt zu ihrer Beantwortung eine Klärung des Begriffes „Menge", gehört also zu den Grundlagenfragen der Analysis.

Auf Grund der von der Analysis übernommenen *Meinung* von der Existenz verschiedener Unendlich ist es in der Algebra üblich geworden, zumindest zwischen „abzählbar" und „überabzählbar" zu unterscheiden. Da man allerdings dort, wo angeblich keine Abzählung möglich ist, das Auswahlprinzip — indem man es als Axiom bezeichnet, glaubt man sich der Verpflichtung enthoben, es zu begründen — anwendet, lassen sich die Beweise für den „abzählbaren" Fall meist ohne weiteres auf den „überabzählbaren" Fall übertragen. Läßt man die Abzählbarkeitsvoraussetzung fort, so erfordert das meist nur eine einfache Modifikation. Mit dem sog. ZORNschen Lemma ist zudem die Technik dieser Modifikation so bequem geworden, daß die Abzählbarkeitsvoraussetzung oft nur um der einfacheren und anschaulicheren Formulierbarkeit des algebraischen Problems gemacht wird.

Es gibt wohl nur wenige Fälle, in denen diese Patentlösung des Auswahl-„axioms" versagt. In der Theorie der abelschen Gruppen z.B. liegt jedoch sogar der Fall vor, daß eine gewisse algebraische Eigenschaft zwar allen „abzählbaren" Gruppen zukommt, gleichzeitig aber an einem Beispiel einer „überabzählbaren" Gruppe bewiesen werden kann, daß nicht allen Gruppen diese Eigenschaft zukommt. Es handelt sich dabei um die direkte Zerlegbarkeit in zyklische Summanden der primären abelschen Gruppen, deren sämtliche Elemente endliche Ordnung und endliche Höhe haben. Der Satz, daß für alle abzählbaren Gruppen diese Zerlegbarkeit gilt, ist von H. PRÜFER [1] bewiesen worden. Andererseits hat H. ULM [2] — nach dem Vorgange von PRÜFER — für jede Primzahl p eine „überabzählbare" abelsche Gruppe G_p konstruiert, deren sämtliche Elemente endliche p-Potenzen als Ordnungen haben und endliche Höhe haben (d.h. für kein Element x von G_p sind die Gleichungen $p^k x' = x$ für jedes k nach x' auflösbar); G_p hat außerdem die Eigenschaft, daß die Faktorgruppe $G_p/p\,G_p$ eine abzählbare Vertretermenge in G_p hat. Mit der CANTORschen Mengenlehre (in naiver oder axiomatischer Form) schließt man jetzt folgendermaßen auf die Unzerlegbarkeit von G_p in direkte zyklische Summanden:

(1) Jede direkte Zerlegung von G_p in zyklische Summanden hat „überabzählbar" viele Summanden, weil bei abzählbar vielen Summanden auch G_p abzählbar wäre.

(2) Jede direkte Zerlegung von G_p in zyklische Summanden hat abzählbar viele Summanden, weil bei „überabzählbar" vielen Summanden auch jede Vertretermenge von $G_p/p\,G_p$ „überabzählbar" wäre.

In § 2 wird die Gruppe G_p mit den Mitteln der konstruktiven Mathematik [3] dargestellt. Es zeigt sich dabei, daß G_p „hyperabzählbar" ist, d.h. daß eine Abzählung zwar möglich ist, aber erst mit einer Hyperaussage (aus einer Hyperschicht). $G_p/p\,G_p$ hat dagegen auch hier eine Vertretermenge, die „abzählbar" ist, d.h. mit einer Aussage (aus einer Schicht endlicher Höhe) abzählbar ist. Ersetzt man nun in (1) und (2) das Wort „überabzählbar" durch „hyperabzählbar", so bleibt zwar (1) gültig, (2) dagegen wird ungültig. Es gibt nämlich eine *Hyperfolge*

$$Z^* = Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$$

derart, daß G_p direkte Summe der zyklischen Gruppen $Z^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist, und gleichzeitig gibt es eine *Folge* $x^* = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, derart, daß $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$ Vertretermenge von $G_p/p\,G_p$ ist. Hieraus ergibt sich kein Widerspruch mehr, weil die Zuordnung, die dem erzeugenden Element $z^{(k)}$ aus $Z^{(k)}$ seinen Vertreter $x^{(l^{(k)})}$ zuordnet, nicht durch eine Aussage definierbar zu sein braucht — diese Zuordnung ist hier nur durch eine Hyperaussage definierbar. Wäre diese Zuordnung durch eine Aussage definierbar, dann wäre Z^* eine Folge — nur soweit bleibt (2) gültig und ist daher in unserem Falle nicht anwendbar.

Diese Untersuchung zeigt also, daß die Unzerlegbarkeit von G_p nur dann besteht, wenn man die sprachlichen Mittel (die Hyperaussagen) mit denen sich G_p abzählen läßt, nicht zur Anwendung bringt. Eine solche freiwillige Beschränkung der sprachlichen Mittel hat nun zwar für die Analysis ihre Berechtigung (ohne diese Beschränkung wäre die Gültigkeit des Vollständigkeitsprinzips für die reellen Zahlen nicht zu erreichen), für die Algebra erscheint sie jedoch völlig willkürlich. Die Algebra geht axiomatisch von einer „Menge" mit gegebenen Relationen und Verknüpfungen aus — von den Mitteln, mit denen die Elemente der Menge konstruierbar sind, ist dabei gar keine Rede. Da nun aber zu jeder Konstruktion von Elementen auch eine „Sprache" existiert, in der alle konstruierbaren Elemente abzählbar sind, so ist für die Algebra die Benutzung dieser Sprache augenscheinlich am zweckmäßigsten. Sie hat zumindest den Vorteil, daß alle diejenigen algebraischen Probleme, die man bisher „nur mit Abzählbarkeitsvoraussetzung" lösen konnte, sofort ohne Einschränkung allgemein gelöst sind. Die „überabzählbaren" algebraischen Probleme erweisen sich also als Scheinprobleme. Daß dadurch die Algebra in ihrer Problematik verarmen wird, ist nicht zu befürchten, es werden vielmehr nur die wirklichen Probleme deutlicher hervortreten.

§ 2. Wir betrachten Folgen $a = a^* = a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$, deren Glieder $a^{(k)}$ aus der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ genommen sind, so daß unendlich viele Glieder $\neq 0$ sind. Die Hypermenge M aller dieser Folgen ist hyperabzählbar:

$M = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Eine Untermenge von M heißt unabhängig, wenn für jedes System $a_{l_1}, \ldots, a_{l_n}$ aus N und für jedes System $g_1, \ldots, g_n$ ganz-rationaler Zahlen $\not\equiv 0, \ldots, 0 \pmod{p}$ stets $g_1 a_{l_1} + \cdots + g_n a_{l_n} \pmod{p}$ zu M gehört. Mit der Hyperabzählung von M ist sofort eine maximale unabhängige Unterhypermenge N_0 von M zu konstruieren. N_0 kann keine Menge sein, weil sonst auch M eine Menge wäre. Für die Elemente der Hypermenge N_0 werde b als Variable gebraucht: $b = b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots$. Die Paare $x_{b,k} = (b, k)$ aus Elementen b von N_0 und natürlichen Zahlen $k \in \{1, 2, \ldots\}$ einschließlich der Paare $x_{0,k} = (0, k)$ werden jetzt zur Erzeugung einer abelschen Gruppe G_p mit den Relationen

$$[1] \qquad p^l x_{0,l} = 0$$

$$[2] \qquad p\, x_{b,1} = 0$$

$$[3] \qquad p\, x_{b,l+1} = x_{b,l} - b^{(l)} x_{0,l}$$

benutzt. Für die Gruppe G_p, die aus den endlichen Summen der Form

$$\sum_l g_l x_{0,l} + \sum_{k,l} g_{k,l} x_{b_k,l}$$

besteht, läßt sich wörtlich wie bei ULM [2] beweisen, daß alle Elemente von G_p endliche Ordnung (p-Potenz) und endliche Höhe haben. Weiter enthält die aus

$$\{x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots\}$$

erzeugte Gruppe ersichtlich eine Vertretermenge für $G_p/p\,G_p$. Also ist G_p nur hyperabzählbar und $G_p/p\,G_p$ hat eine abzählbare Vertretermenge

$$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}.$$

Konstruiert man mit einer Hyperabzählung von G_p nun eine Hyperfolge $Z^* = Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ direkter zyklischer Summanden mit $G_p = \sum Z^*$ — auf die Durchführung dieser Konstruktion kommt es hier nicht an — dann sind die Vertreter $x^{(l^{(k)})}$ der erzeugenden Elemente $z^{(k)}$ von $Z^{(k)}$ alle in der abzählbaren Menge $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$ enthalten. Während aber in der CANTORschen Mengenlehre keine „überabzählbare" Menge durch eine umkehrbare Abbildung in eine „abzählbare" Menge abgebildet werden kann, folgt hier aus der Tatsache, daß ein Teil einer abzählbaren Menge umkehrbar auf eine hyperabzählbare Hypermenge abgebildet ist, kein Widerspruch. Wie jede Hypermenge von natürlichen Zahlen zeigt, kann ja sogar ein Teil einer abzählbaren Menge selbst hyperabzählbar sein.

Literatur.

[1] PRÜFER, H.: Math. Z. **17** (1923). — [2] ULM, H.: Math. Z. **40**, 205 (1936). — [3] LORENZEN, P.: Math. Z. **53**, 162 (1950); **54**, 1 (1951).

Bonn, Luisenstraße 3.

(Eingegangen am 18. Juli 1952.)

LEICHTWEISS, K.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 244—264 (1953)

Natürliche Gleichungen einer Fläche.

Von
KURT LEICHTWEISS.

§1. Einleitung.

Bekanntlich ist eine Kurve in der Ebene durch ihre „natürliche Gleichung" $\varkappa = \varkappa(s)$ ($\varkappa$ = Krümmung, s = Bogenlänge) sowie durch das zu $s = 0$ gehörende Linienelement eindeutig bestimmt. Es stellt sich nun das Problem, auf ähnliche Weise auch eine Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum zu charakterisieren. Versuche in dieser Richtung sind schon verschiedentlich unternommen worden[1],[2],[3], insbesondere bewies RELLICH, daß sowohl die Gleichung: Mittlere Krümmung = vorgeschriebene Funktion geeignet normierter isothermer Parameter, als auch die Gleichung: GAUSSsche Krümmung = vorgeschriebene Funktion geeignet normierter Asymptotenlinienparameter als ein gewisses Analogon der natürlichen Gleichung einer Kurve in der Ebene angesehen werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird nun zunächst dieses Resultat RELLICHs folgendermaßen verallgemeinert: Es ist im allgemeinen möglich, auf einer analytischen Fläche lokal in eindeutiger Weise solche Parameter (p, q) einzuführen, daß die erste bzw. die zweite bzw. die dritte Grundform dieser Fläche die isotherme Form $D(dp^2 + dq^2)$ annimmt und irgendeine analytisch auf dieser Fläche gelegene Kurve C (mit der Bogenlänge s) durch die Gleichung $p = s$, $q = 0$ dargestellt wird (Lemma); die so festgelegten speziellen Flächenparameter sollen normiert isotherm bzw. normiert affin-isotherm bzw. normiert sphärisch-isotherm genannt werden. Dann ist diese Fläche, von Ausnahmefällen abgesehen, in der Umgebung des Punkts $p = q = 0$ durch eine linear gebrochene Funktion der mittleren Krümmung H und der GAUSSschen Krümmung K als Funktion der (normierten isothermen bzw. normierten affin-isothermen bzw. normierten sphärisch-isothermen) Parameter (p, q) sowie durch den durch C gehenden Flächenstreifen eindeutig bestimmt, wobei diese Funktion wie auch der Streifen beliebig analytisch vorgegeben werden können (Sätze 1, 2, 3). Hieraus ergibt sich, daß durch einen analytischen Streifen im allgemeinen genau eine analytische Fläche geht, bei welcher eine linear gebrochene Funktion von H und K konstant ist (Korollar zu Satz 1).

Diese Sätze lassen sich genau so aussprechen, wenn allgemeinere Krümmungsfunktionen Φ der Fläche wie etwa eine ihrer Hauptkrümmungen zur

[1]) SCHEFFERS, G.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Bd. II, S. 341—354. 1902.

[2]) GRÜNBAUM, S.: Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien. Comm. Math. Helv. **11**, 336—361 (1939).

[3]) RELLICH, F.: Die Bestimmung einer Fläche durch ihre GAUSSsche Krümmung. Math. Z. **43**, 618—627 (1938).

Bildung einer natürlichen Gleichung von ihr zugrunde gelegt werden. Für die hierbei zulässigen Funktionen Φ werden gewisse Bedingungen angegeben.

Die Vorgabe von Φ als Funktion der normierten isothermen bzw. normierten affin-isothermen bzw. normierten sphärisch-isothermen Parameter erweist sich weiterhin in bezug auf die Charakterisierung einer Fläche im Raum als äquivalent mit der Vorgabe von Φ als Funktion allgemeiner Parameter (u, v) und der Vorgabe der von SCHERRER[4]) zu demselben Zweck benutzten, aus der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Grundform $A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$ hergeleiteten relativen ersten bzw. relativen zweiten bzw. relativen dritten Grundform $\frac{A}{\sqrt[+]{|Q|}}du^2 + \frac{2B}{\sqrt[+]{|Q|}}du\,dv + \frac{C}{\sqrt[+]{|Q|}}dv^2$ $(Q = AC - B^2)$. Diese Tatsache führt in Verbindung der vorhin angeführten Sätze zu einer Verallgemeinerung entsprechender Sätze SCHERRERs (Satz 4), woraus speziell die Unabhängigkeit zwischen K oder H und der relativen ersten Grundform im Gegensatz zur bekannten Abhängigkeit zwischen diesen Größen und der ersten Grundform folgt (Korollar zu Satz 4).

Mit der zum Beweis von Satz 1, Satz 2 und Satz 3 angewandten Methode läßt sich übrigens der Satz von DARBOUX über die Realisierung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit analytischer RIEMANNscher Metrik im dreidimensionalen Raum in einfacher Weise beweisen. Eine Darstellung dieses Beweises ist in § 7 angefügt.

§ 2. Einführung spezieller Flächenparameter.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{x}(u, v)$ eine im Punkt $u = v = 0$ analytische Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die Komponenten x_i $(i = 1, 2, 3)$ von $\mathfrak{x}$ seien also Potenzreihen in u und v, welche der Bedingung $\mathfrak{x}_u(0, 0) \times \mathfrak{x}_v(0, 0) \neq 0$ genügen. Weiter soll $A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2$ der Ausdruck einer für alle Parametersysteme der Fläche definierten und gegen (differenzierbare) Parametertransformationen invarianten Differentialform in den Parametern (u, v) sein. Die Koeffizienten $A(u, v)$, $B(u, v)$, $C(u, v)$ seien ebenfalls im Punkt $u = v = 0$ analytisch, und es gelte $Q(0, 0) = (AC - B^2)(0, 0) \neq 0$. Schließlich setzen wir voraus, daß auf $\mathfrak{x}(u, v)$ eine durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ definierte Kurve C in analytischer Weise gelegen sei, d. h. C besitze die Parameterdarstellung $u = u(t)$, $v = v(t)$, wobei $u(t)$ und $v(t)$ in $t = 0$ analytische Funktionen mit $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $(u'(0))^2 + (v'(0))^2 \neq 0$ sind. Dabei werde zusätzlich noch der Fall $A(0, 0)\,(u'(0))^2 + 2B(0, 0)\,u'(0)\,v'(0) + C(0, 0)\,(v'(0))^2 = 0$ ausgeschlossen. Dann gilt das für unsere folgenden Betrachtungen grundlegende

Lemma: *Die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ besitzt in der Umgebung ihres Punktes $\mathfrak{x}(0, 0)$ ein und nur ein Parametersystem (p, q), welches den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p, q)$ ist in $p = q = 0$ analytisch.*

2. *Unsere quadratische Differentialform besitzt im Parametersystem (p, q) die spezielle Gestalt $D(p, q)\,(dp^2 + \varepsilon\,dq^2)$ $(\varepsilon = \operatorname{sign} Q(0, 0))$.*

[4]) SCHERRER, W.: Stützfunktion und Radius I. Comm. Math. Helv. **22**, 366—381 (1947), Stützfunktion und Radius II. Comm. Math. Helv. **25**, 11—25 (1951).

3. *Die Kurve C wird im Parametersystem (p, q) durch $p(t) = s(t) = \int_0^t \sqrt{\xi_t^2}\, dt$, $q(t) = 0$ dargestellt, d.h. p mißt auf C die vom Punkt $\mathfrak{x}(0, 0)$ aus in Richtung wachsender Parameter t gerechnete Bogenlänge s.*

Beweis. Da es, wie leicht ersichtlich, sicher eine im Flächenpunkt $u = v = 0$ analytische Parametertransformation $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ gibt, nach deren Ausführung die Kurve C in einer gewissen Umgebung dieses Nullpunkts durch $\bar{u}(t) = s(t)$, $\bar{v}(t) = 0$ dargestellt wird, so wird die Existenz des gesuchten Parametersystems (p, q) erwiesen sein, wenn wir folgendes gezeigt haben: Es gibt eine im Nullpunkt $\bar{u} = \bar{v} = 0$ analytische Parametertransformation $p = p(\bar{u}, \bar{v})$, $q = q(\bar{u}, \bar{v})$ mit $p(\bar{u}, 0) = \bar{u}$, $q(\bar{u}, 0) = 0$, welche so beschaffen ist, daß sie die quadratische Differentialform $A(u, v)\, du^2 + 2B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, dv^2 = \bar{A}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}^2 + 2\bar{B}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v} + \bar{C}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2$ in die spezielle Form

$$D(p, q)\,(dp^2 + \varepsilon\, dq^2)$$

überführt. Dazu integrieren wir zunächst die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} - \dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right)_{\bar{u}} + \left(-\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} + \dfrac{\bar{A}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right)_{\bar{v}} = 0 \\ \text{oder} \\ p_{\bar{v}\bar{v}} = \dfrac{\sqrt{|\bar{Q}|}}{\bar{A}}\, \Psi\left(\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}},\ \dfrac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}},\ \left(\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\right)_{\bar{u}},\ \left(\dfrac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\right)_{\bar{u}},\ \left(\dfrac{\bar{A}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\right)_{\bar{v}},\ \left(\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\right)_{\bar{v}};\right. \\ \qquad\qquad \left. p_{\bar{u}},\ p_{\bar{v}},\ p_{\bar{u}\bar{u}},\ p_{\bar{u}\bar{v}}\right) \end{cases}$$

(Ψ ist ganz rational in allen seinen Argumenten!)

in der Umgebung des Nullpunkts unter den Anfangsbedingungen $p(\bar{u}, 0) = \bar{u}$ und $p_{\bar{v}}(\bar{u}, 0) = \dfrac{\bar{B}(\bar{u}, 0)}{\bar{A}(\bar{u}, 0)}$, was nach einem Satz von S. KOWALEWSKI[5]) wegen der Analytizität von $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ sowie wegen

$$\bar{A}(0, 0) = \frac{A(0, 0)\,(u'(0))^2 + 2B(0, 0)\,u'(0)\,v'(0) + C(0, 0)\,(v'(0))^2}{(\bar{u}'(0))^2} \neq 0;$$

$$\bar{Q}(0, 0) = Q(0, 0)\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(0, 0)\right)^2 \neq 0$$

stets analytisch in eindeutiger Weise möglich ist. Dann bilden wir mit der so gewonnenen Funktion $p(\bar{u}, \bar{v})$ die Funktion:

$$q(\bar{u}, \bar{v}) = \varepsilon \cdot \eta \int_0^{(\bar{u}, \bar{v})} \left(\frac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} - \frac{\bar{A}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right) d\bar{u} + \left(\frac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} - \frac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right) d\bar{v}$$

$$(\eta = \operatorname{sign} \bar{A}(0, 0)),$$

welche wegen (1) eindeutig definiert ist. Auf diese Art haben wir in $p(\bar{u}, \bar{v})$ und $q(\bar{u}, \bar{v})$ zwei im Nullpunkt analytische Funktionen gewonnen, welche dem

[5]) Siehe z. B. GOURSAT, E.: Cours d'Analyse **2**, 633 (1911).

Gleichungssystem

$$(2)\qquad \begin{cases} q_{\bar u} = \varepsilon\,\eta\left(\dfrac{\bar B}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar u} - \dfrac{\bar A}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar v}\right) \\ q_{\bar v} = \varepsilon\,\eta\left(\dfrac{\bar C}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar u} - \dfrac{\bar B}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar v}\right) \end{cases}$$

bzw. dessen Umkehrung

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{\bar u} = \eta\left(-\dfrac{\bar B}{\sqrt{|\bar Q|}}\,q_{\bar u} + \dfrac{\bar A}{\sqrt{|\bar Q|}}\,q_{\bar v}\right) \\ p_{\bar v} = \eta\left(-\dfrac{\bar C}{\sqrt{|\bar Q|}}\,q_{\bar u} + \dfrac{\bar B}{\sqrt{|\bar Q|}}\,q_{\bar v}\right) \end{cases}$$

genügen. Hieraus folgt nun zunächst $q(0,0)=0$ und $q_{\bar u}(\bar u, 0)=0$, d.h. $q(\bar u, 0)=0$, sowie natürlich $p(\bar u, 0)=\bar u$. Wegen $\dfrac{\partial(p,q)}{\partial(\bar u,\bar v)}(0,0) = \eta\,\dfrac{\sqrt{|\bar Q|}\,(0,0)}{\bar A\,(0,0)} > 0$ wird also durch $p=p(\bar u,\bar v)$, $q=q(\bar u,\bar v)$ eine im Nullpunkt analytische Parametertransformation definiert, welche außerdem die Eigenschaft hat, daß sie unsere quadratische Differentialform $\bar A(\bar u,\bar v)\,d\bar u^2 + 2\bar B(\bar u,\bar v)\,d\bar u\,d\bar v + \bar C(\bar u,\bar v)\,d\bar v^2$ in die spezielle Form $D(p,q)\,(dp^2+\varepsilon\,dq^2)$ bringt. Es ist nämlich in der Tat:

$$D(dp^2+\varepsilon\,dq^2) = D\left[(p_{\bar u}^2+\varepsilon\,q_{\bar u}^2)\,d\bar u^2 + 2\,(p_{\bar u}\,p_{\bar v}+\varepsilon\,q_{\bar u}\,q_{\bar v})\,d\bar u\,d\bar v + (p_{\bar v}^2+\varepsilon\,q_{\bar v}^2)\,d\bar v^2\right]$$

(nach Einsetzung von (2))

$$= D\,\frac{\bar A\,p_{\bar v}^2 - 2\bar B\,p_{\bar u}\,p_{\bar v} + \bar C\,p_{\bar u}^2}{\bar Q}\,(\bar A\,d\bar u^2 + 2\bar B\,d\bar u\,d\bar v + \bar C\,d\bar v^2)$$

$$= \bar A\,d\bar u^2 + 2\bar B\,d\bar u\,d\bar v + \bar C\,d\bar v^2, \quad \text{wenn wir}$$

$$D = \frac{\bar Q}{\bar A\,p_{\bar v}^2 - 2\bar B\,p_{\bar u}\,p_{\bar v} + \bar C\,p_{\bar u}^2} \quad \text{setzen}^{6}).$$

Wir nehmen nun an, es gebe zwei verschiedene Parametersysteme (p,q) und $(\bar p,\bar q)$ unserer verlangten Art. Jetzt folgt aus $\mathfrak{n}(0,0) = \sigma\left(\mathfrak{x}_u(0,0)\times\mathfrak{x}_v(0,0)\right) = \tau\left(\mathfrak{x}_p(0,0)\times\mathfrak{x}_q(0,0)\right)$ ($\mathfrak{n}$ ist der Normalenvektor der Fläche, $\sigma>0$, $\tau>0$) oder $\sigma\,\dfrac{\partial(x_i,x_k)}{\partial(u,v)}(0,0) = \tau\,\dfrac{\partial(x_i,x_k)}{\partial(p,q)}(0,0)$ $(i,k=1,2,3)$, daß für ein Komponentenpaar x_{i_1}, x_{i_2} von $\mathfrak{x}$ die Funktionaldeterminanten $\dfrac{\partial(x_{i_1},x_{i_2})}{\partial(u,v)}(0,0)$ und $\dfrac{\partial(x_{i_1},x_{i_2})}{\partial(p,q)}(0,0)$ gleichzeitig von Null verschieden sind. Somit können wir wegen der Analytizität von $\mathfrak{x}(u,v)$ und $\mathfrak{x}(p,q)$ im Nullpunkt die Größen x_{i_1} und x_{i_2} aus den Gleichungssystemen $\begin{matrix} x_{i_1}=x_{i_1}(u,v) \\ x_{i_2}=x_{i_2}(u,v) \end{matrix}$ und $\begin{matrix} x_{i_1}=x_{i_1}(p,q) \\ x_{i_2}=x_{i_2}(p,q) \end{matrix}$ eliminieren. Hieraus ergibt sich, daß die Beziehung zwischen den Parametersystemen (u,v) und (p,q) durch im Nullpunkt analytische Funktionen $p=p(u,v)$, $q=q(u,v)$ mit $\dfrac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)}(0,0)>0$ vermittelt wird. Dasselbe gilt ebenso für die

[6]) Denn $\bar A\,(0,0)\,(p_{\bar v}\,(0,0))^2 - 2\bar B\,(0,0)\,p_{\bar u}\,(0,0)\,p_{\bar v}\,(0,0) + \bar C\,(0,0)\,(p_{\bar u}\,(0,0))^2 = \dfrac{\bar Q\,(0,0)}{\bar A\,(0,0)} \neq 0.$

Parametersysteme (u, v) und $(\bar{p}, \bar{q})$. Aus der Invarianz unserer quadratischen Differentialform gegen die Parametertransformation $p = p(u, v)$, $q = q(u, v)$ folgt nun $\varepsilon D(0,0)^2 = Q(0,0)\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}(0,0)\right)^2 \neq 0$, d.h. $D(0,0) \neq 0$ und genau so $\bar{D}(0,0) \neq 0$. Weiter führt die nach Voraussetzung für die im Nullpunkt analytischen Funktionen $\bar{p}(p,q) = \bar{p}(u(p,q), v(p,q))$, $\bar{q}(p,q) = \bar{q}(u(p,q), v(p,q))$ geltende Beziehung $D(p,q)(dp^2 + \varepsilon dq^2) = \bar{D}(\bar{p},\bar{q})(d\bar{p}^2 + \varepsilon d\bar{q}^2)$ aus diesem Grunde zu den beiden in der Umgebung von $p = q = 0$ gültigen Gleichungen:

$$\bar{p}_p^2 + \varepsilon \bar{q}_p^2 = \varepsilon(\bar{p}_q^2 + \varepsilon \bar{q}_q^2) \tag{4}$$

und

$$\bar{p}_p \bar{p}_q = -\varepsilon \bar{q}_p \bar{q}_q. \tag{5}$$

Multiplizieren wir jetzt (4) mit $\bar{p}_p^2$, und setzen wir dann darin die quadrierte Gl. (5) ein, so erhalten wir: $(\bar{p}_p^2 - \bar{q}_q^2)(\bar{p}_p^2 + \varepsilon \bar{q}_p^2) = 0$. Daraus ergibt sich unter Beachtung der ebenfalls nach Voraussetzung gültigen Beziehungen

$$\bar{p}(p,0) = p, \qquad \bar{q}(p,0) = 0, \tag{6}$$

d.h. $\bar{p}_p(0,0) = 1$, $\bar{q}_p(0,0) = 0$, sowie unter Beachtung von $\frac{\partial(\bar{p},\bar{q})}{\partial(p,q)}(0,0) > 0$:

$$\bar{q}_q(p,q) = \bar{p}_p(p,q), \tag{7}$$

was wegen (5)

$$\bar{p}_q(p,q) = -\varepsilon \bar{q}_p(p,q) \tag{8}$$

zur Folge hat. Da nun aber die Funktionen $\bar{p}(p,q)$ und $\bar{q}(p,q)$ genau wie die Funktionen $h_1(p,q) = p$ und $h_2(p,q) = q$ den Differentialgleichungen (7) und (8) mit den Anfangsbedingungen (6) genügen, so können wir nach dem schon einmal angewandten Satz von KOWALEWSKI auf die Gültigkeit der Beziehungen $\bar{p}(p,q) = p$, $\bar{q}(p,q) = q$ schließen, womit auch die Einzigkeit eines unseren drei Bedingungen genügenden Parametersystems bewiesen ist.

Wenden wir nun unser Lemma auf den speziellen Fall an, daß die auf der Fläche definierte quadratische Differentialform gerade die erste bzw. dritte bzw. zweite Grundform der Fläche ist, so ergibt sich folgendes: Es ist stets auf genau eine Art möglich, auf einer lokal analytischen Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ lokal analytische Parameter (p,q) einzuführen, in welchen die erste bzw. dritte bzw. zweite Grundform dieser Fläche die isotherme Form annimmt und eine beliebig in analytischer Weise auf $\mathfrak{x}(u,v)$ liegende Kurve C durch $p = s$, $q = 0$ dargestellt wird. Dabei muß jedoch im Falle der dritten Grundform wegen $eg - f^2 = K^2(EG - F^2)$ ($K(u,v)$ ist die GAUSSsche Krümmung von $\mathfrak{x}(u,v)$) zusätzlich $K(0,0) \neq 0$ und im Falle der zweiten Grundform wegen $LN - M^2 = K(EG - F^2)$ und $L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 = -b(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2)$ [b ist die Normalkrümmung des durch $u = u(t)$, $v = v(t)$ auf $\mathfrak{x}(u,v)$ gegebenen Streifens] zusätzlich $K(0,0) \neq 0$ und $b(0) \neq 0$ vorausgesetzt werden[7]). Wir werden die so definierten Flächenparameter künftighin „auf C bezogene"

[7]) Die Bezeichnung der drei Grundformen einer Fläche ist dieselbe wie diejenige in W. BLASCHKE, Differentialgeometrie, 3. Aufl., Bd. I, S. 88. 1930.

oder kurz „normierte" isotherme bzw. sphärisch-isotherme bzw. affin-isotherme Parameter nennen und sie zur Bildung von natürlichen Gleichungen der Fläche benutzen.

§ 3. Natürliche Gleichungen einer Fläche in normierten isothermen Parametern.

Wir verstehen in Analogie zur Theorie der Kurven in der Ebene unter dem Begriff einer natürlichen Gleichung einer Fläche eine solche Beziehung zwischen einer auf der Fläche definierten Krümmungsfunktion Φ und speziell auf der Fläche gewählten Parametern (p, q), so daß diese Fläche dadurch und durch einen auf ihr liegenden Streifen Γ eindeutig charakterisiert wird. Dann zeigt der folgende Satz, daß bei der Bildung von natürlichen Gleichungen einer analytischen Fläche unter Zugrundelegung normierter[8]) isothermer Parameter an die Stelle der Krümmung $\varkappa$ bei Kurven in der Ebene eine linear gebrochene Funktion der mittleren Krümmung H und der GAUSSschen Krümmung K als Krümmungsfunktion Φ treten kann:

Satz 1. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ ($s =$ Bogenlänge) gegebener, in $s = 0$ analytischer Streifen (d.h. ein Streifen, bei dem diese Funktionen in $s = 0$ analytisch sind) und $f(p, q)$ irgendeine in $p = q = 0$ analytische Funktion, so gibt es in der Umgebung von $p = q = 0$, von Ausnahmefällen abgesehen, eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p, q)$ ist in $p = q = 0$ analytisch.*
2. *Die Fläche geht für $p = s$, $q = 0$ durch den Streifen Γ.*
3. *(p, q) sind isotherme Parameter der Fläche.*
4. $\dfrac{2l_1 H(p,q) + l_2 K(p,q) + l_3}{2m_1 H(p,q) + m_2 K(p,q) + m_3} = f(p, q)$ *$\left((l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3$ sind konstant, der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ ist $2\right)$.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz durch Zurückführung auf das von BONNET gelöste Problem der Bestimmung einer Fläche durch ihre erste und zweite Grundform. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst die Bedingungen 1. bis 4. in den Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform von $\mathfrak{x}(p, q)$ ausdrücken. Dies liefert uns die folgenden Beziehungen:

1. Die Funktionen $E(p, q)$, $F(p, q)$, $G(p, q)$ und $L(p, q)$, $M(p, q)$, $N(p, q)$ sind in $p = q = 0$ analytisch.

2. Der durch $p = s$, $q = 0$ gegebene Flächenstreifen $\{\mathfrak{x}(s, 0), \mathfrak{n}(s, 0)\}$ ist mit Γ identisch, die Invarianten a, b, c von Γ[9]) stimmen also mit den entsprechenden Invarianten dieses Flächenstreifens überein. Daraus folgt unter

[8]) Wir müssen, um von einer eindeutig definierten natürlichen Gleichung einer Fläche reden zu können, natürlich verlangen, daß die Parameter durch die Fläche und den auf ihr liegenden Streifen eindeutig bestimmt sind. Dies ist nach unserem Lemma nur für normierte isotherme, nicht aber für beliebige isotherme Parameter der Fall.

[9]) Die Bezeichnung der Streifeninvarianten stammt aus BLASCHKE, a. a. O.[7]), S. 68.

Berücksichtigung der Ableitungsgleichungen von $\mathfrak{x}(p, q)$:

$$a(p) = \frac{1}{E}(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}_p)|_{q=0} = \frac{EM - FL}{EW}\Big|_{q=0}$$

$$b(p) = \frac{1}{E}\mathfrak{x}_p \mathfrak{n}_p|_{q=0} = -\frac{L}{E}\Big|_{q=0} \qquad (W = \sqrt{EG - F^2})$$

$$c(p) = \frac{1}{\sqrt{E^3}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_{pp})|_{q=0} = \frac{2EF_p - FE_p - EE_q}{2\sqrt{E^3 \cdot W}}\Big|_{q=0}$$

mit $E(p, 0) = 1$.

3. $G = E$, $F = 0$ und

4. $$\frac{l_1(EN - 2FM + GL) + l_2(LN - M^2) + l_3(EG - F^2)}{m_1(EN - 2FM + GL) + m_2(LN - M^2) + m_3(EG - F^2)} = f.$$

Nach Vereinfachung dieser Gleichungen mit Hilfe der Beziehungen $F(p, q) = 0$, $G(p, q) = E(p, q)$ und $E(p, 0) = 1$ ergibt sich:

(9) $$E(p, 0) = 1,\ E_q(p, 0) = -2c(p),\ L(p, 0) = -b(p),\ M(p, 0) = a(p)$$

und

(10) $$\frac{l_1 E(L + N) + l_2(LN - M^2) + l_3 E^2}{m_1 E(L + N) + m_2(LN - M^2) + m_3 E^2} = f.$$

Dazu kommen nun außerdem die Integrabilitätsbedingungen für die Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform, welche in den isothermen Parametern (p, q) die spezielle Gestalt

(11) $$\begin{cases} -E\left((\log E)_{pp} + (\log E)_{qq}\right) = 2(LN - M^2) & \text{(Theorema egregium)} \\ 2E(L_q - M_p) = E_q(L + N) & \text{(Gleichungen} \\ 2E(M_q - N_p) = -E_p(L + N) & \text{von MAINARDI-CODAZZI)} \end{cases}$$

annehmen.

Um jetzt die Existenz einer unsere vier Postulate erfüllenden Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$ nachzuweisen, müssen wir zuerst die zu dieser Fläche gehörenden Funktionen $E(p, q)$, $L(p, q)$, $M(p, q)$ und $N(p, q)$ aus (9), (10) und (11) bestimmen. Dazu lösen wir die Gl. (10) nach N auf und setzen das Resultat $N = \frac{\varphi_1(f, E, L, M)}{\varphi_2(f, E, L)}$ (φ_1 ist ganz rational in f, E, L, M; $\varphi_2 = (l_1 - m_1 f)E + (l_2 - m_2 f)L$) in (11) ein. Wir erhalten so für die Unbekannten E, L, M das Gleichungssystem:

(12) $$\begin{cases} E_{qq} = \frac{E_p^2}{E} + \frac{E_q^2}{E} - E_{pp} + 2(M^2 - LN) = \frac{1}{E \cdot \varphi_2}\Psi_1(f, E, E_p, E_q, E_{pp}, L, M) \\ L_q = \frac{E_q}{2E}(L + N) + M_p = \frac{1}{E \cdot \varphi_2}\Psi_2(f, E, E_q, L, M, M_p) \\ M_q = -\frac{E_p}{2E}(L + N) + N_p \\ \quad = \frac{1}{E(\varphi_2)^2}\Psi_3(f, f_p, E, E_p, L, L_p, M, M_p), \end{cases}$$

wobei die Funktionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 alle in ihren sämtlichen Argumenten ganz rational sind. Dieses System zusammen mit den Anfangsbedingungen (9) ist aber, von dem Ausnahmefall $\varphi_2(f(0, 0), E(0, 0), L(0, 0)) = 0$ abgesehen, nach

dem Satz von KOWALEWSKI wegen der Analytizität von $f(p, q)$ und von $a(p), b(p), c(p)$ in $p = q = 0$ in der Umgebung dieses Punktes eindeutig in analytischer Weise lösbar. Wir kennen somit die Funktionen $E(p, q)$, $L(p, q)$ und $M(p, q)$ und können jetzt die übrigen Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform der gesuchten Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, nämlich die Funktionen $F(p, q)$, $G(p, q)$ und $N(p, q)$, mittels der Beziehungen $F = 0$, $G = E$ und $N = \frac{\varphi_1(f, E, L, M)}{\varphi_2(f, E, L)}$ berechnen. $\mathfrak{x}(p, q)$ bestimmt sich dann nach dem Satz von BONNET[10]) als diejenige Fläche, welche die Differentialformen $E(dp^2 + dq^2)$ und $L\,dp^2 + 2M\,dp\,dq + N\,dq^2$ zur ersten und zweiten Grundform hat und welche durch eine geeignete Bewegung in eine Lage im Raum gebracht worden ist, die durch die Bedingungen $\mathfrak{x}(0, 0) = \mathfrak{x}(0)$, $\mathfrak{x}_p(0, 0) = \mathfrak{x}_p(0)$, $\mathfrak{n}(0, 0) = \mathfrak{n}(0)$ eindeutig festgelegt ist. Diese Fläche erfüllt nun in der Tat unsere vier Postulate, wie man folgendermaßen sieht:

Zunächst gelten für die Vektoren $\mathfrak{x}_p(p, 0)$, $\mathfrak{x}_q(p, 0)$, $\mathfrak{n}(p, 0)$ die Ableitungsgleichungen und die Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_p}{\partial p} = \Gamma_{11}^1(p, 0)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{11}^2(p, 0)\,\mathfrak{x}_q + L(p, 0)\,\mathfrak{n}\ ^{11}) \qquad \mathfrak{x}_p(p, 0)|_{p=0} = \mathfrak{x}_p(0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_q}{\partial p} = \Gamma_{12}^1(p, 0)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{12}^2(p, 0)\,\mathfrak{x}_q + M(p, 0)\,\mathfrak{n} \qquad \mathfrak{x}_q(p, 0)|_{p=0} = \mathfrak{x}_q(0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p} = -\frac{L}{E}(p, 0)\,\mathfrak{x}_p - \frac{M}{E}(p, 0)\,\mathfrak{x}_q \qquad \mathfrak{n}(p, 0)|_{p=0} = \mathfrak{n}(0, 0),$$

und für die Vektoren $\mathfrak{x}_p(p, q)$, $\mathfrak{x}_q(p, q)$, $\mathfrak{n}(p, q)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_p}{\partial q} = \Gamma_{12}^1(p, q)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{12}^2(p, q)\,\mathfrak{x}_q + M(p, q)\,\mathfrak{n} \qquad \mathfrak{x}_p(p, q)|_{q=0} = \mathfrak{x}_p(p, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_q}{\partial q} = \Gamma_{22}^1(p, q)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{22}^2(p, q)\,\mathfrak{x}_q + N(p, q)\,\mathfrak{n} \qquad \mathfrak{x}_q(p, q)|_{q=0} = \mathfrak{x}_q(p, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial q} = -\frac{M}{E}(p, q)\,\mathfrak{x}_p - \frac{N}{E}(p, q)\,\mathfrak{x}_q \qquad \mathfrak{n}(p, q)|_{q=0} = \mathfrak{n}(p, 0).$$

Daraus folgt dann wegen der sich aus der Definition von $E(p, q)$, $L(p, q)$, $M(p, q)$, $N(p, q)$ ergebenden Analytizität dieser Funktionen in $p = q = 0$ nach zweimaliger Anwendung des Satzes von KOWALEWSKI die Analytizität von $\mathfrak{x}_p(p, q)$, $\mathfrak{x}_q(p, q)$, $\mathfrak{n}(p, q)$ im Nullpunkt und damit auch die Analytizität von $\mathfrak{x}(p, q) = \mathfrak{x}(0, 0) + \int_{\mathfrak{0}}^{(p, q)} (\mathfrak{x}_p\,dp + \mathfrak{x}_q\,dq)$ in diesem Punkt. Weiter stimmen der Flächenstreifen $\{\mathfrak{x}(p, 0), \mathfrak{n}(p, 0)\}$ und der Streifen $\Gamma = \{\mathfrak{x}(p), \mathfrak{n}(p)\}$ sowohl in ihren Invarianten für alle Werte von $p = s$ als auch in ihren Begleitvektoren $\mathfrak{x}(p, 0)$; $\mathfrak{x}_p(p, 0)$, $\mathfrak{x}_q(p, 0)$, $\mathfrak{n}(p, 0)$ und $\mathfrak{x}(p)$, $\mathfrak{x}_p(p)$, $(\mathfrak{n}(p) \times \mathfrak{x}_p(p))$, $\mathfrak{n}(p)$ für $p = 0$ überein, sie sind also identisch, d.h. $\mathfrak{x}(p, q)$ geht für $p = s$, $q = 0$ durch Γ. Da nun unsere Fläche auch offensichtlich den Postulaten 3. und 4. genügt, so ist der Existenzbeweis hiermit erbracht. Man sieht schließlich leicht ein,

[10]) Siehe z. B. BIANCHI, L.: Lehrbuch der Differentialgeometrie, 8. Aufl., S. 92. 1899.

[11]) Mit Γ_{kl}^i sind hier die CHRISTOFFEL-Symbole zweiter Art bezeichnet.

daß $\mathfrak{x}(p, q)$ auch die einzige Fläche ist, die alle Forderungen von Satz 1 erfüllt, w. z. b. w.

Aus diesem Beweis ergibt sich, daß als Ausnahmefall im Sinne unseres Satzes gerade der Fall anzusehen ist, wo der sich nach Auflösung der Gleichung $\frac{2l_1H + l_2K + l_3}{2m_1H + m_2K + m_3} = f$ nach N ergebende Nenner im Nullpunkt verschwindet; eine Tatsache, welche mit dem Bestehen der Relation

$$(l_1 - m_1 f(0,0)) - b(0)\,(l_2 - m_2 f(0,0)) = 0$$

zwischen den vorgegebenen Größen b und f gleichwertig ist (wir mußten nämlich diesen Fall ausschließen, um den Satz von KOWALEWSKI anwenden zu können!). Es fragt sich nun, was kann in einem solchen Ausnahmefall passieren?

Nehmen wir einmal an, es gehe eine den Forderungen von Satz 1 genügende Fläche durch einen Streifen, der die Ausnahmerelation

$$(13) \qquad (l_1 - m_1 f(0,0)) - b(0)\,(l_2 - m_2 f(0,0)) = 0$$

erfüllt. Die Hauptkrümmungen $r_1(0,0)$ und $r_2(0,0)$ im Nullpunkt dieser Fläche sind dann ein Lösungssystem ihrer natürlichen Gleichung im Nullpunkt

$$\frac{2l_1H(0,0) + l_2K(0,0) + l_3}{2m_1H(0,0) + m_2K(0,0) + m_3} = f(0,0)$$

oder

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda_1(r_1(0,0) + r_2(0,0)) + \lambda_2 r_1(0,0)\, r_2(0,0) + \lambda_3 = 0 \\ (\lambda_i = l_i - m_i f(0,0);\ i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

und der aus der EULERschen Formel folgenden Ungleichung:

$$(15) \qquad \operatorname{Min}(r_1(0,0), r_2(0,0)) \leq -b(0) \leq \operatorname{Max}(r_1(0,0), r_2(0,0)),$$

wobei sich $b(0)$ aus der Ausnahmerelation zu $b(0) = \lambda_1/\lambda_2$ bestimmt[12]). Ein solches Lösungssystem kann aber wegen (14) und (15) nur dann existieren, wenn die Hyperbel $r_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}}{r_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ mit den Asymptoten $r_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $r_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ durch eine monoton wachsende Funktion $r_2 = r_2(r_1)$ dargestellt wird, bzw. wenn sie in das Geradenpaar $r_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $r_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ zerfällt. Wenn nun $\frac{dr_2}{dr_1} < 0$, d.h. $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 > 0$ ist, so gibt es also gar keine durch unseren Ausnahmestreifen gehende Fläche, während im Falle $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 \leq 0$ die Verhältnisse sehr verschiedenartig sein können. So gehen z.B. durch einen ebenen, geradlinigen Asymptotenstreifen unendlich viele und durch einen nichtebenen

[12]) Hierbei ist $\lambda_2 \neq 0$, sonst wäre nämlich wegen (13) und (14) $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$, d.h. Rand $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} < 2$ gegen Voraussetzung (vgl. S. 249 dieser Arbeit!).

Asymptotenstreifen keine Torsen, d.h. Flächen mit der natürlichen Gleichung $K=0$. Hiermit haben wir die folgende Verschärfung von Satz 1 bewiesen.

Satz 1'. *Der einzige der in Satz 1 in Rede stehenden Ausnahmefälle ist der Fall, wo die vorgegebenen Größen $f(p,q)$ und Γ der Relation $(l_1-m_1 f(0,0))-b(0)\,(l_2-m_2 f(0,0))=0$ genügen. Ist hierbei*

$$(l_1-m_1 f(0,0))^2-(l_2-m_2 f(0,0))\,(l_3-m_3 f(0,0))>0,$$

so gibt es keine Fläche der in Satz 1 geforderten Art, während im gegenteiligen Fall $(l_1-m_1 f(0,0))^2-(l_2-m_2 f(0,0))\,(l_3-m_3 f(0,0))\leq 0$ keine oder auch mehrere solcher Flächen existieren können.

Hieraus folgt unter anderem, daß Satz 1 im Falle der natürlichen Gleichung $H=f$ ausnahmslos gilt. Weiter ergibt sich, daß im Falle der natürlichen Gleichung $\frac{2H}{K}=f$ keine Fläche durch den entsprechenden Ausnahmestreifen geht.

Der Spezialfall $H=f$ von Satz 1 wurde schon von RELLICH[13]) bewiesen, allerdings bezog RELLICH die isothermen Parameter in einer etwas anderen Weise als wir auf die Streifenkurve.

Korollar zu Satz 1. *Durch jeden in $s=0$ analytischen Streifen $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ geht im allgemeinen genau eine in $u=v=0$ analytische Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ mit $\mathfrak{x}(0,0)=\mathfrak{x}(0)$ und $\frac{2l_1 H(u,v)+l_2 K(u,v)+l_3}{2m_1 H(u,v)+m_2 K(u,v)+m_3}=d=\text{const.}$*

Beweis. Nach Satz 1 ist die Existenz einer Fläche mit den angegebenen Eigenschaften trivial. Wir nehmen also an, daß zwei derartige Flächen $\mathfrak{x}_1(u,v)$ und $\mathfrak{x}_2(u,v)$ durch den Streifen $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ gehen. Wegen

$$(\mathfrak{x}_1)_u(0,0)\times(\mathfrak{x}_1)_v(0,0)\neq 0$$

gilt nun für ein Komponentenpaar $x_{i_1}^{(1)}$, $x_{i_2}^{(1)}$ von $\mathfrak{x}_1$:

$$\frac{\partial(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(1)})}{\partial(u,v)}(0,0)\neq 0.$$

Die Umkehrfunktionen der Funktionen $x_{i_1}^{(1)}(u,v)$, $x_{i_2}^{(1)}(u,v)$ sind also im Punkt $(x_{i_1}^{(1)}(0), x_{i_2}^{(1)}(0))$ analytisch, woraus die Analytizität der Parameterdarstellung $u=u(s)=u\big(x_{i_1}^{(1)}(s), x_{i_2}^{(1)}(s)\big)$, $v=v(s)=v\big(x_{i_1}^{(1)}(s), x_{i_2}^{(1)}(s)\big)$ der Streifenkurve C auf der Fläche $\mathfrak{x}_1$ im Punkt $s=0$ folgt. Dasselbe ist auch für die Fläche $\mathfrak{x}_2$ der Fall, C liegt also in analytischer Weise (vgl. S. 245) auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Jetzt können wir aber auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ nach unserem Lemma auf C bezogene, isotherme Parameter (p,q) einführen. Dann gilt für beide Flächen: $\frac{2l_1 H(p,q)+l_2 K(p,q)+l_3}{2m_1 H(p,q)+m_2 K(p,q)+m_3}=d$; sie sind also nach Satz 1 (im allgemeinen) identisch, w. z. b. w.

Dieses Korollar ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß durch einen analytischen Streifen stets genau eine analytische Minimalfläche geht.

[13]) RELLICH: a. a. O.[3]), S. 627.

Es sollen noch zwei Bemerkungen zu Satz 1 angeführt werden:

1. Wir hatten beim Beweis von Satz 1 von der natürlichen Gleichung: Krümmungsfunktion $\Phi(E, L, M, N) =$ vorgeschriebene Funktion f nur benutzt, daß diese sich eindeutig nach dem Koeffizienten N der zweiten Grundform auflösen ließ. Satz 1 gilt also nicht nur im Falle, daß Φ speziell eine linear gebrochene Funktion von H und K ist, sondern in genau derselben Weise auch in allen denjenigen Fällen, wo sich die Gleichung $\Phi(E, L, M, N) = f$ eindeutig nach N auflösen läßt. Wie man leicht durch Nachrechnen bestätigt, trifft dies z. B. für $\Phi \equiv r_1$ zu, wenn wir durch die Zusatzbedingung $f(0, 0) + b(0) \neq 0$ das Auftreten eines Nabelpunktes im Nullpunkt der Fläche ausschließen. r_1 ist dabei die größere oder kleinere der beiden Hauptkrümmungen, je nachdem $f(0, 0) + b(0)$ positiv oder negativ ist.

2. Die Frage, ob in Satz 1 überall die Voraussetzung der Analytizität durch die schwächere Voraussetzung der (hinreichend oft möglichen) Differenzierbarkeit ersetzt werden kann, läßt sich mit den von uns angewandten Methoden nicht beantworten. Es fehlen nämlich Sätze allgemeiner Art, welche über die Lösbarkeit des Gleichungssystems (12), in welchem eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ enthalten ist, unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen Aufschluß geben könnten.

§ 4. Natürliche Gleichungen einer Fläche in normierten sphärisch-isothermen Parametern.

Ziel dieses Paragraphen ist, zu zeigen, daß an Stelle von normierten isothermen Parametern genau so gut auch normierte sphärisch-isotherme Parameter der Bildung von natürlichen Gleichungen einer Fläche zugrunde gelegt werden können. Wir beweisen nämlich den Satz 1 vollkommen entsprechenden

Satz 2. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ ($s =$ Bogenlänge) gegebener, in $s = 0$ analytischer Streifen und $f(p, q)$ irgendeine in $p = q = 0$ analytische Funktion, so gibt es, abgesehen von den Fällen, wo zwischen den vorgegebenen Größen Γ und f die Relationen $a^2(0) + b^2(0) = 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 b(0) = 0$, $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$ bestehen*[14]*, in der Umgebung von $p = q = 0$ eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p, q)$ ist in $p = q = 0$ analytisch.*
2. *Die Fläche geht für $p = s$, $q = 0$ durch den Streifen Γ.*
3. *(p, q) sind sphärisch-isotherme Parameter der Fläche.*
4. $\dfrac{2l_1 H(p, q) + l_2 K(p, q) + l_3}{2m_1 H(p, q) + m_2 K(p, q) + m_3} = f(p, q)$.

Beweis. Es erweist sich als zweckmäßig, zunächst die Existenz und Eindeutigkeit des sphärischen Bildes $\mathfrak{n}(p, q)$ der gesuchten Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$ nachzuweisen. Dieses sphärische Bild bestimmt sich in eindeutiger Weise nach Satz 1 als diejenige lokal analytische Fläche in isothermen Parametern

[14]) Die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind im Hinblick auf die vierte Bedingung dieses Satzes genau so wie auf S. 252 dieser Arbeit definiert.

(p, q), welche für $p = s$, $q = 0$ durch den Streifen $\Gamma' = \{\mathfrak{n}(s), \varepsilon\,\mathfrak{n}(s)\}$ $\left(\varepsilon = \operatorname{sign} \frac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)}\right)$[15]) geht und deren GAUSSsche Krümmung den konstanten Wert 1 besitzt. [Daß in diesem Fall s nicht die Bogenlänge der Streifenkurve ist, sondern wegen $(\mathfrak{n}'(0))^2 = a^2(0) + b^2(0) \neq 0$ nur ein gewisser Parameter von ihr, tut nämlich der Gültigkeit von Satz 1 keinen Abbruch]. Der Koeffizient $e(p, q)$ der ersten Grundform $e(dp^2 + dq^2)$ der so bestimmten Fläche ist hierbei die Lösung der Differentialgleichung:

$$e_{qq} = -2e^2 + \frac{e_p^2}{e} + \frac{e_q^2}{e} - e_{pp}$$

unter den Anfangsbedingungen:

$$e(p, 0) = a^2(p) + b^2(p), \quad e_q(p, 0) = -2^+\sqrt{(a^2(p) + b^2(p))^3} \cdot c'(p)$$

(c' ist die geodätische Krümmung von Γ'),

während sich die zweite Grundform zu $-\varepsilon\, e(dp^2 + dq^2)$ ergibt, woraus sofort folgt, daß unsere Fläche tatsächlich eine Einheitskugel ist.

Nun gelten aber für die gesuchte Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$ und ihr sphärisches Bild $\mathfrak{n}(p, q)$ die beiden Differentialgleichungen

$$\mathfrak{x}_p = -\frac{L}{e}\,\mathfrak{n}_p - \frac{M}{e}\,\mathfrak{n}_q, \qquad \mathfrak{x}_q = -\frac{M}{e}\,\mathfrak{n}_p - \frac{N}{e}\,\mathfrak{n}_q \tag{16}$$

mit den durch Gleichsetzung von $\frac{\partial \mathfrak{x}_p}{\partial q}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}_q}{\partial p}$ folgenden Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{cases} L_q = \frac{e_q}{2e}(L + N) + M_p \\ M_q = -\frac{e_p}{2e}(L + N) + N_p. \end{cases} \tag{17}$$

Aus (16) folgt: $E = \mathfrak{x}_p^2 = \frac{L^2 + M^2}{e}$, $F = \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q = \frac{LM + MN}{e}$, $G = \mathfrak{x}_q^2 = \frac{M^2 + N^2}{e}$, woraus sich dann $2H = \frac{e(L + N)}{LN - M^2}$, $K = \frac{e^2}{LN - M^2}$ berechnet. Die vierte Bedingung von Satz 2 läßt sich jetzt in der Form

$$\frac{l_1 e(L + N) + l_2 e^2 + l_3(LN - M^2)}{m_1 e(L + N) + m_2 e^2 + m_3(LN - M^2)} = f$$

oder

$$N = \frac{\varphi_1(f, e, L, M)}{\varphi_2(f, e, L)} = \frac{-(l_1 - m_1 f) e L - (l_2 - m_2 f) e^2 + (l_3 - m_3 f) M^2}{(l_1 - m_1 f) e + (l_3 - m_3 f) L} \tag{18}$$

schreiben, während sich aus der zweiten Bedingung dieses Satzes und (16) die Beziehungen

$$\begin{cases} L(p, 0) = -\mathfrak{x}_p(p)\,\mathfrak{n}_p(p, 0) = -b(p) \quad \text{und} \\ M(p, 0) = -\mathfrak{x}_p(p)\,\mathfrak{n}_q(p, 0) = -\varepsilon\, a(p) \end{cases} \tag{19}$$

[15]) Wir wählen hier ε von vorneherein so, daß es das Vorzeichen der Krümmung der gesuchten Fläche im Nullpunkt wird.

ergeben. Wir können nun ganz analog wie beim Beweis von Satz 1 wegen $\varphi_2(f(0,0), e(0,0), L(0,0)) = \lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0) \neq 0$ aus der Analytizität der vorgegebenen Größen Γ und f sowie der Analytizität der schon bestimmten Funktion $e(p,q)$ im Nullpunkt auf die eindeutige analytische Lösbarkeit der Gln. (17) und (18) mit den Anfangsbedingungen (19) in der Umgebung des Punkts $p=q=0$ schließen. Dann berechnet sich aber $\mathfrak{x}(p,q)$ mittels der nun bekannten Funktionen $\mathfrak{n}(p,q)$, $L(p,q)$, $M(p,q)$, $N(p,q)$ nach (16) zu $\mathfrak{x}(p,q) = \mathfrak{x}(0) - \int_0^{(p,q)} \left[\left(\frac{L}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{M}{e}\mathfrak{n}_q\right)dp + \left(\frac{M}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{N}{e}\mathfrak{n}_q\right)dq\right]$. Durch diese Funktion wird dabei wirklich eine in $p=q=0$ analytische Fläche dargestellt, deren Normalenvektor gerade $\mathfrak{n}(p,q)$ ist; es gilt nämlich: $\mathfrak{x}_p \mathfrak{n} = -\left(\frac{L}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{M}{e}\mathfrak{n}_q\right)\mathfrak{n} = 0$ und

$$\mathfrak{x}_q \mathfrak{n} = -\left(\frac{M}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{N}{e}\mathfrak{n}_q\right)\mathfrak{n} = 0 \quad \text{sowie}$$

$$(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{n})(0,0) = \frac{L(0,0)N(0,0) - (M(0,0))^2}{(e(0,0))^2}(\mathfrak{n}_p, \mathfrak{n}_q, \mathfrak{n})(0,0)$$

$$= \varepsilon \frac{L(0,0)N(0,0) - (M(0,0))^2}{e(0,0)} = \varepsilon \frac{(\lambda_2 b(0) - \lambda_1)(a^2(0)+b^2(0))}{\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0)} > 0.$$

Offensichtlich genügt $\mathfrak{x}(p,q)$ allen vier Bedingungen von Satz 2, schließlich erkennen wir aber auch leicht, daß $\mathfrak{x}(p,q)$ die einzige derartige Fläche ist. Zwei solcher Flächen würden nämlich zunächst in ihren sphärischen Bildern, damit aber auch nach (17), (18), (19) in den Funktionen L, M, N, also wegen (16) selbst übereinstimmen, w. z. b. w.

Die am Schluß von § 3 angeführten Bemerkungen treffen in derselben Weise auch für Satz 2 zu, insbesondere betonen wir, daß Satz 2 wiederum für alle diejenigen Krümmungsinvarianten Φ gilt, bei denen sich die natürliche Gleichung $\Phi(e, L, M, N) = f$ [16]) eindeutig nach N auflösen läßt. Auch können wir durch eine analoge Überlegung wie diejenige in § 3 den Schluß ziehen, daß in dem Ausnahmefall $\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$ sicher dann keine unseren Bedingungen genügende Fläche existiert, wenn die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ noch die Relation $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 > 0$ erfüllen. [Wir brauchen bei dieser Überlegung nur die erste Grundform durch die dritte Grundform und $r_1(0,0)$ und $r_2(0,0)$ durch $\frac{1}{r_1(0,0)}$ und $\frac{1}{r_2(0,0)}$ zu ersetzen!]

§ 5. Natürliche Gleichungen einer Fläche in normierten affin-isothermen Parametern.

Bei der Untersuchung, ob ein dem Satz 1 analoger Satz auch unter Verwendung von normierten affin-isothermen Parametern existiert, werden wir in derselben Weise wie beim Beweis von Satz 1 auf die Integrabilitätebedingungen in affin-isothermen Parametern ($N = \varepsilon L$, $M = 0$, wobei $\varepsilon = \pm 1$):

[16]) Es ist zu beachten, daß ein Unterschied zwischen dieser Bedingung und der entsprechenden Bedingung am Ende von § 3 insofern besteht, als hier Φ als Funktion der zweiten und dritten Grundform und dort als Funktion der ersten und zweiten Grundform auftritt.

$$(20)\quad \begin{cases} E_{qq}-2F_{pq}+G_{pp}+\frac{W_q}{W}(F_p-E_q)+\frac{W_p}{W}(F_q-G_p)+\frac{1}{2W^2}\begin{vmatrix} E & E_p & E_q \\ F & F_p & F_q \\ G & G_p & G_q \end{vmatrix}+ \\ \qquad +2\varepsilon L^2=0 \\ \qquad\qquad (W=\sqrt{EG-F^2}) \qquad \text{(Theorema egregium)} \\ 2\varepsilon W^2 L_p+(\varepsilon E+G)(F_q-G_p)L-(FG_q-GF_q)L-\varepsilon(EF_q-FE_q)L=0 \\ 2W^2 L_q+(\varepsilon E+G)(F_p-E_q)L+(FG_p-GF_p)L+\varepsilon(EF_p-FE_p)L=0 \\ \qquad\qquad \text{(Gleichungen von MAINARDI-CODAZZI),} \end{cases}$$

auf die natürliche Gleichung:

$$(21)\qquad \frac{l_1(\varepsilon E+G)L+\varepsilon l_2 L^2+l_3(EG-F^2)}{m_1(\varepsilon E+G)L+\varepsilon m_2 L^2+m_3(EG-F^2)}=f$$

sowie auf die Anfangsbedingungen:

$$(22)\qquad E(p,0)=1;\ \frac{FL}{W}\Big|_{q=0}=-a(p);\ L|_{q=0}=-b(p);\ \frac{E_q-2F_p}{2W}\Big|_{q=0}=-c(p)$$

geführt. Wenn wir zeigen können, daß die Gln. (20), (21) und (22) in den Unbekannten E, F, G, L unter Voraussetzung der lokalen Analytizität von f und Γ bis auf Ausnahmen in der Umgebung von $p=q=0$ eindeutig in analytischer Weise lösbar sind, so haben wir damit auch schon bewiesen, daß es im allgemeinen eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p,q)$ in affin-isothermen Parametern gibt, die den Bedingungen 1., 2. und 4. von Satz 1 genügt. Dieser Nachweis gelingt nun in der Tat, und zwar folgendermaßen:

Wir lösen zunächst (21) nach G auf und setzen das Resultat

$$(23)\quad \begin{cases} G=\varphi(f,E,F,L)=\frac{\varphi_1(f,E,F,L)}{\varphi_2(f,E,L)} \\ \qquad =\frac{-\varepsilon(l_1-m_1 f)EL-\varepsilon(l_2-m_2 f)L^2+(l_3-m_3 f)F^2}{(l_1-m_1 f)L+(l_3-m_3 f)E} \end{cases}$$

in die Integrabilitätsbedingungen (20) und die Anfangsbedingungen (22) ein. Dann erhalten wir aus den ersteren, etwas umgeformt, das Gleichungssystem:

$$(24)\quad \begin{cases} E_{qq}=\frac{1}{E\varphi-F^2}\Psi_1(f_p,f_q,f_{pp},E,E_p,E_q,E_{pp},F,F_p,F_q,L,L_p,L_q,\varphi \\ \qquad \text{und seine ersten und zweiten partiellen Ableitungen)}- \\ \qquad\qquad -\varphi_F F_{pp}+2F_{pq}-\varphi_L L_{pp} \\ F_q=\frac{1}{2L\varphi-FL\varphi_F}\Psi_2(f_p,f_q,E,E_p,E_q,F,F_p,L,L_p,L_q,\varphi \\ \qquad\qquad \text{und seine ersten partiellen Ableitungen)} \\ L_q=\frac{1}{E\varphi-F^2}\Psi_3(f_p,E,E_p,E_q,F,F_p,L,L_p,\varphi \\ \qquad\qquad \text{und seine ersten partiellen Ableitungen),} \end{cases}$$

wobei Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ganze rationale Funktionen in den angegebenen Argumenten sind, während sich aus der zweiten Gl. (22)

$$F(p,0)=a(p)\cdot S(p)$$

$$\left(S(p)=\operatorname{sign} b(0)\sqrt{\frac{(l_2-m_2 f(p,0))\,b(p)-(l_1-m_1 f(p,0))}{(l_1-m_1 f(p,0))\,(a^2(p)+b^2(p))-(l_3-m_3 f(p,0))\,b(p)}}\right)$$

und

$$W(p,0) = b(p) \cdot S(p)\ ^{17})$$

ergibt und somit aus der vierten Gl. (22) $E_q(p,0) = 2\frac{\partial}{\partial p}(a(p)\,S(p)) - 2b(p)\,c(p)\,S(p)$ folgt. Das Gleichungssystem (24) hat bis auf die Terme in F_{pp}, F_{pq}, L_{pp} der ersten Gleichung und die als Argumente der Funktionen Ψ_1, Ψ_2 auftretenden Größen F_q, L_q die Form eines KOWALEWSKISCHEN Gleichungssystems. Um es nun genau in eine solche Form zu bringen, setzen wir in diesem System nacheinander die dritte Gleichung in die erste und zweite, und die zweite Gleichung in die erste Gleichung ein. Weiter substituieren wir in dem resultierenden, (24) äquivalenten Gleichungssystem

$$(25)\quad \begin{cases} E_{qq} = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_1}(2L\varphi - FL\varphi_F)^{\varrho_2}}\,\chi_1(f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, \\ \qquad F, F_p, F_{pp}, L, L_p, L_{pp}, \varphi \text{ und seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ F_q = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3}(2L\varphi - FL\varphi_F)}\,\chi_2(f_p, f_q, E, E_p, E_q, F, F_p, L, L_p, \varphi \text{ und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \\ L_q = \dfrac{1}{E\varphi - F^2}\,\chi_3(f_p, E, E_p, E_q, F, F_p, L, L_p, \varphi \text{ und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \end{cases}$$

($\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind positive ganze Zahlen, χ_1, χ_2, χ_3 ganze rationale Funktionen)

$$F_p = U, \quad L_p = V$$

und gewinnen so die Differentialgleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} E_{qq} = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_1}(2L\varphi - FL\varphi_F)^{\varrho_2}}\,\chi_1(f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, \\ \qquad F, L, U, U_p, V, V_p, \varphi \text{ und seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ F_q = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3}(2L\varphi - FL\varphi_F)}\,\chi_2(f_p, f_q, E, E_p, E_q, F, L, U, V, \varphi \text{ und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \\ L_q = \dfrac{1}{E\varphi - F^2}\,\chi_3(f_p, E, E_p, E_q, F, L, U, V, \varphi \text{ und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \\ U_q = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\chi_2}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3}(2L\varphi - FL\varphi_F)}\right) = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3+1}(2L\varphi - FL\varphi_F)^2} \times \\ \qquad \times \chi_4(f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, F, F_p, L, L_p, U, U_p, V, V_p, \varphi \\ \qquad \text{und seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ V_q = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\chi_3}{E\varphi - F^2}\right) = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^2}\,\chi_5(f_p, f_{pp}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, \\ \qquad F, F_p, L, L_p, U, U_p, V, V_p, \varphi \text{ und} \\ \qquad \text{seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ \qquad (\chi_4, \chi_5 \text{ sind wieder ganz rational!}). \end{cases}$$

[17]) Hierbei ergibt sich, daß wie in § 3 $\varepsilon = \operatorname{sign} K(0,0) = \dfrac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)}$ zu wählen ist.

Setzen wir jetzt noch $b(0) \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 b(0) \neq 0$, $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 b(0) \neq 0$ voraus, so ist dieses System zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$(27) \quad \begin{cases} E(p,0) = 1, \quad E_q(p,0) = 2\dfrac{\partial}{\partial p}\left(a(p)\,S(p)\right) - 2b(p)\,c(p)\,S(p), \\ F(p,0) = a(p)\,S(p), \quad L(p,0) = -b(p), \\ U(p,0) = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(a(p)\,S(p)\right), \quad V(p,0) = -b_p(p) \end{cases}$$

wegen

$$\varphi_2\left(f(0,0),\ E(0,0),\ L(0,0)\right) = \lambda_3 - \lambda_1 b(0) \neq 0,\ E(0,0)\,\varphi(0,0) - \\ - \left(F(0,0)\right)^2 = \left(b(0)\,\mathfrak{S}(0)\right)^2 \neq 0,$$

$$2L(0,0)\,\varphi(0,0) - F(0,0)\,L(0,0)\,\varphi_F(0,0) \\ = \frac{2b^2(0)\,(\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0))}{\lambda_3 - \lambda_1 b(0)}\,S^2(0) \neq 0$$

und der Analytizität von f und von dem Anfangsstreifen nach KOWALEWSKI in der Umgebung von $p = q = 0$ eindeutig in analytischer Weise lösbar. Zwischen seinen Lösungen $F(p,q)$ und $U(p,q)$ sowie $L(p,q)$ und $V(p,q)$ bestehen wegen $\dfrac{\partial}{\partial q}(F_p - U) = 0$ und $(F_p - U)|_{q=0} = 0$ sowie wegen $\dfrac{\partial}{\partial q}(L_p - V) = 0$ und $(L_p - V)|_{q=0} = 0$ die Beziehungen $F_p(p,q) = U(p,q)$ und $L_p(p,q) = V(p,q)$. Die Lösungen $E(p,q)$, $F(p,q)$ und $L(p,q)$ von (26) und (27) sind also auch Lösungen von (25) und bilden deshalb zusammen mit der durch (23) definierten Funktion $G(p,q)$ ein analytisches Lösungssystem von (20), (21) und (22). Umgekehrt sieht man aber auch leicht ein, daß diese Funktionen das einzige analytische Lösungssystem der letztgenannten drei Gleichungssysteme darstellen. Wir haben hiermit folgenden Satz vollständig bewiesen:

Satz 3. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ (s = Bogenlänge) gegebener, in $s = 0$ analytischer Streifen und $f(p,q)$ irgendeine in $p = q = 0$ analytische Funktion, so gibt es, von den Fällen $b(0) = 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 b(0) = 0$, $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 b(0) = 0$ abgesehen, in der Umgebung von $p = q = 0$ eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p,q)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p,q)$ ist in $p = q = 0$ analytisch.*
2. *Die Fläche geht für $p = s$, $q = 0$ durch den Streifen Γ.*
3. *(p,q) sind affin-isotherme Parameter der Fläche.*
4. $\dfrac{2l_1 H(p,q) + l_2 K(p,q) + l_3}{2m_1 H(p,q) + m_2 K(p,q) + m_3} = f(p,q)$.

Im Falle $\operatorname{sign} \dfrac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)} = \operatorname{sign} K(0,0) < 0$ können wir auf $\mathfrak{x}(p,q)$ durch die Transformation $w = p - q$, $z = p + q$ Asymptotenlinienparameter einführen und erhalten so als

Korollar zu Satz 3: *Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3 noch* $\operatorname{sign} \dfrac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)} < 0$, *so gibt es, von den in Satz 3 genannten*

Ausnahmefällen abgesehen, genau eine in $w=z=0$ *analytische Fläche* $\mathfrak{x}(w,z)$ *in Asymptotenlinienparametern mit der natürlichen Gleichung* $\frac{2l_1H+l_2K+l_3}{2m_1H+m_2K+m_3}=f$, *welche für* $w=z=s$ *durch* Γ *geht.*

Der Spezialfall $K=f$ dieses Korollars wurde schon von RELLICH[18]) bewiesen. Unsere zweite Bemerkung von § 3 gilt übrigens auch unverändert für Satz 3; weiter zeigt sich, daß bei diesem Satz an die Stelle der linear gebrochenen Funktion von H und K auch eine Hauptkrümmung r_1 der Fläche treten kann.

§ 6. Bestimmung einer Fläche durch eine Krümmungsfunktion und eine relative Grundform.

Bis jetzt haben wir eine lokal analytische Fläche im euklidischen Raum durch eine gewisse Krümmungsfunktion Φ als Funktion spezieller Parameter (p,q) und einen Anfangsstreifen charakterisiert. Will man sich nun aber zur Bestimmung einer solchen Fläche auf allgemeine Flächenparameter (u,v) beziehen, so reicht die Vorgabe von $\Phi(u,v)$ allein nicht mehr aus. Eine Fläche ist nämlich durch drei Funktionen der Parameter (u,v) gegeben. Wir müssen also zur Charakterisierung unserer Fläche noch zwei weitere Funktionen von (u,v) heranziehen. Wir geben uns dazu etwa die von SCHERRER zu demselben Zweck eingeführte, aus der Grundform $A(u,v)\,du^2+2B(u,v)\,du\,dv+C(u,v)\,dv^2$ der Fläche hergeleitete „relative Grundform“:

$$\frac{A(u,v)}{\sqrt[+]{|Q(u,v)|}}du^2+\frac{2B(u,v)}{\sqrt[+]{|Q(u,v)|}}du\,dv+\frac{C(u,v)}{\sqrt[+]{|Q(u,v)|}}dv^2 \quad (Q=AC-B!)$$

vor, deren Koeffizienten durch die Beziehung $\frac{A}{\sqrt[+]{|Q|}}\cdot\frac{C}{\sqrt[+]{|Q|}}-\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}\right)^2=\operatorname{sign}Q(0,0)$ normiert sind und deshalb nur von zwei unabhängigen Funktionen von (u,v) abhängen. Dann können wir das Resultat SCHERRERS[19]), daß eine lokal analytische Fläche durch die (beliebig mögliche) Vorgabe eines Streifens sowie von H und der relativen ersten Grundform bzw. von K und der relativen zweiten Grundform bzw. von $\frac{2H}{K}$ und der relativen dritten Grundform eindeutig bestimmt ist, folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 4. *Ist* Γ *ein durch* $\{\mathfrak{x}(t),\mathfrak{n}(t)\}$ $(\mathfrak{x}'(0)\neq 0)$ *gegebener, in* $t=0$ *analytischer Streifen; sind weiter* $f(u,v)$ *sowie* $\alpha(u,v)$, $\beta(u,v)$, $\gamma(u,v)$ *in* $u=v=0$ *analytische Funktionen mit* $\alpha\gamma-\beta^2=\varepsilon$ ($\varepsilon=1$ *im Falle der relativen ersten und relativen dritten Grundform bzw.* $\varepsilon=\operatorname{sign}\frac{\lambda_2 b(0)-\lambda_1}{\lambda_1(a^2(0)+b^2(0))-\lambda_3 b(0)}$ *im Falle der relativen zweiten Grundform*), *und sind endlich* $u(t)$, $v(t)$ *zwei in* $t=0$ *analytische Funktionen mit* $u(0)=0$, $v(0)=0$, $(u'(0))^2+(v'(0))^2\neq 0$ *und* $\alpha(0,0)\,(u'(0))^2+2\beta(0,0)\,u'(0)\,v'(0)+\gamma(0,0)\,(v'(0))^2>0$ (*im Falle der relativen ersten und*

[18]) RELLICH: a. a. O.[3]).

[19]) SCHERRER: a. a. O.[4]), vgl. dazu auch W. Süss, Bestimmung einer Fläche durch die dritte Grundform und die Summe der Hauptkrümmungsradien, Arch. Math. **2**, 103—104 (1949). SCHERRER spricht übrigens von einer Hauptform anstatt einer Grundform und entsprechend von einer relativen Hauptform.

relativen dritten Grundform) bzw. $\gtrless 0$ *(im Falle der relativen zweiten Grundform, je nachdem* $\operatorname{sign} b(0) = \mp 1$ *ist)*[20]*, so gibt es in der Umgebung von* $u = v = 0$ *im allgemeinen genau eine Fläche* $\mathfrak{x}(u, v)$*, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. $\mathfrak{x}(u, v)$ *ist in* $u = v = 0$ *analytisch.*

2. *Die Fläche geht für* $u = u(t)$, $v = v(t)$ *durch* Γ.

3. *Die Koeffizienten der relativen ersten bzw. relativen zweiten bzw. relativen dritten Grundform der Fläche stimmen mit* α, β, γ *überein.*

4. $\dfrac{2l_1 H(u, v) + l_2 K(u, v) + l_3}{2m_1 H(u, v) + m_2 K(u, v) + m_3} = f(u, v)$[21].

Beweis. Man sieht leicht durch Einschaltung einer geeigneten Parametertransformation, daß es genügt, diesen Satz für den Spezialfall $u(t) = t = s$, $v(t) = 0$ ($s =$ Bogenlänge von $\mathfrak{x}(t)$!) zu beweisen. Um nun diesen Nachweis zu führen, beachten wir, daß es zwei in $u = v = 0$ analytische Funktionen $p(u, v)$ und $q(u, v)$ mit $p(u, 0) = u$, $q(u, 0) = 0$ gibt, die dem Gleichungssystem

$$\left\{\begin{aligned} q_u &= \varepsilon\eta(\beta p_u - \alpha p_v) \\ q_v &= \varepsilon\eta(\gamma p_u - \beta p_v) \end{aligned}\right. \qquad (\eta = \operatorname{sign}\lambda(0, 0)) \tag{28}$$

bzw. dessen Umkehrung

$$\left\{\begin{aligned} p_u &= \eta(-\beta q_u + \alpha q_v) \\ p_v &= \eta(-\gamma q_u + \beta q_v) \end{aligned}\right. \tag{29}$$

genügen und wegen $\dfrac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)}(0, 0) = \dfrac{1}{|\alpha(0, 0)|} > 0$ eine Parametertransformation definieren (vgl. § 2!). Mittels dieser Funktionen bilden wir die in $p = q = 0$ analytische Funktion $h(p, q) = f(u(p, q), v(p, q))$. Dann existiert nach Satz 1 bzw. Satz 3 bzw. Satz 2 in der Umgebung von $p = q = 0$ im allgemeinen genau eine lokal analytische Fläche $\mathfrak{X}(p, q)$ in isothermen bzw. affin-isothermen bzw. sphärisch-isothermen Parametern (p, q), welche für $p = s$, $q = 0$ durch Γ geht und bei der eine linear gebrochene Funktion von $H(p, q)$ und $K(p, q)$ gleich $h(p, q)$ ist. Transformieren wir jetzt $\mathfrak{X}(p, q)$ auf unsere ursprünglichen Parameter (u, v) so erhalten wir in $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{X}(p(u, v), q(u, v))$ eine Parameterdarstellung unserer Fläche, bei welcher diese für $u = s$, $v = 0$ durch Γ geht und die Gleichung $\dfrac{2l_1 H(u, v) + l_2 K(u, v) + l_3}{2m_1 H(u, v) + m_2 K(u, v) + m_3} = f(u, v)$ befriedigt. Sei nun $A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2$ die erste bzw. zweite bzw. dritte Grundform von $\mathfrak{x}(u, v)$. Da diese Differentialform durch die Parametertransformation $p = p(u, v)$, $q = q(u, v)$ in die isotherme Form gebracht wird, können wir nach dem zum Beweis unseres Lemmas in § 2 Gesagten auf die

[20]) Wir schließen nämlich bei Vorgabe der relativen zweiten Grundform die Fälle $b(0) = 0$, $\lambda_2 b(0) - \lambda_1 = 0$ und $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$ aus. Die Definition der Größen λ_1, λ_2, λ_3 bezieht sich dabei auf die vierte Bedingung dieses Satzes und ist dieselbe wie auf S. 252 dieser Arbeit.

[21]) An die Stelle dieser Bedingung kann bei Vorgabe der relativen ersten bzw. relativen dritten Grundform auch die allgemeinere Bedingung $\Phi = f$ mit einer nach den Bemerkungen von Satz 1 bzw. Satz 2 zulässigen Krümmungsfunktion Φ treten.

Gültigkeit der dortigen Gln. (2) und (3) für die Funktionen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $q(u, v)$ schließen[22]). Die Subtraktion von (28) und (29) von (2) und (3) liefert jetzt:

$$\varepsilon\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}-\beta\right)\mathfrak{p}_u-\varepsilon\eta\left(\frac{A}{\sqrt[+]{|Q|}}-\alpha\right)\mathfrak{p}_v=0$$

$$\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}-\beta\right)q_u-\eta\left(\frac{A}{\sqrt[+]{|Q|}}-\alpha\right)q_v=0$$

und

$$\varepsilon\eta\left(\frac{C}{\sqrt[+]{|Q|}}-\gamma\right)\mathfrak{p}_u-\varepsilon\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}-\beta\right)\mathfrak{p}_v=0$$

$$\eta\left(\frac{C}{\sqrt[+]{|Q|}}-\gamma\right)q_u-\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}-\beta\right)q_v=0,$$

woraus wegen $\begin{vmatrix}\mathfrak{p}_u & \mathfrak{p}_v\\ q_u & q_v\end{vmatrix}(0,0)\neq 0$ $\frac{A}{\sqrt[+]{|Q|}}=\alpha$, $\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}=\beta$ und $\frac{C}{\sqrt[+]{|Q|}}=\gamma$ folgt. (Die Größen ε und η haben hier nämlich gemäß ihrer Definition denselben Wert wie diejenigen in § 2!). Unsere (in $u=v=0$ analytische) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ besitzt also $\alpha\,du^2+2\beta\,du\,dv+\gamma\,dv^2$ als relative erste bzw. relative zweite bzw. relative dritte Grundform und genügt somit allen Forderungen von Satz 4. Daß es aber auch (im allgemeinen) nur eine derartige Fläche gibt, zeigt man schließlich ebenfalls leicht durch Zurückführung auf Satz 1 bzw. Satz 3 bzw. Satz 2 nach Einführung normierter isothermer bzw. normierter affin-isothermer bzw. normierter sphärisch-isothermer Parameter[23]), w. z. b. w.

Korollar zu Satz 4. *Zwischen einer linear gebrochenen Funktion von* GAUSSscher *und mittlerer Krümmung und einer relativen Grundform besteht keinerlei Abhängigkeit.*

Bemerkungen. 1. Dieses Korollar stellt für den Spezialfall der GAUSSschen Krümmung und der relativen ersten Grundform ein gewisses Gegenstück zum GAUSSschen Theorema egregium dar, welches besagt, daß sich die GAUSSsche Krümmung aus der ersten Grundform berechnen läßt. Ebenso kann man der gleichfalls bestehenden Unabhängigkeit zwischen der mittleren Krümmung und der relativen ersten Grundform die bekannte Abhängigkeit der mittleren Krümmung und der ersten Grundform in Form zweier partieller Differentialgleichungen entgegensetzen[24]).

2. Die Fixierung der Streifenkurve in der Parameterebene bei Satz 4 ist für die Eindeutigkeit der Bestimmbarkeit einer Fläche durch Krümmungsfunktion und relative Grundform notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: Es seien $\mathfrak{x}_1(u, v)$ und $\mathfrak{x}_2(u, v)$ diejenigen nach Satz 4 sicher existierenden lokal analytischen Flächen in isothermen Parametern (d.h. mit der relativen ersten

[22]) An Stelle der gestrichenen Größen treten jetzt allerdings die entsprechenden ungestrichenen Größen.

[23]) Die Einführung dieser speziellen Parameter ist nämlich auf allen etwaigen Flächen wegen der Gleichheit ihrer betreffenden relativen Grundform durch dieselbe Parametertransformation möglich.

[24]) ALEXANDER, H. W.: The rôle of the mean curvature in the immersion theory of surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 230—253 (1940).

Grundform du^2+dv^2) mit $H_1(u,v)=H_2(u,v)=f(u,v)$ (H_1 und H_2 sind die mittleren Krümmungen von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$!), welche für $u=s$, $v=0$ bzw. für $u=0$, $v=s$ durch denselben Streifen Γ gehen. Wären diese Flächen identisch, so hätten wir die Beziehung $\mathfrak{x}_1(u,v)\equiv\mathfrak{x}_2(-v,u)$, wie man mit Hilfe unseres Lemmas erkennt, wenn man auf $\mathfrak{x}_2$ neue isotherme Parameter $(\bar{u},\bar{v})$ mittels der Transformation $\bar{u}=v$, $\bar{v}=-u$ einführt. Dann wäre aber $H_1(u,v)\equiv H_2(-v,u)$, d.h. $f(u,v)\equiv f(-v,u)$, was im allgemeinen nicht zutrifft, da die Funktion $f(u,v)$ beliebig (analytisch) vorgegeben werden kann. Die beiden Flächen sind also im allgemeinen voneinander verschieden, obwohl sie in der relativen ersten Grundform und der mittleren Krümmung übereinstimmen und beide durch denselben Streifen gehen.

§ 7. Beweis eines Satzes von DARBOUX.

Wir können unsere beim Beweis von Satz 1 benutzte Methode auch darauf anwenden, einen einfachen, unseres Wissens in der Literatur noch nicht vorkommenden Beweis für den folgenden Satz von DARBOUX über die Abwickelbarkeit von Flächen zu geben[25]).

Es sei M^2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit in den Koordinaten (u,v) mit einer im Punkt $(0,0)$ analytischen RIEMANNschen *Metrik. Auf der M^2 sei durch die in $s=0$ analytischen Funktionen $u=u(s)$, $v=v(s)$, $(u(0)=0, v(0)=0)$ eine Kurve C gegeben, deren geodätische Krümmung in bezug auf die M^2 mit $c(s)$ bezeichnet werde (s ist Bogenlänge von C). Endlich sei $\mathfrak{C}$ eine durch $\mathfrak{x}(s)$ gegebene, in $s=0$ analytische Kurve des dreidimensionalen, euklidischen Raums mit der Krümmung $\varkappa(s)$ (s ist Bogenlänge von $\mathfrak{C}$). Ist dann noch die Bedingung $|\varkappa(s)|>|c(s)|$ erfüllt, so gibt es in der Umgebung von $\mathfrak{x}(0)$ genau zwei verschiedene, in $u=v=0$ analytische Flächen $\mathfrak{x}_1(u,v)$ und $\mathfrak{x}_2(u,v)$ mit $\mathfrak{x}_i(u(s),v(s))=\mathfrak{x}(s)$ $(i=1,2)$, welche beide durch Zuordnung gleicher Koordinatenpaare (u,v) isometrisch auf die M^2 abgebildet werden.*

Beweis. Es ist wegen unseres Lemmas leicht ersichtlich, daß es genügt, diesen Satz für den Spezialfall isothermer Parameter (p,q) und $p(s)=s$, $q(s)=0$ zu beweisen. In diesem Falle hat das Quadrat des Bogenelements der M^2 die Gestalt $ds^2=E(p,q)\,(dp^2+dq^2)$ mit der in $p=q=0$ analytischen Funktion $E(p,q)$ und $E(p,0)=1$, woraus sich $c(p)=-\frac{1}{2}E_q(p,0)$ berechnet. Nun können wir durch die Kurve $\mathfrak{C}$ wegen $|\varkappa(p)|=|\mathfrak{x}_{pp}(p)|>|c(p)|$ stets genau zwei verschiedene Streifen Γ_1 und Γ_2 mit dieser geodätischen Krümmung $c(p)$ legen. Wir brauchen nur deren Normalen $\mathfrak{n}_i(p)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{n}_i(p)\,(\mathfrak{x}_p(p)\times\mathfrak{x}_{pp}(p))=c(p)$$

zu definieren $(i=1,2)$, aus welcher sich $\mathfrak{n}_i(p)=\frac{(-1)^i}{\varkappa^2(p)}\sqrt{\varkappa^2(p)-c^2(p)}\,\mathfrak{x}_{pp}(p)+\frac{c(p)}{\varkappa^2(p)}(\mathfrak{x}_p(p)\times\mathfrak{x}_{pp}(p))$ ergibt. Wegen der lokalen Analytizität von $\mathfrak{C}$ und $E(p,q)$ bzw. wegen der hieraus folgenden Analytizität von $\varkappa^2(p)$ und $c(p)$ in $p=0$

[25]) DARBOUX, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. III, S. 253ff. 1894.

sind dann auch die Streifen Γ_1 und Γ_2 lokal analytisch, ihre (ebenfalls lokal analytischen) Invarianten seien mit a_i, b_i und c_i bezeichnet ($i=1, 2$). Wir konstruieren jetzt unsere beiden zur M^2 isometrischen Flächen, indem wir die erste unserer Integrabilitätsbedingungen in isothermen Parametern (11) nach N auflösen und das Resultat

$$N = \frac{-E((\log E)_{pp} + (\log E)_{qq}) + 2M^2}{2L} \tag{30}$$

in die beiden übrigen Gln. (11) einsetzen. Wir erhalten so ein Gleichungssystem der Form:

$$L_q = \frac{1}{E^2 L}\, \Psi_1(E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{qq}, L, M, M_p)$$

$$M_q = \frac{1}{E^2 L^2}\, \Psi_2(E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, E_{qq}, E_{ppp}, E_{pqq}, L, L_p, M, M_p)$$

(Ψ_1 und Ψ_2 sind ganze rationale Funktionen!)

in den Unbekannten L und M sowie in der bekannten Funktion $E(p, q)$. Dieses System können wir zusammen mit je einer der Anfangsbedingungen

$$L(p, 0) = -b_i(p), \qquad M(p, 0) = a_i(p) \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{[vgl. (9)!]}$$

wegen $E(0, 0) = 1$ und $L(0, 0) = -b_i(0) = -(\mathfrak{n}_i)_p(0)$ $\mathfrak{x}_p(0) = \mathfrak{n}_i(0)$ $\mathfrak{x}_{pp}(0) = (-1)^{i+1}\sqrt{\varkappa^2(0) - c^2(0)} \neq 0$ nach dem Satz von KOWALEWSKI in der Umgebung des Nullpunkts analytisch in eindeutiger Weise lösen. Wir definieren nun mittels der so gewonnenen Lösungen $L_i(p, q)$ und $M_i(p, q)$ nach (30) die Funktionen $N_i(p, q)$ ($i = 1, 2$). Dann brauchen wir nur noch durch jeden der Streifen Γ_i genau so wie beim Beweis von Satz 1 eine Fläche $\mathfrak{x}_i(p, q)$ mit $E(dp^2 + dq^2)$ als erster und $L_i\, dp^2 + 2M_i\, dp\, dq + N_i\, dq^2$ als zweiter Grundform zu legen, um zwei in $p = q = 0$ analytische Flächen zu erhalten, welche für $p = s$, $q = 0$ durch $\mathfrak{C}$ gehen und in der angegebenen Weise auf die M^2 isometrisch abgebildet werden. Weiter erkennen wir leicht, daß es auch nicht mehr als zwei solcher Flächen geben kann. Sonst hätten nämlich sicher zwei derselben einen ganzen durch $\mathfrak{C}$ gehenden Streifen gemein und wären so, wie sich aus diesem Beweisgang ebenfalls ergibt, miteinander identisch, w. z. b. w.

Dieser Satz gilt übrigens, wie HARTMANN und WINTNER durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt haben, im allgemeinen nicht, wenn nur die Differenzierbarkeit der Metrik von der M^2 vorausgesetzt wird[26]).

[26]) HARTMANN, P., u. WINTNER, A.: On the embedding problem in differential geometry. Amer. J. Math. **72**, 553—564 (1950).

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Juni 1952.)

PEYERIMHOFF, A.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 265—290 (1953)

Untersuchungen über absolute Summierbarkeit*).

Von
ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei absoluter Summierbarkeit. Bei der Behandlung derartiger Fragen für gewöhnliche Summierbarkeit ist ein gewisser Mittelwertsatz von Wichtigkeit[1]) und so wird der Wunsch hervorgerufen, auch in der Theorie der absoluten Summierbarkeit ein ähnliches Hilfsmittel zu besitzen. Im folgenden wird eine derartige Abschätzung eingeführt (§ 4, Satz 5), und es werden hinreichende Bedingungen für ihre Gültigkeit angegeben. Diese Bedingungen verlangen im wesentlichen, daß die Spalten der Matrix, welche das betrachtete Verfahren darstellt, aus monoton fallenden Nullfolgen bestehen. Mit Hilfe dieser Abschätzung lassen sich Aussagen über die Größenordnung absolut limitierbarer Folgen gewinnen. Ferner gelingt es, notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben, die eine Folge $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ erfüllen muß, damit sie jede absolut $\mathfrak{A}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine konvergente, bzw. $\mathfrak{B}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ überführt, falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewissen Klassen von Matrixverfahren angehören. Entsprechende Bedingungen werden angegeben, wenn man von absolut summierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ zu Reihen $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ übergeht. Diese Sätze können als Verallgemeinerung des bekannten Konvergenzkriteriums von DU BOIS-REYMOND und DEDEKIND aufgefaßt werden.

In § 1 werden die zur Durchführung dieser Überlegungen nötigen Grundbegriffe aus der Theorie der absoluten Summierbarkeit formuliert. Der § 2 enthält Hilfssätze; von besonderer Wichtigkeit ist hier das Lemma 11, durch dessen Anwendung gewisse Schlüsse von O auf o durchgeführt werden[2]) können. In § 3 werden notwendige Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren abgeleitet. Die §§ 4—7 enthalten die Hilfsmittel, durch deren Anwendung in den §§ 8 und 9 bewiesen wird, daß die Bedingungen des § 3 bei gewissen Klassen von Verfahren auch hinreichend sind. Die eingangs erwähnte Abschätzung für absolute Summierbarkeit wird in § 4 eingeführt. In § 5 wird ein weiterer Abschätzungssatz bewiesen; er ist in § 9 von Wichtigkeit beim Beweis einer Verallgemeinerung des Satzes von BOHR-HARDY für absolute Summierbarkeit. Diese Abschätzungen werden in § 6 verschärft. In § 7 wird die genaue Größenordnung absolut limitierbarer Folgen (bei einer gewissen Klasse von

* Die vorliegende Arbeit ist ein Teil der Habilitationsschrift des Verfassers, die der naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus Liebig-Hochschule in Gießen vorgelegen hat.

[1]) Vgl. PEYERIMHOFF [13], ZELLER [15], JURKAT-PEYERIMHOFF [6].

[2]) Vgl. hierzu JURKAT-PEYERIMHOFF [7], Satz 2.

Verfahren) angegeben. Die §§ 10–12 enthalten Anwendungen auf spezielle Verfahren, und zwar in § 10 auf bewichtete arithmetische Mittel, in § 11 auf NÖRLUND-Verfahren und in § 12 auf CESÀROsche Verfahren. Unter anderem ergibt sich hierbei ein neuer Beweis eines Satzes von Herrn KOGBETLIANTZ[3]).

1. Allgemeine Erklärungen, Bezeichnungen und Problemstellung.

Wir betrachten Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$, welche vermittels einer Matrix $(a_{n\nu})$ jeder Folge[4]) $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zuordnen durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Eine Transformation $\mathfrak{A}$ heißt absolut konvergenztreu[5]), wenn sie jeder absolut konvergenten Folge $\{s_\nu\}$, für die also[6]) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu - s_{\nu-1}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\overline{\Delta} s_\nu| < \infty$ $(s_{-1} = 0)$ ist, eine absolut konvergente Folge $\{\sigma_n\}$ zuordnet. Sie heißt absolut permanent, wenn überdies[7]) aus $\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = s$ stets $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ folgt.

Lemma 1. *a) Eine Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut konvergenztreu, wenn*[8])

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\Delta}_n \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} a_{n\nu}| \leq M \quad (\varrho = 0, 1, \ldots, M \text{ unabhängig von } \varrho) \tag{2}$$

ist. Aus (2) folgt die Existenz folgender Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = \alpha_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

b) Eine Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut permanent, wenn außerdem

$$\alpha = 1, \qquad \alpha_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

ist.

Dieses Lemma wurde von F. MEARS[9]) zuerst bewiesen. Ein kurzer Beweis unter Verwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel stammt von KNOPP und LORENTZ[10]).

---

[3]) KOGBETLIANTZ [*11*].

[4]) Alle in dieser Arbeit betrachteten Zahlen werden als reell vorausgesetzt.

[5]) Vgl. KNOPP-LORENTZ [*10*], MEARS [*12*].

[6]) Zur Bezeichnung von Differenzen verwenden wir folgende Symbole: $\Delta s_\nu = s_\nu - s_{\nu+1}$, $\overline{\Delta} s_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$, wobei im zweiten Fall stets $s_{-1} = 0$ gesetzt sei.

[7]) Jede absolut konvergente Folge ist konvergent.

[8]) Sind Differenzen von Ausdrücken mit zwei Indizes zu bilden, so kennzeichnen wir denjenigen Index, nach dem die Differenz zu bilden ist, durch Anhängen an das Differenzensymbol, also z. B. $\overline{\Delta}_n a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n-1,\nu}$. In (2) sei $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$. Übrigens bleibt Lemma 1 auch für nicht zeilenfinite Matrizen richtig, wenn wir zusätzlich noch voraussetzen, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ für alle $n \geq 0$ konvergiert.

[9]) MEARS [*12*].

[10]) KNOPP-LORENTZ [*10*].

Durch eine Transformation $\mathfrak{A}$ wird einer Reihe $\sum a_\nu$ eine Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet, wenn man in (1) für s_n die Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ einträgt. Nach einfacher Umformung geht dann (1) über in

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu \tag{5}$$

mit

$$\bar{a}_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} a_{n\mu}, \qquad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} \quad (\bar{a}_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n), \qquad \bar{a}_{nn} = a_{nn}. \tag{6}$$

Wir bezeichnen (1) als Folgen-Folgen-Form (FF-Form) und (5) als Reihen-Folgen-Form (RF-Form) der Transformation $\mathfrak{A}$. Bei den folgenden Untersuchungen werden wir für die, zu einer Transformation $\mathfrak{A}$ gehörigen Matrizen stets die Bezeichnungen $(a_{n\nu})$ für die FF-Form und $(\bar{a}_{n\nu})$ für die RF-Form verwenden und es sei $a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$ gesetzt.

Bei den folgenden Überlegungen ist es im allgemeinen nicht nötig, daß die betrachteten Transformationen absolut permanent sind, wir brauchen oft nur die folgende, schwächere Voraussetzung:

Die absolut konvergenten Folgen[11] $\{s_\nu^n\} = \{\delta_{n\nu}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ werden durch (1) in absolut konvergente Nullfolgen transformiert. Diese Forderung ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |\Delta_n a_{n\nu}| < +\infty \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \qquad a_{n\nu} \to 0 \quad (n \to \infty, \ \nu \text{ fest}), \tag{7}$$

wenn also die Spalten der Matrix $(a_{n\nu})$ aus absolut konvergenten Nullfolgen bestehen[12].

Wir bezeichnen die Menge aller Folgen $s = \{s_\nu\}$ (bzw. Reihen $\sum a_\nu$), welche durch (1) in absolut konvergente Folgen bzw. absolut konvergente Nullfolgen transformiert werden, als Wirkfeld bzw. Nullwirkfeld und verwenden dafür die Bezeichnungen $|\mathfrak{A}|$ bzw. $|\mathfrak{A}|_0$. Wir schreiben kurz

$$s \in |\mathfrak{A}|, \qquad \sum a_\nu \in |\mathfrak{A}| \tag{8}$$

(entsprechend bei $|\mathfrak{A}|_0$) und nennen s absolut $\mathfrak{A}$-limitierbar und $\sum a_\nu$ absolut $\mathfrak{A}$-summierbar (bzw. absolut zu Null limitierbar und summierbar).

Zur Erklärung der im folgenden behandelten Fragestellung gehen wir von dem Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond und Dedekind aus[13]. Nach diesem Kriterium ist eine Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ sicherlich konvergent, wenn $\sum a_\nu$ konvergiert und wenn die Folge $\{b_\nu\}$ absolut konvergiert. Dieses Kriterium läßt sich auf zweierlei Weise verallgemeinern. Einmal können wir die gewöhnliche Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ durch einen Konvergenzbegriff im Sinne der Limitierungstheorie ersetzen, zum anderen können wir die absolute Limitierbarkeit der Folge $\{b_\nu\}$ an Stelle ihrer absoluten Konvergenz verlangen.

[11] $\delta_{nn} = 1$, $\delta_{n\nu} = 0$ für $\nu \neq n$.

[12] Bei gewöhnlicher Summierbarkeit entspricht dieser Bedingung die Spaltenbedingung Sp_0: $a_{n\nu} \to 0$ $(n \to \infty, \ \nu \text{ fest})$.

[13] Vgl. etwa Knopp [9], S. 324.

Verallgemeinerungen der zuerst genannten Art wurden von mehreren Autoren durchgeführt[14]), mit Verallgemeinerungen der zweiten Art wollen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen.

Im einzelnen werden wir nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen fragen, welche eine Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ bzw. $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ erfüllen muß, damit (bei gegebenem Verfahren $\mathfrak{A}$) die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu \tag{9}$$

für alle $s=\{s_\nu\}\in|\mathfrak{A}|\,(\in|\mathfrak{A}_0|)$ bzw. $\sum a_\nu\in|\mathfrak{A}|\,(\in|\mathfrak{A}|_0)$ konvergiert, oder durch ein gegebenes permanentes Matrixverfahren $\mathfrak{B}$ summierbar ist. Derartige Faktoren nennen wir *Summierbarkeitsfaktoren.*

2. Hilfssätze.

In diesem Paragraphen wollen wir, zum Teil unter Verwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel, einige für das folgende wichtige Hilfssätze beweisen.

2.1. Lemma 2. *Es sei $\{s_\nu\}$ eine absolut konvergente Nullfolge und $\{\beta_\nu\}$ sei eine beschränkte Folge. Dann ist*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu s_\nu \quad \textit{mit} \quad \alpha_\nu = \Delta\beta_\nu . \tag{10}$$

Beide Summen existieren.

Lemma 3. *Es sei $\{s_\nu\}$ eine absolut konvergente Nullfolge und die Folge $\{\alpha_\nu\}$ erfülle die Bedingung $\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu = O(1)$. Dann ist*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta s_\nu \ \textit{mit}\ \beta_0 = 0,\ \beta_n = -\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_\nu \ \textit{für}\ n \geq 1 . \tag{11}$$

Beide Summen existieren. Die Beziehung (11) bleibt richtig, wenn β_n durch $\beta_n + c$ $(n=0, 1, \ldots)$ ersetzt wird.

Die Beweise folgen unmittelbar durch Anwendung partieller Summation. Im folgenden werden wir die Umformungen (10) und (11) des öfteren verwenden, ohne jedesmal erneut auf diese Hilfssätze hinzuweisen.

2.2. Lemma 4. *Eine Transformation*[15]) $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Nullfolge $\{s_\nu\}$ über in eine konvergente Folge, wenn die*

[14]) Für CESÀROsche Verfahren unter anderem von ANDERSEN, BOHR, BOSANQUET, CHAPMAN, HARDY, KNOPP, KOJIMA, LORENTZ, I. SCHUR, für gewisse NÖRLUND-Verfahren von C. N. MOORE, für gewisse RIESZsche Verfahren von JURKAT und für allgemeine Matrixverfahren von ZELLER [15] und dem Verfasser. Vgl. die bei PEYERIMHOFF [13] zitierte Literatur. Eine etwas andere Fragestellung, bei der die absolute Konvergenz bzw. absolute Summierbarkeit der Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ untersucht wird, findet man bei FEKETE [4] und BOSANQUET [3].

[15]) In den Lemmas 4—7 wird nicht vorausgesetzt, daß $a_{n\nu}=0$ bzw. $\bar{a}_{n\nu}=0$ für $\nu > n$ ist.

folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}| \leq K \quad (k \geq 0,\ n \geq 0,\ K \text{ unabhängig von } k \text{ und } n), \tag{12}$$

$$a_{n\nu} \to \alpha_\nu \quad (n \to \infty,\ \nu \text{ fest}). \tag{13}$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu s_\nu \qquad \left(\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)\right). \tag{14}$$

Lemma 5. *Eine Transformation* $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Nullfolge* $\{s_\nu\}$ *über in eine beschränkte Folge, wenn die Bedingung* (12) *erfüllt ist.*

Lemma 6. *Eine Transformation* $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu} a_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Reihe* $\sum a_\nu$ *mit der Summe Null über in eine konvergente Folge, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$|\bar{a}_{n0} - \bar{a}_{nk+1}| \leq K \quad (k \geq 0,\ n \geq 0,\ K \text{ unabhängig von } k \text{ und } n), \tag{15}$$

$$\Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} \to \alpha_\nu \quad (n \to \infty,\ \nu \text{ fest}). \tag{16}$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu. \tag{17}$$

Lemma 7. *Eine Transformation* $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu} a_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Reihe* $\sum a_\nu$ *mit der Summe Null über in eine beschränkte Folge, wenn die Bedingung* (15) *erfüllt ist.*

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß Lemma 4 aus Lemma 6 und Lemma 5 aus Lemma 7 folgt (nach Lemma 3). Wir müssen also nur Lemma 6 und 7 beweisen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Bedingungen (15) und (16) in Lemma 6 die Konvergenz von σ_n nach sich ziehen; Entsprechendes gilt bei Lemma 7. Ist die Folge $\{\sigma_n\}$ in Lemma 6 konvergent für alle betrachteten $\sum a_\nu$, dann ist auch (16) erfüllt, da die absolut konvergenten Reihen $\sum a_\nu^{(k)}$ mit $a_k^{(k)} = 1$, $a_{k+1}^{(k)} = -1$, $a^{(k)} = 0$ sonst $(k = 0, 1, \ldots)$ die Summe Null besitzen und in die konvergenten Folgen $\sigma_n(k) = \Delta_k \bar{a}_{nk}$ übergehen. Wir müssen also nur noch den Nachweis erbringen, daß in Lemma 7 aus der Beschränktheit der σ_n die Bedingung (15) folgt.

Es ist

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n0}) a_\nu \quad (\sum a_\nu = 0 \text{ und absolut konvergent}). \tag{18}$$

Ist $\sigma_n = O(1)$ für alle absolut konvergenten Reihen $\sum a_\nu$ mit der Summe Null, dann gilt sogar

$$\sigma_n^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n0}) a_\nu = O(1) \quad (n \to \infty) \tag{19}$$

für alle absolut konvergenten Reihen $\sum a_\nu$, da das Glied a_0 in diesen Reihen nicht auftritt. Jedes σ_n^* ist ein lineares Funktional im BANACH-Raum l der absolut konvergenten Reihen[16]) und aus $\sigma_n^* = O(1)$ folgt (BANACH [1], S. 80, th. 5), daß die Normen dieser linearen Funktionale beschränkt sind, d.h. es ist (15) erfüllt. Damit ist der Beweis erbracht.

2.3. Lemma 8. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation*[17]), *Ist eine Matrix $(b_{n\nu})$ so beschaffen, daß*

$$B_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{20}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ existiert und für $n \to \infty$ gegen einen Wert $B(s)$ strebt, so gibt es eine Folge $\{\alpha_\nu\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$ $(n \to \infty)$ und eine beschränkte Folge $\{\beta_\nu\}$, so daß

$$B(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \sigma_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \bar{\Delta} \sigma_\nu \quad \left(\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu\right) \tag{21}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ gilt.

Wir wollen, ehe wir zum Beweis übergehen, die folgende Bezeichnung einführen:

Ist $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation, so gibt es eine inverse Transformation $\mathfrak{A}'$, deren Matrix mit $(a'_{n\nu})$ bezeichnet sei; es gilt dann die Beziehung

$$\sum_{\varrho=\nu}^{n} a_{n\varrho} a'_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=\nu}^{n} a'_{n\varrho} a_{\varrho\nu} = \delta_{n\nu} \quad (0 \leq \nu \leq n). \tag{22}$$

Im folgenden werden inverse Matrizen stets in dieser Weise (Anhängen eines Striches) gekennzeichnet.

Beweis von Lemma 8. Es ist

$$B_n(s) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sigma_\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{\mu=0}^{k} \sigma_\mu \sum_{\nu=\mu}^{k} b_{n\nu} a'_{\nu\mu} = \lim_{k\to\infty} \sum_{\mu=0}^{k} c_{k\mu}(n) \sigma_\mu.$$

Bei festem n stellt die ganz rechts stehende Summe eine Transformation der absolut konvergenten Nullfolge $\{\sigma_n\}$ in eine konvergente Folge dar; nach Lemma 4 [Beziehung (14)] gibt es also zu jedem n $(n = 0, 1, \ldots)$ eine Folge $\{\alpha_{n\nu}\}$, so daß

$$B_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \sigma_\nu \tag{23}$$

ist. Erneute Anwendung von Lemma 4 lehrt, daß es eine Folge $\{\alpha_\nu\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$ gibt, so daß (21) erfüllt ist. Die Behauptung über $\{\beta_\nu\}$ ergibt sich aus Lemma 3.

[16]) Aus der Konvergenz der Reihen (19) für alle $\sum a_\nu \in l$ folgt nämlich nach bekannten Sätzen (vgl. BANACH [1], S. 86), daß $\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n0} = O(1)$ $(\nu \to \infty$, n fest) ist; deshalb ist σ_n^* ein lineares Funktional in l.

[17]) Das heißt es ist $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$ und $a_{nn} \neq 0$.

2.4. Wir nennen eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ *absolut perfekt*, wenn sie die Bedingung (7) erfüllt und wenn es zu jedem $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abbrechende Folge $g = \{g_\nu\}$ ($g_\nu = 0$ für $\nu > \nu_0$) gibt, so daß für

$$\sigma_n(s-g) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}(s_\nu - g_\nu) \tag{24}$$

die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\Delta}_n \sigma_n(s-g)| < \varepsilon \tag{25}$$

gilt.

Lemma 9. *Eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut perfekt, wenn sie die Bedingung (7) erfüllt und wenn die Beziehungen*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n a_{n\nu} = 0, \qquad \beta_n = O(1) \tag{26}$$

stets

$$\beta_n = const. \tag{27}$$

nach sich ziehen.

Beweis. Das Wirkfeld $|\mathfrak{A}|_0$ ist ein normierter Vektorraum, wenn für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ eine Norm durch $||s|| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\Delta}\sigma_n|$ erklärt wird. Durch $\{s_\nu\} \leftrightarrow \{\overline{\Delta}\sigma_\nu\}$ wird nämlich eine eineindeutige Beziehung zwischen $|\mathfrak{A}|_0$ und dem Raum l_n der absolut konvergenten Reihen mit der Summe Null hergestellt. Der Raum l_n ist als (Vektor)-Teilraum des BANACH-Raumes l ein normierter Vektorraum und daraus ergibt sich die angegebene Normierung von $|\mathfrak{A}|_0$[18]. Das allgemeine lineare Funktional in l_n wird gegeben durch[19]

$$f(\sum a_\nu) = \sum \beta_n a_n, \qquad \beta_n = O(1). \tag{28}$$

Auf Grund der oben erwähnten eineindeutigen Beziehung zwischen l_n und $|\mathfrak{A}|_0$ wird das allgemeine lineare Funktional in $|\mathfrak{A}|_0$ gegeben durch[20]

$$f(s) = \sum \beta_n \overline{\Delta}\sigma_n, \qquad \beta_n = O(1). \tag{29}$$

Die Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut perfekt, wenn sie die Bedingung (7) erfüllt und wenn die abbrechenden Folgen in $|\mathfrak{A}|_0$ (der Norm nach) überall dicht liegen, d.h. wenn die Folgen $s^k = \{\delta_{k\nu}\}$ ($k = 0, 1, \ldots$) in $|\mathfrak{A}|_0$ eine Grundmenge bilden[21] (d.h. die Linearkombinationen der s^k liegen in $|\mathfrak{A}|_0$ überall dicht). Die Folgen s^k liegen nach einem bekannten Satz (BANACH [1], S. 58 th. 7) genau dann in $|\mathfrak{A}|_0$ überall dicht, wenn jedes lineare Funktional $f(s)$ aus $|\mathfrak{A}|_0$, für das $f(s^k) = 0$ ($k = 0, 1, \ldots$) gilt, in $|\mathfrak{A}|_0$ identisch verschwindet.

[18]) Vgl. etwa PEYERIMHOFF [13], Lemma 2.1.

[19]) Durch (28) wird nämlich das allgemeine lineare Funktional in l gegeben und daraus folgt nach dem Satz von HAHN-BANACH (BANACH [1], S. 55, th. 2), daß (28) auch das allgemeine lineare Funktional in l_n darstellt.

[20]) Vgl. etwa PEYERIMHOFF [13], Lemma 2.3.

[21]) Da $\mathfrak{A}$ die Bedingung (7) erfüllt, ist $s^k \in |\mathfrak{A}|_0$.

Diese Forderung ist aber gleichbedeutend mit (26) und (27), wenn man (29) beachtet.

Lemma 10. *Eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ ist sicherlich absolut perfekt, wenn sie absolut permanent ist und wenn für die inverse Matrix $(a'_{n\nu})$ gilt*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |a'_{n\nu}| < +\infty \quad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{30}$$

Beweis. Die Folge $\{\beta_n\}$ erfülle die Bedingungen (26). Es ist

$$0 = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a'_{\nu\mu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n a_{n\nu} \doteq \sum_{n=\mu}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{n\nu} a'_{\nu\mu} = \beta_\mu - \beta_{\mu+1},$$

also ist (27) erfüllt[22]).

2.5. Lemma 11[23]). *Die Transformation $\mathfrak{A}$ sei normal und absolut perfekt. Es sei $(c_{n\nu})$ eine Matrix mit konvergenten Spalten ($c_{n\nu} \to c_\nu$ für $n \to \infty$, ν fest). Existiert*

$$C_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{31}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und ist

$$C_n(s) = O(1) \quad (n \to \infty) \tag{32}$$

für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$, dann ist die Folge $\{C_n(s)\}$ sogar konvergent. Ist $c_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, so ist $\{C_n(s)\}$ für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ eine Nullfolge.

Beweis. Für jedes feste n ist $C_n(s) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} s_\nu$ vorhanden. Nach Lemma 8 gibt es also zu jedem n eine Folge $\{\gamma_{n\nu}\}$, so daß $\left(\text{mit } \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu\right)$

$$C_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu} \sigma_\nu(s) \qquad \left(\sum_{\nu=0}^{k} \gamma_{n\nu} = O(1) \quad \text{für} \quad k \to \infty, \ n \text{ fest}\right)$$

ist. (Man setze in Lemma 8 $b_{k\nu} = c_{n\nu}$ für $\nu \leq k$, $b_{k\nu} = 0$ für $\nu > k$.) Diese Transformation ist für jede absolut konvergente Nullfolge beschränkt, also gibt es nach Lemma 5 eine Zahl K, so daß

$$\left|\sum_{\nu=0}^{k} \gamma_{n\nu}\right| \leq K \quad (n \geq 0, \ k \geq 0) \tag{33}$$

ist. Zu gegebenem $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine abbrechende Folge g so daß $\sum |\overline{\Delta}\sigma_\nu(s-g)| < \varepsilon$ ist, da $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist. Es ist

$$|C_n(s) - C_m(s)| \leq |C_n(s-g)| + |C_n(g) - C_m(g)| + |C_m(s-g)| = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Wegen

$$|C_n(s-g)| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu} \sigma_\nu(s-g)\right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\overline{\Delta}\sigma_\nu(s-g)| \left|\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \gamma_{n\mu}\right| \leq K\varepsilon$$

[22]) Die Vertauschung der Summation ist zulässig, da nach (2), (26) und (30)

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} |a'_{\nu\mu}| \sum_{n=\nu}^{\infty} |\beta_n| \, |\overline{\Delta}_n a_{n\nu}| < +\infty$$

ist.

[23]) Vgl. hierzu JURKAT-PEYERIMHOFF [7], Satz 2.

ist $I \leq K\varepsilon$ und $III \leq K\varepsilon$ [nach (33)] und II wird für genügend große n und m beliebig klein, da $C_n(g)$ für $n \to \infty$ nach Voraussetzung konvergiert. Daraus folgt die Konvergenz von $C_n(s)$. Ist $c_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, dann folgt aus

$$|C_n(s)| \leq |C_n(s-g)| + |C_n(g)| \quad (|C_n(s-g)| \leq K\varepsilon),$$

daß $C_n(s) \to 0$ $(n \to \infty)$, da $C_n(g)$ eine Nullfolge ist.

3. Notwendige Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren.

Wir werden in diesem Paragraphen eine notwendige Bedingung für Summierbarkeitsfaktoren aufstellen[24]). Die im folgenden betrachteten Transformationen $\mathfrak{B}$ werden in der RF-Form dargestellt durch $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_{n\nu} a_\nu$ (nicht notwendig zeilenfinit) und es sei

$$\bar{b}_{n\nu} \to 1 \quad (n \to \infty,\ \nu \text{ fest}). \tag{34}$$

Die Bedingung (34) ist z. B. erfüllt, wenn $\mathfrak{B}$ permanent ist.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation welche die Bedingung (7) erfüllt. Die Transformation $\mathfrak{B}$ erfülle (34). Ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, dann gibt es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$, so daß*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \bar{\Delta}_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{35}$$

ist[25]).

Der Beweis beruht auf Lemma 8. Nach den Voraussetzungen existiert nämlich $B_n^*(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{b}_{n\nu} \varepsilon_\nu) s_\nu$ $(n = 0, 1, \ldots)$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und strebt für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert $B^*(s)$. Es gibt also eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$, so daß

$$B^*(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{b}_{n\nu} \varepsilon_\nu) s_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \bar{\Delta} \sigma_n \tag{36}$$

ist. Wählt man für s die speziellen Folgen $s^k = \{\delta_{k\nu}\}$ $[s^k \in |\mathfrak{A}|_0$ wegen (7)], so folgt aus (36) wegen (34) die Beziehung (35).

Bemerkungen. Ist $\mathfrak{A}$ sogar absolut permanent und ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}|$, so ist außer (35) noch die folgende Bedingung erfüllt:

$$\sum \varepsilon_\nu \text{ ist } \mathfrak{B}\text{-summierbar}. \tag{37}$$

Die Folge $s = e = \{1, 1, 1, \ldots\}$ ist nämlich absolut konvergent, also ist $e \in |\mathfrak{A}|$ und daraus folgt (37).

---

[24]) Für gewöhnliche Summierbarkeitsfaktoren wurden ähnliche Überlegungen vom Verfasser durchgeführt [vgl. Fußnote [14])]. Erweiterungen für FK-Räume gab Zeller [15] an.

[25]) Gleichbedeutend mit dieser Behauptung ist die folgende: Es gibt eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$, so daß

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

ist.

Wir werden in § 8 eine Klasse von Transformationen betrachten, bei denen die Bedingung (35) für die Konvergenz bzw. $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit von $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ hinreichend ist. Erweiterungen auf das Wirkfeld $|\mathfrak{A}|$ (wenn $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist) bedürfen dann keiner besonderen Untersuchung. Folgt nämlich aus (35) für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Konvergenz bzw. $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit von $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$, so gilt dies, wenn noch (37) erfüllt ist, sogar für alle $s \in |\mathfrak{A}|$. Man kann nämlich jede Folge $s \in |\mathfrak{A}|$ zerlegen in

$$s = (s - e \lim_{n\to\infty} \sigma_n) + e \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s_1 + s_2$$

mit $s_1 \in |\mathfrak{A}|_0$.

Ist $\mathfrak{A}$ absolut permanent, so folgt aus (35) die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu = O(1) \quad (k \to \infty)^{26}). \tag{38}$$

Nach (2) ist nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{k} \beta_n \Delta_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} = O(1) \quad (k \to \infty).$$

Die Bedingung (37) folgt nicht aus (35), auch wenn $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist. Dies erkennt man, wenn man für $\mathfrak{A}$ die Einheitsmatrix wählt; hier ist $\varepsilon_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$. (In diesem Fall folgt aus der Konvergenz von $\sum \varepsilon_\nu$ die Konvergenz von $\{\beta_\nu\}$; im allgemeinen Fall trifft dies, wie Beispiele zeigen, nicht zu.)

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation welche die Bedingung (7) erfüllt. Die Transformation $\mathfrak{B}$ erfülle (34). Ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, dann gibt es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$, so daß*

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{39}$$

ist.

Bevor wir zum Beweis übergehen, wollen wir an die Beziehung (39) einige Bemerkungen anknüpfen. Aus (39) folgt, daß

$$\bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{n\nu} = \sum_{n=0}^{k} \beta_n \Delta \bar{a}_{n0} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \Delta_n (\bar{a}_{n0} - \bar{a}_{nk+1}) \tag{40}$$

ist. Aus Konvergenzgründen dürfen wir die ganz rechts stehende Summe nicht als Differenz zweier Summen schreiben. Dies ist jedoch möglich, wenn $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist. In diesem Falle folgt nämlich aus (6) und (2), daß

$$\sum_{n=\varrho}^{\infty} |\Delta_n \bar{a}_{n\varrho}| \leq M \quad (\varrho = 0, 1, \ldots) \tag{41}$$

ist. Setzt man $\bar{\varepsilon}_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Delta_n \bar{a}_{n0} = \alpha$, so folgt aus (40) die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n \bar{a}_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{42}$$

[26]) Aus (38) folgt, daß $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle absolut konvergente Nullfolgen $\{s_\nu\}$ konvergiert.

und da $\sum_{n=\nu}^{\infty} \overline{\Delta}_n \bar{a}_{n\nu} = \lim_{k\to\infty} \bar{a}_{k\nu} = 1$ ist, folgt schließlich

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \gamma_n \overline{\Delta}_n \bar{a}_{n\nu} \quad (\gamma_n = O(1),\ \nu = 0, 1, \ldots). \tag{43}$$

Fügt man also zu den Voraussetzungen in Satz 2 noch hinzu, daß $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist, so läßt sich die Behauptung dieses Satzes ersetzen durch: *Es gibt eine beschränkte Folge* $\{\gamma_n\}$, *so daß* (43) *gilt.*

Der Beweis von Satz 2 verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 1. Für jedes $n \geq 0$ und alle $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$ existiert

$$B_n^*(\sum a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{b}_{n\nu}, \varepsilon_\nu)\, a_\nu = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} s_\nu \Delta_\nu (\bar{b}_{n\nu}, \varepsilon_\nu) + s_k \bar{b}_{nk}\, \varepsilon_k \right) \quad \left(k \geq 1,\ s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right),$$

daher gibt es nach Lemma 8 zu jedem n eine Folge $\{\gamma_{n\nu}\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{k} \gamma_{n\nu} = O(1)$ $(k \to \infty)$, so daß

$$B_n^*(\sum a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}\, \sigma_\nu \tag{44}$$

ist. Erneute Anwendung von Lemma 8 lehrt, daß es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ gibt, so daß

$$B^*(\sum a_\nu) = \lim_{n\to\infty} B_n^*(\sum a_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}\, \sigma_n \tag{45}$$

ist. Für die speziellen Reihen $\sum a_\nu^{(k)} \in |\mathfrak{A}|_0$ $(a_k^{(k)} = 1,\ a_{k+1}^{(k)} = -1,\ a_\nu^{(k)} = 0$ sonst) folgt (39) aus (45) wegen (34).

Wir bemerken noch, daß aus (43) für absolut permanentes $\mathfrak{A}$ die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}_\nu = O(1) \tag{46}$$

folgt. Dies ergibt sich unmittelbar aus (43) wegen (41).

Satz 3. *Voraussetzungen wie bei Satz 1. Außerdem sei die Transformation* $\mathfrak{A}$ *absolut perfekt. Erfüllt die Folge* $\{\varepsilon_\nu\}$ *die Bedingung* (35) *und ist* $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ $\mathfrak{B}$*-summierbar für alle* $s \in |\mathfrak{A}|_0$, *so gilt die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_{n\nu}\, s_\nu\, \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n \sigma_n \tag{47}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$.

Beweis. Nach Lemma 8 gibt es eine beschränkte Folge $\{\gamma_n\}$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_{n\nu}\, s_\nu\, \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \overline{\Delta}\, \sigma_n \tag{48}$$

ist. Für die Folgen $s^k = \{\delta_{k\nu}\}$ ist die Beziehung (47) richtig, also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n - \beta_n) \overline{\Delta}\, \sigma_n(s) = 0$$

für $s = s^k$, d.h. es ist

$$\sum_{n=k}^{\infty} (\gamma_n - \beta_n) \overline{\Delta}_n a_{nk} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{49}$$

Aus (49) folgt, da $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist, die Beziehung $\gamma_n - \beta_n = \text{const}$; für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ ist also (wegen $\sum \Delta \sigma_n = 0$) die Beziehung (47) richtig.

In derselben Weise kann ein entsprechender Satz für Reihen $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$ aufgestellt werden.

4. Ein Abschätzungssatz.

Wir betrachten in diesem Paragraphen normale Transformationen $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft

$$(50) \qquad a_{n\nu} \geq 0 \quad (\nu \leq n), \qquad a_{n\nu} - a_{n-1,\nu} = \Delta_n a_{n\nu} \leq 0 \quad (\nu < n).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt und ist $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty$, ν fest), dann ist auch die Bedingung (7) erfüllt. Aus den Bedingungen (50) lassen sich Eigenschaften der inversen Matrix $(a'_{n\nu})$ ableiten.

Satz 4. *Erfüllt eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ die Bedingungen* (50), *so ist*

$$(51) \qquad \sum_{\nu=\mu}^{n} a'_{n\nu} \geq 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots).$$

Die Summe in (51) stellt ein Stück einer Zeilensumme der inversen Matrix dar; dabei ist es wesentlich, daß das Diagonalglied in dieser Summe auftritt. Bei den Betragsabschätzungen der folgenden Sätze ist die Ungleichung (51) von Wichtigkeit.

Der Beweis von (51) wird durch Induktion nach fallendem μ (bei festem n) erbracht. Für $\mu = n$ ist die Behauptung wegen $a'_{nn} = 1/a_{nn}$ richtig. Der Induktionsschluß beruht auf folgender Identität:

$$0 = \sum_{\nu=\varrho}^{n} a'_{n\nu} a_{\nu\varrho} = a_{\varrho\varrho} \sum_{\mu=\varrho}^{n} a'_{n\mu} + \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} \Delta_\nu a_{\nu\varrho} \sum_{\mu=\nu}^{n} a'_{n\mu} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad (\varrho < n).$$

Ist (51) bereits für $\mu = n, n-1, \ldots \varrho+1$ als richtig erkannt, dann gilt wegen (50) die Ungleichung $\mathrm{II} \leq 0$, also $\mathrm{I} \geq 0$, d.h. (51) ist auch für $\mu = \varrho$ richtig[27]).

Satz 5. *Erfüllt eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ die Bedingungen* (50) *und ist $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty$, ν fest), so gilt die Abschätzung*

$$(52) \qquad \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} a_{n-1,\nu} s_\nu \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq \sum_{n=0}^{k} |\Delta \sigma_n| \quad (k \geq 0).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die linke Seite von (52) wegen (50) existiert. Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sigma_\mu = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \Delta \sigma_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{k} \Delta \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu},$$

also

$$-\Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\lambda=0}^{k} \Delta \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{k} \left(-\Delta_n a_{n\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} \right).$$

---

[27]) Unter der Annahme gewisser Bedingungen über die Zeilen der Matrix $(a_{n\nu})$ konnte Herr JURKAT sogar Aussagen über die Vorzeichen der Elemente $a'_{n\nu}$ erzielen. (Noch nicht veröffentlicht.)

Nach Satz 4 ist die ganz rechts stehende Summe positiv. Für $n \geq k+1$ ist $-\overline{\Delta}_n a_{n\nu} \geq 0$ nach (50). Wir können also in folgender Weise abschätzen:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\nu=\lambda}^{k} -\overline{\Delta}_n a_{n\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\nu=\lambda}^{k} a_{k\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{k} \sum_{\nu=\mu}^{k} a_{k\nu} a'_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{k} \delta_{k\mu} = \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \quad \text{w. z. b. w.}$$

5. Ein weiterer Abschätzungssatz.

Satz 6. *Erfüllt eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ die Bedingungen* (50), *so gilt die Abschätzung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\nu| \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{53}$$

Der Beweis folgt aus der Abschätzung (51). Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} |s_\nu| = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \left| \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overline{\Delta}\sigma_\lambda \right| = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \left| \sum_{\lambda=0}^{\nu} \overline{\Delta}\sigma_\lambda \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{n\nu} a'_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{n} \delta_{n\mu} = \sum_{\lambda=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \quad \text{w. z. b. w.}$$

Bemerkung. Aus dem Beweis des Satzes ist zu ersehen, daß die Ungleichung (53) schon dann richtig ist, wenn (bei positivem $a_{n\nu}$) gilt

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n} a_{n\nu} \left| \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} \right| \leq 1 \quad (n \geq 0,\ 0 \leq \lambda \leq n).$$

6. Verschärfung der Abschätzungen.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation welche der Bedingung (7) genügt. Gilt für diese Transformation die Abschätzung (52), so ist

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| = O(1) \quad (k \to \infty) \tag{54}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und eine analoge Beziehung folgt aus der Abschätzung (53). Ist $\mathfrak{A}$ absolut perfekt, so können diese Abschätzungen verschärft werden[28]).

Satz 7. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation $\mathfrak{A}$ die Abschätzung* (52), *so gilt für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Beziehung*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| = o(1) \quad (k \to \infty). \tag{55}$$

[28]) Für die Abschätzung (52) folgt dies auch aus einem Satz von ZELLER (ZELLER [15], Satz 3.3).

Der Beweis beruht auf Lemma 11. Wir zeigen, daß (55) für jede fest gewählte Folge $s \in |\mathfrak{A}|_0$ richtig ist. Sei s^* eine derartige Folge. Nach Vorgabe einer Zahl k kann man die Menge der Zahlen $n \geq k+1$ $(k \geq 0)$ so in zwei Teilmengen $\mathfrak{N}^+(k)$ und $\mathfrak{N}^-(k)$ zerlegen, daß

$$\overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu^* \begin{cases} \geq 0 & \text{für} \quad n \in \mathfrak{N}^+(k) \\ < 0 & \text{für} \quad n \in \mathfrak{N}^-(k) \end{cases}$$

ist. Es sei

$$f_k^+(s) = \sum_{n \in \mathfrak{N}^+(k)} \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu, \qquad f_k^-(s) = \sum_{n \in \mathfrak{N}^-(k)} \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu.$$

Für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ ist

$$|f_k^+(s)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq \sum_{n=0}^{k} |\overline{\Delta} \sigma_n| = O(1) \quad (k \to \infty) \tag{56}$$

und ebenso

$$|f_k^-(s)| = O(1) \quad (k \to \infty). \tag{56'}$$

Mit den Abkürzungen

$$b_{k\nu}^+ = \sum_{n \in \mathfrak{N}^+(k)} \overline{\Delta}_n a_{n\nu}, \qquad b_{k\nu}^- = \sum_{n \in \mathfrak{N}^-(k)} \overline{\Delta}_n a_{n\nu} \quad (\nu \leq k)$$

ist

$$f_k^+(s) = \sum_{\nu=0}^{k} b_{k\nu}^+ s_\nu, \qquad f_k^-(s) = \sum_{\nu=0}^{k} b_{k\nu}^- s_\nu. \tag{57}$$

Die Transformation $\mathfrak{A}$ erfüllt die Bedingung (7), da sie absolut perfekt ist; also ist

$$|b_{k\nu}^+| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\overline{\Delta}_n a_{n\nu}| = o(1) \quad (k \to \infty, \ \nu \text{ fest}). \tag{58}$$

Entsprechend gilt

$$|b_{k\nu}^-| = o(1) \quad (k \to \infty, \ \nu \text{ fest}). \tag{59}$$

Auf die Reihen (57) wenden wir Lemma 11 an. Wegen (56), (56'), (58) und (59) sind die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt. Es gelten also die Beziehungen

$$f_k^+(s) = o(1), \qquad f_k^-(s) = o(1) \quad (k \to \infty) \tag{60}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$. Insbesondere ist also

$$f_k^+(s^*) - f_k^-(s^*) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu^* \right| = o(1) \quad (k \to \infty) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 8. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation $\mathfrak{A}$ die Abschätzung (53), so gilt für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Beziehung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu| = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{61}$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 7. Wir nehmen zunächst an, daß $a_{n\nu} \geq 0$ ist. Es sei $s^* \in |\mathfrak{A}|_0$ eine fest gewählte Folge. Wir zerlegen die Menge der natürlichen Zahlen in zwei Teilmengen $\mathfrak{N}^+$ und $\mathfrak{N}^-$;

dabei bestehe $\mathfrak{N}^+$ aus allen Zahlen ν mit $s_\nu^* \geq 0$, $\mathfrak{N}^-$ aus dem Rest. Setzt man

$$f_n^+(s) = \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \nu \in \mathfrak{N}^+}} a_{n,\nu} s_\nu, \qquad f_n^-(s) = \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \nu \in \mathfrak{N}^-}} a_{n,\nu} s_\nu$$

so folgen durch ganz ähnliche Überlegungen, wie sie beim Beweis von Satz 7 angewandt wurden, die Beziehungen

$$f_n^+(s) = o(1), \qquad f_n^-(s) = o(1) \quad (s \in |\mathfrak{A}|_0,\ n \to \infty).$$

Es ist also

$$f_n^+(s^*) - f_n^-(s^*) = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n,\nu} s_\nu^*| = o(1).$$

Im allgemeinen Fall wird $\mathfrak{A}$ als Summe zweier Transformationen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ dargestellt, so daß $\mathfrak{A}_1$ nur nicht negative und $\mathfrak{A}_2$ nur nicht positive Elemente enthält.

Die eben durchgeführten Überlegungen legen die Frage nahe, ob die Abschätzungen (52) und (53) nicht so verschärft werden können, daß (bei absolut perfekter Transformation $\mathfrak{A}$) die Beziehungen (55) und (61) direkt abgelesen werden können. Diese Frage konnte bisher nur in einzelnen Spezialfällen beantwortet werden. So gilt z. B. für das CESÀROsche Verfahren C_1 die Beziehung

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} \frac{s_\nu}{n+1} \right| = |\sigma_k| \qquad \left(\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu\right). \tag{62}$$

Dies ist eine Verschärfung von (52). Aus (62) folgt unmittelbar die Beziehung (55). Entsprechendes gilt für die Abschätzung (53) beim C_1-Verfahren.

In den Sätzen 7 und 8 darf die Voraussetzung, daß die betrachtete Transformation $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist, nicht weggelassen werden. Wir geben im folgenden ein Beispiel einer nicht absolut perfekten Transformation, welche absolut permanent ist und die Bedingungen (50), also auch die Abschätzungen (52) und (53) erfüllt, während die Verschärfungen (55) und (61) falsch sind. Die Transformation sei (in der FF-Form) gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Diese Transformation ist offenbar absolut permanent und erfüllt (50). Zum Nachweis, daß sie nicht absolut perfekt ist, verwenden wir Lemma 9. Die Bedingungen (26) gehen hier über in

$$\tfrac{1}{2}(\beta_\nu - \beta_{\nu+2}) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \qquad \beta_\nu = O(1).$$

Diese Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn $\beta_0 = \beta_2 = \cdots = 1$, $\beta_1 = \beta_3 = \cdots = 2$ gewählt wird, während $\beta_n = \text{const}$ nicht gilt. Die Abschätzung (52) geht hier über in

$$\tfrac{1}{2}(|s_{k-1}| + |s_k|) \leq \sum_{n=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_n| \ (k \geq 1) \qquad \left(\sigma_n = \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1})\ n \geq 1,\ \sigma_0 = \frac{s_0}{2}\right). \tag{64}$$

Durch die Transformation (63) wird die Folge $\{s_\nu\}$ mit $s_\nu = (-1)^\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots)$ übergeführt in eine absolut konvergente Nullfolge, da $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = 0$ ist. Für diese Folge ist jedoch die Abschätzung (55) nicht richtig, da die linke Seite von (64) übergeht in $\frac{1}{2}(1+1) = 1 \neq o(1)$. Ebenso erkennt man, daß auch die Beziehung (61) nicht richtig ist[29]).

7. Größenordnung absolut limitierbarer Folgen.

Die Abschätzung (52) ermöglicht es, eine Aussage über die Größenbeschränkung absolut limitierbarer Folgen zu machen. Wir können sogar zeigen, daß die erhaltene Abschätzung die bestmögliche ist, so daß wir die genaue Größenbeschränkung der absolut limitierbaren Folgen gefunden haben.

Satz 9. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung* (52), *so gilt für alle* $s \in |\mathfrak{A}|_0$ *die Beziehung*

$$s_n = o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right) \quad (n \to \infty). \tag{65}$$

Beweis. Aus der Abschätzung (52) folgt für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Beziehung

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} \Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu = -\sum_{\nu=0}^{k} a_{r\nu} s_\nu = O(1) \quad (r \geq k,\ k, r \to \infty).$$

Es ist also

$$a_{rr} s_r = \sum_{\nu=0}^{r} a_{r\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r\nu} s_\nu = O(1) \quad (r \to \infty).$$

Die Beziehung (65) folgt nun aus Lemma 11, da $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist.

Bemerkung. Dem vorstehenden Beweis entnimmt man, daß die Beziehung (65) auch unmittelbar aus Satz 7 gefolgert werden kann.

Die Abschätzung (65) ist die bestmögliche. Es gilt nämlich der

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine normale Transformation und ist* $\{\eta_n\}$ *eine (positive) unbeschränkte Folge, dann gibt es ein* $s \in |\mathfrak{A}|_0$, *so daß*

$$s_n \neq o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{1}{a_{nn}} \tag{66}$$

ist.

Beweis. Es ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu} \sigma_\nu$. Die Annahme, daß

$$\eta_n a_{nn} s_n = \sum_{\nu=0}^{n} (\eta_n a_{nn} a'_{n\nu}) \sigma_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} d_{n\nu} \sigma_\nu = o(1) \quad (n \to \infty)$$

---

[29]) Dieses Beispiel zeigt, daß hier die Verhältnisse anders liegen als bei gewöhnlicher Summierbarkeit, denn dort folgt aus der Gültigkeit des Mittelwertsatzes

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} s_\nu\right| \leq K |\sigma_{n'}| \quad (0 \leq n' \leq m \leq n)$$

die Perfektheit und damit eine Verschärfung des Mittelwertsatzes von O auf o, ähnlich wie bei (54) und (55). (Vgl. ZELLER [15] und JURKAT-PEYERIMHOFF [7].)

ist für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ würde nach Lemma 4 die Bedingung $d_{nn} = O(1)$, d.h. $\eta_n = O(1)$ (wegen $a'_{nn} = 1/a_{nn}$) nach sich ziehen. Die Folge $\{\eta_n\}$ sollte aber unbeschränkt sein. Es gibt also eine Folge $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so daß (66) erfüllt ist[30]).

Bemerkung. Erfüllt eine Transformation $\mathfrak{A}$ die Voraussetzungen von Satz 9 und ist sie absolut permanent, so folgt aus $s \in |\mathfrak{A}|$, $\sigma_n = a + o(1)$ die Beziehung

$$s_n = a + o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$$

und diese Abschätzung kann nicht verbessert werden.

8. Genaue Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren.

Wir haben in § 3 notwendige Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren ε_ν und $\bar{\varepsilon}_\nu$ angegeben. In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß diese Bedingungen für eine gewisse Klasse von Transformationen im allgemeinen auch hinreichend sind (bzw. nach Hinzufügen einer weiteren einfachen notwendigen Bedingung hinreichend sind).

Satz 11. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation $\mathfrak{A}$ die Abschätzung* (52) *und ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum_\nu \varepsilon_\nu s_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, wenn es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ gibt, so daß*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{n\nu} \tag{67}$$

ist.

Beweis. Die Notwendigkeit von (67) folgt aus Satz 1. Wir zeigen, daß (67) hinreichend ist. Wenn wir zeigen, daß die Bedingung (67) die Beschränktheit der Teilsummen von $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ nach sich zieht, wenn also $\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \varepsilon_\nu = O(1)$ $(n \to \infty)$ ist für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so ist der Beweis erbracht, da dann nach Lemma 11 die Konvergenz dieser Reihe[31]) und damit auch ihre $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit folgt.

Die Beschränktheit der Teilsummen ergibt sich folgendermaßen: Nach (67) ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \beta_\mu \Delta_\mu a_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} \Delta_\mu a_{\mu\nu} s_\nu + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \beta_\mu \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\mu a_{\mu\nu} s_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Es ist

$$\mathrm{I} = \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu \Delta \sigma_\mu = O(1) \quad (n \to \infty),$$

und aus der Abschätzung (52) folgt die Beziehung

$$|\mathrm{II}| = O(1) \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \left| \Delta_\mu \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} s_\nu \right| = O\left(\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta \sigma_\mu| \right) = O(1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

[30]) Dieser Satz stellt eine Erweiterung von Satz 5 bei JURKAT-PEYERIMHOFF [6] dar.

[31]) Man erkläre in Lemma 11 die Matrix $(c_{n\nu})$ durch $c_{n\nu} = \varepsilon_\nu$ für $\nu \leq n$, $c_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$.

Bemerkung zum Beweis. Die Konvergenz der Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ hätten wir auch durch Anwendung der Beziehung (55) an Stelle von (52) erschließen können. (Vgl. ZELLER [15].)

Satz 12. *Voraussetzungen wie bei Satz 11. Außerdem sei das Verfahren* $\mathfrak{B}$ *normal. Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* $\mathfrak{B}$*-summierbar für alle* $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, *wenn es eine beschränkte Folge* $\{\beta_n\}$ *gibt, so daß*

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \bar{\Delta}_n a_{n\nu} \tag{68}$$

ist, und wenn die Folge $\{s_n \bar{\varepsilon}_n\}$ $\mathfrak{B}$*-limitierbar*[32]) *ist (zum Werte Null) für alle* $s \in |\mathfrak{A}|_0$.

Beweis. Die Notwendigkeit von (68) folgt aus Satz 2. Ferner ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta \bar{\varepsilon}_\nu + s_n \bar{\varepsilon}_n = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad \left(s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right).$$

Nach Satz 11 konvergiert I für $n \to \infty$ und ist deshalb auch $\mathfrak{B}$-summierbar. Zusammen mit (68) ist also die $\mathfrak{B}$-Limitierbarkeit von II notwendig und hinreichend. Ist aber $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $(n \to \infty)$ konvergent für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so ist nach Lemma 11 sogar $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu \varepsilon_\nu = o(1)$ $(n \to \infty)$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, da $b_{n\nu} \bar{\varepsilon}_\nu = o(1)$ $(n \to \infty, \nu$ fest) ist.

Bemerkungen. In Satz 12 können wir die Bedingung, daß $s_n \bar{\varepsilon}_n$ $\mathfrak{B}$-limitierbar ist, ersetzen durch die Forderung, daß diese Folge $\mathfrak{B}$-beschränkt ist. Nach Lemma 11 folgt daraus die $\mathfrak{B}$-Limitierbarkeit.

Erfüllt eine Transformation $\mathfrak{A}$ die Voraussetzungen von Satz 12 und ist sie absolut permanent, so kann die Bedingung (68) ersetzt werden durch die Bedingung (43) von § 3.

In Satz 12 ist die Bedingung über die $\mathfrak{B}$-Limitierbarkeit der Folge $\{s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu\}$ noch nicht ganz befriedigend; man wird eine Bedingung wünschen, in der die Folge $\{s_\nu\}$ nicht mehr auftritt. Im folgenden werden wir in zwei Fällen, nämlich für konvergenzgleiches $\mathfrak{B}$ und (im nächsten Paragraphen) für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ eine von $\{s_\nu\}$ freie Bedingung angeben.

Satz 13. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung* (52), *so ist die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *genau dann konvergent für alle* $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, *wenn* (68) *gilt und wenn*

$$\bar{\varepsilon}_n = O(a_{nn}) \tag{69}$$

ist.

[32]) Wird $\mathfrak{B}$ in der FF- bzw. RF-Form dargestellt durch die normalen Matrizen $(b_{n\nu})$ bzw. $(\bar{b}_{n\nu})$, dann ist eine Folge $\{s_\nu\}$ $\mathfrak{B}$-limitierbar, wenn $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu$ für $n \to \infty$ konvergiert und eine Reihe $\sum a_\nu$ ist $\mathfrak{B}$-summierbar, wenn $\sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu$ für $n \to \infty$ konvergiert. Ist $\mathfrak{B}$ permanent, dann ist $b_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty, \nu$ fest) und $\bar{b}_{n\nu} - 1 = o(1)$ $(n \to \infty, \nu$ fest).

Zum Beweis müssen wir nur zeigen, daß die Bedingung (69) mit der Konvergenz (gegen Null) von $s_n \bar{\varepsilon}_n$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ gleichbedeutend ist. Dies folgt aber unmittelbar aus den Überlegungen des § 7, da die genaue Größenbeschränkung der s_n gerade $o(1/a_{nn})$ ist.

9. Ein Analogon zu den BOHR-HARDYschen Sätzen.

In der Theorie der gewöhnlichen Summierbarkeit gibt der Satz von BOHR-HARDY die genauen Faktoren ε_ν an, welche jede C_k-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine C_k-summierbare Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ überführen[33]). Kürzlich wurde eine gewisse Erweiterung dieses Satzes für eine ganze Klasse von permanenten Verfahren bewiesen[34]). Für eine Klasse absolut permanenter Verfahren kann man einen entsprechenden Satz beweisen.

Satz 14. *Voraussetzung. Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine normale Transformation mit den Eigenschaften:* $\mathfrak{A}$ *ist permanent, absolut permanent, absolut perfekt und erfüllt die Abschätzungen* (52) *und* (53).

Behauptung. *Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* $\mathfrak{A}$*-summierbar für alle* $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, *wenn es eine beschränkte Folge* $\{\beta_n\}$ *gibt, so daß*

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n \bar{a}_{n\nu} \tag{70}$$

ist.

Der Beweis folgt aus Satz 12 (vgl. die Bemerkung zu Satz 12). Wir müssen nur zeigen, daß $s_n \bar{\varepsilon}_n$ $\mathfrak{A}$-beschränkt ist für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$. Aus (70) folgt, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = O(1)$ ist [vgl. § 3, (46)]. Wegen (53) ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \bar{\varepsilon}_\nu s_\nu = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu| = O(1) \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle} \quad s \in |\mathfrak{A}|_0 \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung. Wir hätten den Beweis auch durch Anwendung von Satz 8 führen können; dabei hätte sich direkt die $\mathfrak{A}$-Limitierbarkeit von $s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ ergeben.

10. Anwendungen auf bewichtete arithmetische Mittel.

Durch ein Verfahren $M(p_n)$ bewichteter arithmetischer Mittel wird jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad \left(p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ P_n \to \infty \right). \tag{71}$$

Jedes Verfahren $M(p_n)$ ist permanent und nach Lemma 1 absolut permanent [es genügt also auch der Bedingung (7)]; außerdem sind die Bedingungen (50) erfüllt, so daß auch die Ungleichungen (52) und (53) richtig sind. Aus der Umkehrtransformation $s_n = \frac{1}{p_n} \overline{\Delta} P_n \sigma_n$ folgt nach Lemma 10, daß

[33]) Vgl. BOSANQUET [2] und die dort zitierte Literatur.

[34]) JURKAT-PEYERIMHOFF [6], Satz 11.

jedes Verfahren $M(p_n)$ absolut perfekt ist. Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Voraussetzungen der Sätze 11 bis 14 für jedes Verfahren $M(p_n)$ erfüllt sind, wir können also diese Sätze auf bewichtete arithmetische Mittel anwenden.

Im vorliegenden Falle können jedoch die Bedingungen (67) und (68) umgeformt und durch wesentlich einfachere ersetzt werden. Wir wollen zunächst diese Umformungen durchführen.

Wird $\mathfrak{A} = M(p_n)$ gesetzt, dann ist (67) gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu = O(1) \quad (n \to \infty), \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right). \tag{72}$$

Die erste dieser Bedingungen folgt nach allgemeinen Überlegungen [Bemerkung zu Satz 1, (38)] aus (67) und die zweite ergibt sich aus der Abschätzung

$$|\varepsilon_\nu| = O(1)\left(\frac{p_\nu}{P_\nu} + p_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left|\Delta_n \frac{1}{P_n}\right|\right) = O\left(\frac{p_\nu}{P_\nu}\right).$$

Umgekehrt folgt die Bedingung (67) wieder aus (72). Setzt man nämlich $\alpha_n = P_n \Delta \frac{\varepsilon_n}{p_n}$, dann folgt aus (72) die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{n+1} \varepsilon_\nu - \frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} \varepsilon_{n+1} = O(1) \quad (n \to \infty);$$

ferner ist

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{p_\nu}{P_n} = p_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta \frac{\varepsilon_n}{p_n} = \varepsilon_\nu \qquad \left(\text{da } \frac{\varepsilon_n}{p_n} = o(1) \text{ ist}\right).$$

Damit ist gezeigt [vgl. die Fußnote [25])], daß die Bedingung (67) aus den Bedingungen (72) folgt.

Mit den Bedingungen (72) können wir also den Satz 11 für den vorliegenden Spezialfall folgendermaßen formulieren:

Satz 15. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren. Die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ ist genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |M(p_n)|_0$, wenn die Bedingungen (72) erfüllt sind.*

Für $\mathfrak{A} = M(p_n)$ ist die Bedingung (68) gleichwertig mit den Bedingungen

$$\bar{\varepsilon}_n = O(1), \qquad \Delta \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \quad (n \to \infty). \tag{73}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den eben durchgeführten Überlegungen, wenn dort stets ε_n durch $\Delta \bar{\varepsilon}_n$ ersetzt wird. In diesem Fall geht (72) über in (73). Auch die Bedingung (70) ist gleichwertig mit (73), da für absolut permanentes $\mathfrak{A}$ die Bedingungen (70) und (68) gleichwertig sind.

Mit den Bedingungen (73) können wir den Satz 12 für den vorliegenden Spezialfall folgendermaßen formulieren:

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein normales permanentes Matrixverfahren. Dann ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$, wenn die*

Bedingungen (73) *erfüllt sind und wenn die Folge* $\{s_n \bar{\varepsilon}_n\}$ $\mathfrak{B}$*-limitierbar ist (zum Wert Null) für alle* $s \in |M(p_n)|_0$.

Für $\mathfrak{A} = M(p_n)$ geht die Bedingung (69) über in

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right). \tag{74}$$

Ist nun die Folge $\{p_n\}$ so beschaffen, daß

$$\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \tag{75}$$

ist, so sind die Bedingungen (73) erfüllt für jede Folge, die (74) erfüllt. Aus dem Satz 13 folgt also:

Satz 17. *Erfüllt die Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingung* (75), *so ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{P_n} |a_n| < +\infty \tag{76}$$

für alle $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$, *während*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{p_n}{P_n} |a_n| < +\infty, \qquad \lambda_n \neq O(1) \quad (\lambda_n > 0) \tag{77}$$

nicht für alle $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$ *richtig ist*[35]).

Die Bedingung (75) ist z.B. erfüllt, wenn p_n monoton fällt.

Satz 18. *Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* $M(p_n)$ *summierbar, für alle* $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$, *wenn die Bedingungen* (73) *erfüllt sind.*

11. Anwendungen auf NÖRLUND-Verfahren.

Durch ein NÖRLUND-Verfahren $N(p_n)$ wird jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \quad \left(p_0 = 1,\ p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ \frac{p_n}{P_n} \to 0\ (n \to \infty)\right). \tag{78}$$

(In diesem Paragraphen wollen wir unter $\{p_n\}$ stets eine Folge mit diesen Eigenschaften verstehen.)

Die zu (78) inverse Transformation erhält man durch folgende Vorschrift: Die Folge $\{k_n\}$ sei erklärt durch[36])

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n = \left(\sum_n p_n z^n\right)^{-1}, \tag{79}$$

dann ist

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} k_{n-\nu} P_\nu \sigma_\nu. \tag{80}$$

[35]) Der Spezialfall $M(p_n) = C_1$ ist bekannt (KOGBETLIANTZ [11]).

[36]) Vgl. etwa HARDY [5]. Aus den Eigenschaften von p_n folgt, daß die Reihe $\sum p_n z^n$ im Einheitskreis konvergiert und im Nullpunkt nicht verschwindet.

Wir wollen im folgenden die allgemeinen Sätze der §§ 8 und 9 auf NÖRLUND-sche Verfahren anwenden. Zunächst werden wir zeigen, daß die Voraussetzungen jener Sätze (absolute Permanenz, absolute Perfektheit, usw.) bei gewissen Klassen von NÖRLUND-Verfahren erfüllt sind.

Lemma 12. *Erfüllt eine Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingung*

$$p_{n+1} \leqq p_n \quad (n \geq 0), \tag{81}$$

so ist das Verfahren $N(p_n)$ *absolut permanent*[37]) *und erfüllt die Bedingung* (50), *also auch die Abschätzungen* (52) *und* (53)[38]).

Beweis. Die Bedingung (50) folgt unmittelbar aus (81), da

$$0 < \frac{p_{n-\nu}}{P_n} \leq \frac{p_{n-1-\nu}}{P_n} \leq \frac{p_{n-1-\nu}}{P_{n-1}} \quad (n > \nu)$$

ist. Ferner ist für $\varrho \geq 1$ und $n > \varrho$

$$\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=\varrho}^{n} p_{n-\nu} = 1 - \sum_{\nu=0}^{\varrho-1} \frac{p_{n-\nu}}{P_n} \geq 1 - \sum_{\nu=0}^{\varrho-1} \frac{p_{n-1-\nu}}{P_{n-1}} = \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{\nu=\varrho}^{n-1} p_{n-1-\nu} > 0.$$

Daraus folgt nach Lemma 1 die absolute Permanenz des Verfahrens $N(p_n)$.

Das folgende Lemma von KALUZA[39]) ermöglicht es uns, eine Aussage über die absolute Perfektheit der Verfahren $N(p_n)$ zu machen.

Lemma 13. *Erfüllt eine Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingungen* (81) *und*

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad (n \geq 1), \tag{82}$$

so besitzt die Folge $\{k_n\}$ *die folgenden Eigenschaften*:

$$k_n < 0\,(n \geq 1), \quad k_0 = \frac{1}{p_0} = 1, \quad 0 \leq \sum_{n=0}^{r} k_n \leq 1 \quad (r \geq 0). \tag{83}$$

Satz 19. *Erfüllt eine Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingungen* (81) *und* (82), *so ist das Verfahren* $N(p_n)$ *absolut perfekt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 10, wenn man die Darstellung (80) der inversen Transformation beachtet; wegen (83) ist nämlich

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |k_{n-\nu} P_\nu| \leq 2P_\nu < +\infty.$$

Bevor wir den Satz 11 auf NÖRLUND-Verfahren anwenden, wollen wir die dort auftretende Bedingung (67) umformen. Erfüllt nämlich die Folge $\{p_n\}$ die Bedingungen (81) und (82), so sind die Bedingungen (67) [für $\mathfrak{A} = N(p_n)$] und $\varepsilon_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ gleichwertig mit

$$\sum_{\nu=0}^{m} P_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} k_{n-\nu}\,\varepsilon_n = O(1) \quad (m \to \infty), \qquad \varepsilon_n = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{84}$$

---

[37]) MEARS [12], S. 597.

[38]) Für wachsende p_n ist dieses Lemma nicht mehr richtig.

[39]) KALUZA [8], vgl. auch SZEGÖ [14] und HARDY [5], th. 22.

Zunächst zeigt eine einfache Rechnung, daß im vorliegenden Fall aus (67) die Beziehung

$$P_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} k_{n-\nu}\,\varepsilon_n = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$$

folgt (dabei ist zu beachten, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} |k_\nu| < +\infty$ ist) und daraus folgt die erste Bedingung in (84). Umgekehrt folgt aus (84) wieder die Bedingung (67) und $\varepsilon_n = o(1)$ $(n \to \infty)$. Setzt man nämlich

$$\alpha_n = P_n \sum_{\mu=n}^{\infty} k_{\mu-n}\,\varepsilon_\mu,$$

so ist $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu = O(1)$ $(m \to \infty)$ und ferner

$$\begin{aligned}\sum_{n=\nu}^{r} \alpha_n \frac{p_{n-\nu}}{P_n} &= \sum_{n=\nu}^{r} \frac{p_{n-\nu}}{P_n} P_n \sum_{\mu=n}^{\infty} k_{\mu-n}\,\varepsilon_\mu \\ &= \sum_{\mu=\nu}^{r} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{\mu} k_{\mu-n}\,p_{n-\nu} + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\,p_{n-\nu} \\ &= \varepsilon_\nu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\,p_{n-\nu}.\end{aligned}$$

Aus (83) folgt, daß

$$\sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\,p_{n-\nu} \leqq 0 \quad (\mu > r) \qquad \text{und} \qquad -\sum_{\mu=r+1}^{\infty} k_{\mu-n} \leqq \sum_{\mu=n}^{r} k_{\mu-n} \quad (r \geqq n)$$

ist, so daß die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\mu=r+1}^{\infty} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\,p_{n-\nu}\right| &= o(1) \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{r} (-k_{\mu-n})\,p_{n-\nu} \\ &= o(1) \sum_{n=\nu}^{r} p_{n-\nu} \sum_{\mu=n}^{r} k_{\mu-n} = o(1) \sum_{\mu=\nu}^{r} \sum_{n=\nu}^{\mu} k_{\mu-n}\,p_{n-\nu} = o(1).\end{aligned}$$

Es ist also $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{p_{n-\nu}}{P_n} = \varepsilon_\nu$ w. z. b. w.

Wir bemerken, daß aus (67) die Beziehung $\varepsilon_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ folgt, wenn das Verfahren $\mathfrak{A}$ die Bedingungen (50), $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty,\ \nu$ fest) und

$$a_{nn} = o(1) \quad (n \to \infty) \tag{85}$$

erfüllt. Die Bedingung (50) ist nach Lemma 12 für $N(p_n)$ erfüllt, wenn die Folge $\{p_n\}$ die Bedingung (81) erfüllt und (85) ist richtig, wenn $P_n \to \infty$ gilt.

Durch Anwendung dieser Überlegungen ergibt sich aus Satz 11 der

Satz 20. *Erfüllt die Folge $\{p_n\}$ die Bedingungen* (81) *und* (82), *ist $P_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |N(p_n)|_0$, wenn gilt:*

$$\sum_{\nu=0}^{m} P_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} k_{n-\nu}\,\varepsilon_\nu = O(1) \quad (m \to \infty) \qquad \textit{und} \qquad \varepsilon_n = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{86}$$

In ähnlicher Weise kann man die Sätze 12, 13 und 14 auf NÖRLUNDsche Verfahren anwenden. Die oben vorgenommene Umformung der Bedingung (67) ergibt eine Umformung der Bedingung (68), wenn stets ε_n durch $\Delta\bar{\varepsilon}_n$ ersetzt wird.

12. Anwendungen auf CESÀROsche Verfahren.

Die CESÀROschen Verfahren C_α ($\alpha > 0$) sind spezielle NÖRLUND-Verfahren $N(p_n)$ mit $p_n = \binom{n+\alpha-1}{n} = A_n^{\alpha-1}$. Ist $0 < \alpha \leq 1$, so erfüllt die Folge $\{A_n^{\alpha-1}\}$ die Bedingungen (81) und (82); die Überlegungen des vorangehenden Paragraphen können also unmittelbar auf die Verfahren C_α mit $0 < \alpha \leq 1$ angewandt werden. Andererseits können wir für die hier betrachtete spezielle Folge $\{p_n\}$ einige Ergebnisse vereinfachen.

Die durch (79) erklärte Folge $\{k_n\}$ geht für C_α über in $k_n = A_n^{-\alpha-1}$. Unter Verwendung des Symbols

$$\Delta^\alpha x_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{-\alpha-1} x_n \tag{87}$$

folgt aus Satz 20 für die Verfahren C_α der

Satz 21. *Ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |C_\alpha|_0$ mit $0 < \alpha \leq 1$, wenn gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^\alpha \Delta^\alpha \varepsilon_\nu = O(1) \quad (m \to \infty), \qquad \varepsilon_\nu = o(1) \quad (\nu \to \infty). \tag{88}$$

Die Bedingung (88) ist z. B. erfüllt für die Folgen

$$\varepsilon_n = \frac{1}{A_n^{1+\delta}} \quad (\delta > 0) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{A_n^\beta} \quad (\beta \geq \alpha). \tag{89}$$

Dies folgt unmittelbar aus den Beziehungen[40])

$$\Delta^\alpha \frac{1}{A_n^{1+\delta}} = \frac{1+\delta}{1+\delta+\alpha} \frac{1}{A_n^{1+\delta+\alpha}} \quad (\delta > 0) \tag{90}$$

[40]) Diese Beziehungen kann man etwa folgendermaßen beweisen: Für $\gamma > 0$ ist

$$\frac{1}{A_n^\gamma} = \gamma \int_0^1 (1-t)^{\gamma-1} t^n \, dt.$$

Also ist

$$\Delta^\alpha \frac{1}{A_n^{1+\delta}} = (1+\delta) \int_0^1 (1-t)^{\delta+\alpha} t^n \, dt = \frac{1+\delta}{1+\delta+\alpha} \frac{1}{A_n^{1+\delta+\alpha}}.$$

Ferner ist

$$\Delta^\alpha \frac{(-1)^n}{A_n^\beta} = \beta (-1)^n \int_0^1 (1+t)^\alpha (1-t)^{\beta-1} t^n \, dt.$$

Aus der Beziehung

$$(1+t)^\alpha = 2^\alpha + \alpha 2^{\alpha-1}(t-1) + O(1)(t-1)^2$$

für $0 \leq t \leq 1$ folgt schließlich (91) durch eine einfache Rechnung.

und

$$(91)\qquad \Delta^{\alpha}\frac{(-1)^n}{A_n^{\beta}} = \frac{2^{\alpha}(-1)^n}{A_n^{\beta}} + \frac{\beta}{\beta+1}\frac{(-1)^{n+1}\alpha\, 2^{\alpha-1}}{A_n^{\beta+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+2}}\right) \quad (\beta \geq \alpha).$$

Wir wollen im folgenden die Sätze 12, 13 und 14 auf die Verfahren C_α anwenden. In diesem Spezialfall können wir die Bedingung (68) bzw. die in diesem Fall damit gleichwertige Bedingung (70) wesentlich vereinfachen. Für $\mathfrak{A} = C_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ ist nämlich die Bedingung (70) gleichwertig mit

$$(92)\qquad \nu^{\alpha+1}\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = O(1) \quad (\nu \geq 1,\ \nu \to \infty), \qquad \bar{\varepsilon}_n = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Die Beziehung $\bar{\varepsilon}_n = O(1)$ folgt allgemein aus (70). Ferner geht (70) für $\mathfrak{A} = C_\alpha$ über in

$$(93)\qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\frac{\beta_n \nu}{n A_n^{\alpha}} \quad (\nu \geq 1), \qquad \bar{\varepsilon}_0 = \beta_0,$$

d.h. es ist

$$\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\frac{\beta_n}{n A_n^{\alpha}} = \Delta^{-\alpha}\frac{\beta_\nu}{\nu A_\nu^{\alpha}} \quad (\nu \geq 1).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß daraus die Beziehung $\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \frac{\beta_\nu}{\nu A_\nu^{\alpha}}$, d.h. die erste der Beziehungen (92) folgt.

Ist eine Folge $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ so beschaffen, daß (92) erfüllt ist, so erklären wir eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ durch

$$(94)\qquad \beta_\nu = \nu A_\nu^{\alpha}\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} \quad (\nu \geq 1), \qquad \beta_0 = \varepsilon_0.$$

Nach einem bekannten Lemma von ANDERSEN ist dann

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \Delta^{-\alpha}\frac{\beta_\nu}{\nu A_\nu^{\alpha}} \quad (\nu \geq 1)$$

und daraus folgt wieder (93). Aus (92) folgt also (70) für $\mathfrak{A} = C_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$.

Mit diesen Überlegungen ergeben sich aus den Sätzen 12, 13 und 14 die folgenden Sätze:

Satz 22. *Ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes normales Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |C_\alpha|_0$, $(0 < \alpha \leq 1)$, wenn die Bedingungen (92) erfüllt sind und wenn die Folge $\{s_n \bar{\varepsilon}_n\}$ $\mathfrak{B}$-limitierbar ist zum Wert Null für alle $s \in |C_\alpha|_0$.*

Jede Folge $\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{A_n^{\alpha}}\right)$ erfüllt die Bedingungen (92), da

$$\sum_{\varrho=\nu}^{\infty} A_{\varrho-\nu}^{-\alpha-1}\frac{1}{\varrho} O\left(\frac{1}{A_\varrho^{\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+1}}\right)\sum_{\varrho=\nu}^{\infty}\left|A_{\varrho-\nu}^{-\alpha-1}\right| = O\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+1}}\right)$$

ist. Aus Satz 13 folgt also der

Satz 23. *Für alle $\sum a_\nu \in |C_\alpha|_0$ $(0 < \alpha \leq 1)$*[41] *ist*

$$(95)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{A_n^{\alpha}} < +\infty.$$

[41] Dieser Satz wurde zuerst von KOGBETLIANTZ [11] bewiesen.

Satz 24. *Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* C_α*-summierbar* $(0<\alpha\leq 1)$ *für alle* $\sum a_\nu \in |C_\alpha|_0$*, wenn die Bedingungen* (92) *erfüllt sind.*

Wir haben uns bisher auf Verfahren C_α mit $0<\alpha\leq 1$ beschränkt. Für $\alpha>1$ sind die Abschätzungen (52) und (53) nicht mehr richtig. Wäre nämlich (52) für ein $\alpha>1$ erfüllt, so würde, wie man durch Einsetzen der speziellen Folge $\{s_\nu\}$ mit $s_k=1$, $s_\nu=0$ $(\nu\neq k)$ erkennt, die folgende Ungleichung richtig sein:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\bar{\Delta}_n \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\right|\leq \frac{1}{A_k^{\alpha}}. \tag{96}$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß die linke Seite dieser Ungleichung von der Größenordnung $1/k$ ist, während die rechte Seite die Größenordnung $1/k^\alpha$ besitzt. Für $\alpha>1$ ist also (96) unmöglich. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch die Ungleichung (53) für $\alpha>1$ nicht mehr gilt.

Die Sätze dieses Paragraphen können trotzdem auf beliebige $\alpha>0$ erweitert werden. Dabei tritt nur noch eine weitere Bedingung über die Größenordnung der ε_ν bzw. $\bar{\varepsilon}_\nu$ hinzu. Wir wollen darauf später zurückkommen.

Literatur.

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] BOSANQUET, L. S.: Note on the BOHR-HARDY theorem. J. Lond. Math. Soc. **17**, 166—173 (1942). — [3] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. J. Lond. Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). — [4] FEKETE, M.: Summabilitási factorsorozatok. Math. és term. ért. **35**, 309—324 (1917). — [5] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [6] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1952). — [7] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). — [8] KALUZA, TH.: Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen. Math. Z. **28**, 161—170 (1928). — [9] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin: Springer 1947. — [10] KNOPP, K., u. G. G. LORENTZ: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. **2**, 10—16 (1949). — [11] KOGBETLIANTZ, E.: Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Sci. math. (2) **49**, 234—255 (1925). — [12] MEARS, F. M.: Absolute regularity and the NÖRLUND mean. Ann. of Math. **38**, 594—601 (1937). — [13] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1952). — [14] SZEGÖ, G.: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn FEJÉR über die LEGENDREschen Polynome. Math. Z. **25**, 172—187 (1926). — [15] ZELLER, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1952).

Gießen (Lahn), Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 8. Juli 1952.)

SPECHT, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 291—335 (1953)

Zur Zahlentheorie der Polynome. IV.

Von
WILHELM SPECHT.

Die zahlentheoretische Untersuchung ganzzahliger Polynome, die ich in einigen Arbeiten[1]) unter Beschränkung auf normierte Polynome durchgeführt habe, läßt sich, wie die vorliegende Arbeit zeigen soll, ohne allzu große Schwierigkeiten auf nichtnormierte Polynome übertragen, wodurch eine größere Tragweite der Theorie gewonnen wird. Gleichzeitig werde ich, da es keine zusätzliche Mühe verursacht, die Betrachtung auf Polynome in mehreren Unbestimmten ausdehnen.

Es seien $m \geq 1$, $k \geq 1$ natürliche Zahlen,

$$f(z,a) = \sum_{(\mu)} a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k} z_0^{\mu_0} z_1^{\mu_1} \dots z_k^{\mu_k} \qquad (\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k = m) \tag{1}$$

eine beliebige Form des Grades m in den $k+1$ Unbestimmten $z_0, z_1, \dots, z_k$ mit reellen (nicht sämtlich verschwindenden) Koeffizienten $a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}$. Ich nenne *Norm* $N(f)$ der Form den positiven Wert

$$N(f) = \Big(\sum_{(\mu)} a^2_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Werden in der Darstellung (1) der Form $f(z,a)$ die Potenzprodukte der Unbestimmten $z_0, z_1, \dots, z_k$ lexikographisch angeordnet durch die Vorschrift:

$$z_0^{\mu_0} z_1^{\mu_1} \dots z_k^{\mu_k} \quad \textit{steht vor} \quad z_0^{\nu_0} z_1^{\nu_1} \dots z_k^{\nu_k},$$

wenn die erste nichtverschwindende unter den Differenzen

$$\mu_0 - \nu_0,\ \mu_1 - \nu_1, \dots, \mu_k - \nu_k$$

positiv ist, so läßt sich in eindeutiger Weise der *letzte* (von Null verschiedene) Koeffizient, der *Leitkoeffizient* der Form $f(z,a)$ und das letzte Glied der Summe (1), das *Leitglied* der Form $f(z,a)$ erklären. Bekanntlich ist das Leitglied (und damit auch der Leitkoeffizient) eines Produktes $f(z,a)\,g(z,b)$ zweier Formen das Produkt der Leitglieder (bzw. Leitkoeffizienten) der Faktoren.

Eine Form $f(z,a)$ möge kurz als *ganze* Form bezeichnet werden, wenn ihre Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, die nicht sämtlich verschwinden. Eine ganze Form $f(z,a)$ besitzt einen eindeutig bestimmten *Inhalt* $d(f)$, d.h. den größten gemeinschaftlichen Teiler aller Koeffizienten $a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}$:

$$d(f) = \text{g. g. T.}\,(a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}) \qquad (\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k = m). \tag{3}$$

[1]) Vgl. SPECHT, W.: Zur Zahlentheorie der Polynome. Sitzgsber. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. **1951**, 139—146. — Zur Zahlentheorie der Polynome. II, III. Math. Nachr. **7**, 105—126, 127—150 (1952). Weiterhin mit ZP II bzw. ZP III zitiert.

Bekanntlich ist der Inhalt $d(f\,g)$ eines Produktes $f(z, a)\,g(z, b)$ zweier Formen gleich dem Produkte der Inhalte der Faktoren:

$$d(f\,g) = d(f)\,d(g). \tag{4}$$

Insbesondere heißt eine ganze Form $f(z, a)$ *primitiv*, wenn ihr Leitkoeffizient positiv und ihr Inhalt $d(f) = 1$ ist. Das Produkt $f(z, a)\,g(z, b)$ zweier primitiver Formen ist wiederum eine primitive Form.

Nun bezeichne $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ für feste natürliche Zahlen $m \geq 2$, $k \geq 1$ und jedes reelle $x \geq 1$ die Menge oder *Klasse*, $K_{m,k}(x)$ die *Anzahl* der ganzen Formen $f(z, a)$ des Grades m in $k+1$ Unbestimmten $z_0, z_1, \ldots, z_k$, die der *Normbedingung*

$$0 < N(f) \leq x \tag{5}$$

unterliegen, wobei sinngemäß auch Formen, die sich lediglich um einen (rationalen) Faktor unterscheiden, als verschiedene Formen zu zählen sind. Entsprechend bezeichne $\mathfrak{K}^*_{m,k}(x)$ die Menge oder *Klasse*, $K^*_{m,k}(x)$ die *Anzahl* der primitiven Formen $f(z, a)$ der Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$.

Die primitive Klasse $\mathfrak{K}^*_{m,k}(x)$ enthält nun eine wohlbestimmte Anzahl $I^*_{m,k}(x)$ von (im Körper der rationalen Zahlen) irreduziblen Formen und eine wohlbestimmte Anzahl $R^*_{m,k}(x)$ von reduziblen Formen:

$$K^*_{m,k}(x) = I^*_{m,k}(x) + R^*_{m,k}(x). \tag{6}$$

Gesucht werden, das ist das zu behandelnde Problem, Abschätzungen dieser Anzahlen in Abhängigkeit von der *Normschranke* $x \geq 1$.

Im folgenden bezeichne $A_n(x)$ für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und jedes reelle $x \geq 1$ die Anzahl der Gitterpunkte in der (gelochten) n-dimensionalen Kugel

$$0 < y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leq x^2 \tag{7}$$

vom Radius x im n-dimensionalen kartesischen Koordinatenraum. Bekanntlich gilt[2]), wenn noch zur Abkürzung

$$\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{8}$$

gesetzt wird:

$$A_2(x) = \alpha_2\,x^2 + O(x^{\frac{3}{4}}), \tag{9.1}$$

$$A_3(x) = \alpha_3\,x^3 + O(x^{\frac{5}{3}}), \tag{9.2}$$

$$A_4(x) = \alpha_4\,x^4 + O(x^2 \log x), \tag{9.3}$$

$$A_n(x) = \alpha_n\,x^n + O(x^{n-2}) \quad \text{für} \quad n \geq 5. \tag{9.4}$$

Es sind dies im Falle $2 \leq n \leq 4$ nicht die besten, bisher erhaltenen Abschätzungen; sie reichen aber für meine Zwecke aus, da wie sich zeigen wird allein

[2]) Einfachheitshalber verweise ich auf die in ZP II gemachten ausführlichen Literaturangaben.

in den beiden Fällen

$$k = 1,\ m = 2 \quad \text{und} \quad k = 1,\ m = 3$$

noch eine Verbesserung der Resultate möglich ist, eine Verbesserung, die wohl wesentlich kräftigerer Hilfsmittel als der hier verwendeten Methode bedarf.

Bezeichnet nun noch $\zeta(s)$ für jedes reelle $s > 1$ den Wert der RIEMANNschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{10}$$

so gilt der

Hauptsatz 1. *Für $k \geq 2$, $m \geq 2$ ist mit $n = \binom{m+k}{m}$*

$$K^*_{m,k}(x) = \frac{\alpha_n}{2\zeta(n)} x^n + O(x^{n-2}), \tag{11.1}$$

$$I^*_{m,k}(x) = \frac{\alpha_n}{2\zeta(n)} x^n + O(x^{n-2}), \tag{11.2}$$

$$R^*_{m,k}(x) = O(x^{n-2}). \tag{11.3}$$

Wegen der bekannten Beziehung

$$A_n(x) = \alpha_n x^n + \Omega(x^{n-2}) \quad \text{für} \quad n \geq 5 \tag{12}$$

ist eine Verbesserung der Restabschätzung nicht möglich, mithin sind die Gln. (11) dieses Satzes als endgültig anzusehen.

Der Beweis des Hauptsatzes 1 ist nicht allzu schwer; etwas mehr Mühe macht der Fall $k = 1$, aber auch nur für die kleineren Grade $m \leq 4$. Führt man noch die Konstanten $\eta(m)$ für $m \geq 3$ ein durch die (konvergenten) Doppelreihen

$$\eta(m) = \sum_{(u,v)}{}' (u^{2m} + u^{2m-2}v^2 + \cdots + u^2 v^{2m-2} + v^{2m})^{-1}, \tag{13}$$

worin die Summe über alle ganzen Zahlen u, v mit $u^2 + v^2 > 0$ zu nehmen ist, so gilt der

Hauptsatz 2. *Für $k = 1$, $m \geq 5$ ist*

$$K^*_{m,1}(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)} x^{m+1} + O(x^{m-1}), \tag{14.1}$$

$$R^*_{m,1}(x) = \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}), \tag{14.2}$$

$$I^*_{m,1}(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)} x^{m+1} - \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}). \tag{14.3}$$

Auch in diesem Falle ist eine Verbesserung der Ergebnisse wegen der Beziehung (12) nicht mehr möglich.

Ebenso erhalten wir im Falle $k = 1$, $m = 4$ noch ein endgültiges Ergebnis; hingegen reicht in den Fällen $k = 1$, $m = 2, 3$ meine Methode nur noch dazu aus, den Gitterpunktsabschätzungen (9.2), (9.3) entsprechende Restabschätzungen zu erzielen.

Es gilt nämlich, wenn noch $\zeta'(s)$ für $s>1$ die Ableitung

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

der RIEMANNschen Zetafunktion $\zeta(s)$ bezeichnet, der

Hauptsatz 3. *Für $k=1$; $2 \leq m \leq 4$ ist*

$$K^*_{2,1}(x) = \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)} x^3 + O(x^{\frac{3}{2}}), \tag{15.1}$$

$$\begin{cases} R^*_{2,1}(x) = \frac{\alpha_2 \beta_0}{2\zeta^2(2)} x^2 \log x + \\ \qquad + \left(\frac{\alpha_2 \gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \frac{\alpha_2 \beta_0 \zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \frac{\alpha_2 \beta_0}{4\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)} \right) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}), \end{cases} \tag{15.2}$$

$$\begin{cases} I^*_{2,1}(x) = \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)} x^3 - \frac{\alpha_2 \beta_0}{2\zeta^2(2)} x^2 \log x - \\ \qquad - \left(\frac{\alpha_2 \gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \frac{\alpha_2 \beta_0 \zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \frac{\alpha_2 \beta_0}{4\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)} \right) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}) \end{cases} \tag{15.3}$$

mit den Konstanten

$$\beta_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2\varphi}} \approx 1{,}6858, \tag{15.4}$$

$$\gamma_0 = \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{1 \leq u^2+v^2 \leq x} \frac{1}{\sqrt{u^4 + u^2 v^2 + v^4}} - 2\beta_0 \log x \right), \tag{15.5}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log(1 + \frac{1}{2}\sin\varphi \sin\psi)}{1 + \frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi} \, d\varphi \, d\psi, \tag{15.6}$$

ferner

$$K^*_{3,1}(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)} x^4 + O(x^2 \log x), \tag{16.1}$$

$$R^*_{3,1}(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 - \frac{\alpha_3 \gamma_3}{4\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x), \tag{16.2}$$

$$I^*_{3,1}(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)} x^4 - \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 + \frac{\alpha_3 \gamma_3}{4\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x) \tag{16.3}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi \, d\psi}{\sqrt{(\frac{1}{4} + \cos^2\varphi\cos^2\psi)(\frac{1}{4} + \sin^2\varphi\sin^2\psi)}}, \tag{16.4}$$

schließlich

$$K^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_5}{2\zeta(5)} x^5 + O(x^3), \tag{17.1}$$

$$R^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_4 \eta(4)}{4\zeta^2(4)} x^4 + \frac{\alpha_3 \gamma_4}{2\zeta^2(3)} x^3 \log x + O(x^3), \tag{17.2}$$

$$I^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_5}{2\zeta(5)} x^5 - \frac{\alpha_4 \eta(4)}{4\zeta^2(4)} x^4 - \frac{\alpha_3 \gamma_4}{2\zeta^2(3)} x^3 \log x + O(x^3), \tag{17.3}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_4 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(2-\cos^2\varphi\cos\psi)\,(2+\cos^2\varphi\cos\psi-\sin^2 2\varphi\,(1+\cos\psi))}}. \tag{17.4}$$

Die Hauptsätze 2 und 3 enthalten implizite auch die Lösung eines Problems, das der Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen war:

Es bezeichne $\mathfrak{R}_m^*(x)$ die *Klasse*, $K_m^*(x)$ die *Anzahl der normierten, primitiven, ganzzahligen Polynome*

$$f(z,a) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m \tag{18.1}$$

vom Grade $m \geq 2$, deren Norm die Normschranke $x \geq 1$ nicht überschreitet:

$$a_m > 0, \tag{18.2}$$

$$\text{g.g.T. } (a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1, \tag{18.3}$$

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2. \tag{18.4}$$

Es bezeichne $I_m^*(x)$ die Anzahl der (im Körper der rationalen Zahlen) irreduziblen Polynome $f(z,a)$ aus $\mathfrak{R}_m^*(x)$. Dann gilt mit den bereits erklärten Konstanten:

Hauptsatz 4. *Für die Anzahlen $K_m^*(x)$, $I_m^*(x)$ bestehen die Gleichungen*

$$K_2^*(x) = \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}x^3 - \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)}x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}), \tag{19.1}$$

$$K_3^*(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)}x^4 - \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}x^3 + O(x^2\log x), \tag{19.2}$$

$$K_m^*(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)}x^{m+1} - \frac{\alpha_m}{2\zeta(m)}x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geq 4 \tag{19.3}$$

und

$$\begin{cases} I_2^*(x) = \dfrac{\alpha_3}{2\zeta(3)}x^3 - \dfrac{\alpha_2\beta_0}{2\zeta^2(2)}x^2\log x - \\ \qquad - \left(\dfrac{\alpha_2\gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \dfrac{\alpha_2\beta_0\zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \dfrac{\alpha_2\beta_0}{4\zeta^2(2)} + \dfrac{\gamma_2'}{8\zeta^2(2)}\right)x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}), \end{cases} \tag{20.1}$$

$$I_3^*(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)}x^4 - \frac{\alpha_3\eta(3)}{4\zeta^2(3)}x^3 + \frac{\alpha_3\gamma_3}{4\zeta^3(2)}x^2\log^2 x + O(x^2\log x), \tag{20.2}$$

$$I_4^*(x) = \frac{\alpha}{2\zeta(5)}x^5 - \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)}x^4 - \frac{\alpha_3\gamma_4}{2\zeta^2(3)}x^3\log x + O(x^3), \tag{20.3}$$

$$I_m^*(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)}x^{m+1} - \frac{\alpha_m\eta(m)}{4\zeta^2(m)}x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geq 5. \tag{20.4}$$

Auch hier lassen sich in den Fällen $m = 2, 3$ durch kräftigere Methoden wohl noch Verbesserungen erzielen, während die Gleichungen für $m \geq 4$ als endgültig anzusehen sind.

Im folgenden mögen $c_0, c_1, \ldots, c_{28}$ Konstanten bezeichnen, die, sofern nichts anderes ausdrücklich hervorgehoben wird, allein von den Zahlen k, m abhängen; im gleichen Sinne sind auch sämtliche O-Abschätzungen zu verstehen.

I.

Bekanntlich gibt es in $k+1$ Unbestimmten $z_0, z_1, \ldots, z_k$ genau

(21.4) $$n = n(m,k) = \binom{m+k}{m}$$

verschiedene Potenzprodukte $z_0^{\mu_0} z_1^{\mu_1} \ldots z_k^{\mu_k}$ des Grades

$$m = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k;$$

ebenso bekannt ist die Gleichung

(21.2) $$n(m,k) = n(m,k-1) + n(m-1,k).$$

Hieraus entnehmen wir die Ungleichungen

(21.3) $$n(m,k) > n(m-1,k); \qquad n(m,k) > n(m,k-1)$$

und

(22.1) $$n(m,k) \geq 3 \quad \text{für} \quad k \geq 1;\ m \geq 2,$$

(22.2) $$n(m,k) \geq 6 \quad \text{für} \quad k \geq 2;\ m \geq 2,$$

(22.3) $$n(s,k) \leq n(m,k) - 3 \quad \text{für} \quad k \geq 2;\ m > s \geq 1.$$

Denn nach (21.3) gilt

$$n(m,k) \geq n(2,1) = \binom{3}{2} = 3 \quad \text{für} \quad k \geq 1;\ m \geq 2,$$

$$n(m,k) \geq n(2,2) = \binom{4}{2} = 6 \quad \text{für} \quad k \geq 2;\ m \geq 2$$

und

$$n(s,k) \leq n(m-1,k) = n(m,k) - n(m,k-1)$$
$$\leq n(m,k) - n(2,1) = n(m,k) - 3 \quad \text{für} \quad k \geq 2;\ m > s \geq 1.$$

Die der Klasse $\mathfrak{R}_{m,k}(x)$ aller ganzen Formen $f(z,a)$ des Grades m in $k+1$ Unbestimmten auferlegte Normbedingung

$$0 < N^2(f) = \sum_{(\mu)} a^2_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_k} \leq x^2$$

zeigt nun sogleich, daß die Anzahl $K_{m,k}(x)$ der Formen dieser Klasse mit der Gitterpunktsanzahl $A_n(x)$ der (gelochten) n-dimensionalen Kugel vom Radius x mit

$$n = n(m,k) = \binom{m+k}{m}$$

übereinstimmt. Folglich ist wegen (9)

(23.1) $$K_{m,k}(x) = \alpha_n x^n + O(x^{n-2}) \quad \text{für} \quad n = \binom{m+k}{m} \geq 5,$$

(23.2) $$K_{m,k}(x) = \alpha_4 x^4 + O(x^r \log x) \quad \text{für} \quad n = \binom{m+k}{m} = 4,$$

(23.3) $$K_{m,k}(x) = \alpha_3 x^3 + O(x^{\frac{3}{2}}) \quad \text{für} \quad n = \binom{m+k}{m} = 3.$$

Nach (22) ist

(24.1) $$\binom{m+k}{m} = 4 \quad \text{nur für} \quad k = 1;\ m = 3$$

(24.2) $$\binom{m+k}{m} = 3 \quad \text{nur für} \quad k = 1;\ m = 2$$

möglich, so daß, von diesen beiden Sonderfällen abgesehen, stets die erste Gl. (23.1) zutrifft.

Um hieraus die Anzahl $K^*_{m,k}(x)$ der primitiven Formen zu gewinnen, zerlege man die Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ in die Teilklassen $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$ der Formen $f(z,a)$ vom Inhalte $d(f)=d$. Offensichtlich gilt für den Inhalt $d(f)$ einer Form $f(z,a)$ aus $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ die Ungleichung

$$1 \leq d(f) \leq N(f) \leq x,$$

so daß die (mengentheoretische) Summe

$$\mathfrak{K}_{m,k}(x) = \sum_{1 \leq d \leq x} \mathfrak{K}^d_{m,k}(x) \tag{25}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ in elementfremde Teilklassen darstellt.

Jede Form $f(z,a)$ aus $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$ kann eindeutig in der Gestalt

$$f(z,a) = \pm d\, g(z,b)$$

mit einer primitiven Form $g(z,b)$ der Norm

$$N(g) = \frac{1}{d} N(f),$$

also einer Form $g(z,b)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{K}^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$ dargestellt werden; umgekehrt liefert jede primitive Form $g(z,b)$ der Klasse $\mathfrak{K}^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$ durch

$$f(z,a) = \pm d\, g(z,b)$$

zwei Formen der Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ vom Inhalte $d(f)=d$, d.h. aus der Teilklasse $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$. Daher enthält die Teilklasse $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$ genau $2K^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$ verschiedene Formen, weshalb nach (25) die Gleichung

$$K_{m,k}(x) = 2 \sum_{1 \leq d \leq x} K^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right) \tag{26.1}$$

besteht. Mit der MÖBIUSschen Funktion $\mu(d)$ findet man hieraus nach einer bekannten Umkehrungsformel die Darstellung

$$2K^*_{m,k}(x) = \sum_{1 \leq d \leq x} \mu(d)\, K_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right). \tag{26.2}$$

Somit führen die Gln. (23) auf

$$\begin{aligned} 2K^*_{2,1}(x) &= \sum_{1 \leq d \leq x} \mu(d)\, K_{2,1}\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= \sum_{1 \leq d \leq x} \mu(d)\, A_3\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= \sum_{1 \leq d \leq x} \mu(d) \left\{\alpha_3 \left(\frac{x}{d}\right)^3 + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} \\ &= \alpha_3 x^3 \sum_{1 \leq d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^3} + O\left(x^{\frac{3}{2}} \sum_{1 \leq d \leq x} d^{-\frac{3}{2}}\right), \end{aligned}$$

$$2K^*_{2,1}(x) = \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, K_{2,1}\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, A_4\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\left\{\alpha_4\left(\frac{x}{d}\right)^4 + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^2 \log\frac{x}{d}\right)\right\}$$
$$= \alpha_4 x^4 \sum_{1\le d\le x} \frac{\mu(d)}{d^4} + O\left(x^2 \log x \sum_{1\le d\le x} d^{-2}\right)$$

und in allen anderen Fällen

$$2K^*_{m,k}(x) = \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, K_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, A_n\left(\frac{x}{d}\right) \qquad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\left\{\alpha_n\left(\frac{x}{d}\right)^n + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{n-2}\right)\right\}$$
$$= \alpha_n x^n \sum_{1\le d\le x} \frac{\mu(d)}{d^n} + O\left(x^{n-2} \sum_{1\le d\le x} d^{-n+2}\right).$$

Nun ist bekanntlich mit der RIEMANNschen Zetafunktion $\zeta(s)$ für $s>1$:

$$\sum_{1\le d\le x} \frac{\mu(d)}{d^s} = \frac{1}{\zeta(s)} - \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^s}$$

und

$$\left|\sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^s}\right| \le \sum_{d>x} \frac{1}{d^s} = O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^s}\right) = O(x^{1-s}),$$

ferner für $s>1$

$$\sum_{1\le d\le x} \frac{1}{d^s} = O(1).$$

Damit erhalten wir

$$2K^*_{2,1}(x) = \alpha_3 x^3\left(\frac{1}{\zeta(3)} + O(x^{-2})\right) + O(x^2)$$
$$= \frac{\alpha_3}{\zeta(3)} x^3 + O(x^2),$$
$$2K^*_{3,1}(x) = \alpha_4 x^4\left(\frac{1}{\zeta(4)} + O(x^{-3})\right) + O(x^2 \log x)$$
$$= \frac{\alpha_4}{\zeta(4)} x^4 + O(x^2 \log x)$$

und in allen anderen Fällen

$$2K^*_{m,k}(x) = \alpha_n x^n\left(\frac{1}{\zeta(n)} + O(x^{1-n})\right) + O(x^{n-2})$$
$$= \frac{\alpha_n}{\zeta(n)} x^n + O(x^{n-2}) \qquad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}.$$

Damit sind die Gln. (11.1), (14.1), (15.1), (16.1) und (17.1) der Hauptsätze 1, 2 und 3 bewiesen.

Ist $m = r + s$ mit $r > 0$, $s > 0$ eine Zerlegung des Grades $m \geq 2$ in natürliche Zahlen, so bezeichne $P_{r,s,k}(x)$ die Anzahl der (im Falle $r = s$ geordneten) Paare ganzer Formen $g(z, u)$, $h(z, v)$ der Grade r, s, deren Produkt $f(z, a) = g(z, u)\, h(z, v)$ eine Form der Klasse $\mathfrak{R}_{m,k}(x)$ ist, ebenso $P^*_{r,s,k}(x)$ die Anzahl der (im Falle $r = s$ geordneten) Paare primitiver Formen $g(z, u)$, $h(z, v)$ der Grade r, s, deren (primitives) Produkt $f(z, a) = g(z, u)\, h(z, v)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,k}(x)$ angehört.

Es wird sich zeigen, daß es allein darauf ankommt, die Anzahlen $P_{r,s,k}(x)$ und $P^*_{r,s,k}(x)$ abzuschätzen, wobei übrigens im Falle $k \geq 2$ bereits die triviale Ungleichung

$$P^*_{r,s,k}(x) \leq P_{r,s,k}(x)$$

die Aufgabe auf die Bestimmung der Anzahl $P_{r,s,k}(x)$ zurückführt.

Hierzu beweisen wir zunächst

Satz 1. *Sind $g(z, u)$, $h(z, v)$ zwei beliebige Formen der Grade r, s mit reellen Koeffizienten, so gelten mit (allein von r, s abhängigen) positiven Konstanten c_0, c_1 Ungleichungen der Gestalt*

$$c_0 N(g) N(h) \leq N(g h) \leq c_1 N(g) N(h). \tag{27}$$

Die Koeffizienten des Produktes $f(z, a) = g(z, u)\, h(z, v)$ sind nämlich Bilinearformen in den (unbestimmten) Koeffizienten u, v der Faktoren $g(z, u)$ und $h(z, v)$. Daher ist $N(f) = N(g h)$ eine in u bzw. v homogene Funktion der Dimension 1, für die $N(f) = 0$ nur im Falle $N(g) N(h) = 0$ möglich ist. Infolgedessen besitzt $N(g h)$ als Funktion der Koeffizienten u, v unter der Nebenbedingung

$$N(g) = N(h) = 1$$

ein positives Minimum c_0 und ein (positives) Maximum c_1. Dann gelten wegen der Homogenität aber auch die Ungleichungen (27).

Satz 2. *In den Fällen*

$$1 \leq r \leq s \leq m - 1; \qquad 2 \leq m = r + s; \quad k \geq 2$$

und

$$2 \leq r \leq s \leq m - 2; \qquad 5 \leq m = r + s; \quad k = 1$$

gilt

$$\left.\begin{aligned} P_{r,s,k}(x) &= O(x^{n-2}) \qquad (28.1)\\ P^*_{r,s,k}(x) &= O(x^{n-2}) \qquad (28.2) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}.$$

Offensichtlich folgt (28.2) unmittelbar aus (28.1), so daß wir uns nur mit der ersten Abschätzung zu beschäftigen haben. Nach Definition zählt $P_{r,s,k}(x)$ die Paare $g(z, u)$, $h(z, v)$, die die Normbedingung

$$0 < N(g h) \leq x$$

der Klasse $\mathfrak{R}_{m,k}(x)$ erfüllen. Jedes dieser Paare erfüllt nach (27) auch die Bedingung

$$0 < N(g)\,N(h) \leq \frac{1}{c_0}\,N(g\,h) \leq \frac{x}{c_0}.$$

Bezeichnet daher $Q_{r,s,k}(y)$ die Anzahl der Paare $g(z,u)$, $h(z,v)$, die die Bedingung

(29) $$0 < N(g)\,N(h) \leq y$$

erfüllen, so ist gewiß

$$P_{r,s,k}(x) \leq Q_{r,s,k}\left(\frac{x}{c_0}\right).$$

Mithin genügt es zum Beweise des Satzes 2, die Beziehung

$$Q_{r,s,k}(y) = O(y^{n-2}) \quad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}$$

in den dort angegebenen Fällen nachzuweisen.

Nun läßt sich (29) in die beiden Bedingungen

$$0 < N(g) \leq y \quad \text{und} \quad 0 < N(h) \leq \frac{y}{N(g)}$$

zerlegen. Daher ist (in leichtverständlicher Schreibweise)

$$Q_{r,s,k}(y) = \sum_{0<N(g)\leq y} K_{s,k}\left(\frac{y}{N(g)}\right)$$

und folglich nach (23):

$$Q_{r,s,k}(y) = O\left(\sum_{0<N(g)\leq y} \left(\frac{y}{N(g)}\right)^{n_2}\right),$$

wenn noch abkürzend

$$n_1 = \binom{r+k}{r}; \qquad n_2 = \binom{s+k}{s}$$

gesetzt wird.

Bezeichnen wir einfachheitshalber die Koeffizienten (u) der Form $g(z,u)$ in lexikographischer Anordnung mit $u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}$, so ist nach bekannter Methode

$$\sum_{0<N(g)\leq y} \left(\frac{y}{N(g)}\right)^{n_2} = y^{n_2} \sum_{0<u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n_1}^2\leq y^2} (u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n_1}^2)^{-\frac{n_2}{2}}$$

$$= O\left(y^{n_2} \int_1^y t^{n_1-n_2-1}\,dt\right).$$

Hieraus folgt wegen $r \leq s$, also $n_1 \leq n_2$

$$Q_{r,s,k}(y) = \begin{cases} O(y^{n_2}) & \text{für} \quad r < s \quad \text{oder} \quad n_1 < n_2, \\ O(y^{n_2}\log y) & \text{für} \quad r = s \quad \text{oder} \quad n_1 = n_2. \end{cases}$$

Im Falle $k \geq 2$ ist für $1 \leq r \leq s \leq m-1$ nach einer früheren Bemerkung

$$n_2 = \binom{s+k}{s} \leq \binom{m+k}{m} - 3 = n - 3$$

und deshalb

$$Q_{r,s,k}(y) = O(y^{n_2} \log y) = O(y^{n_2+1}) = O(y^{n-2}).$$

Im Falle $k=1$ ist wegen

$$n_2 = \binom{s+1}{s} = s+1; \qquad n = \binom{m+1}{m} = m+1$$

für $2 \leq r < s \leq m-2$ und $m \geq 5$

$$Q_{r,s,1}(y) = O(y^{s+1}) = O(y^{m-1}) = O(y^{n-2}).$$

Der noch verbleibende Fall $2 \leq r = s = \frac{m}{2}$, der nur für ein gerades m eintreten kann, liefert wegen $n_2 = \frac{m}{2}+1$; $n = m+1$

$$Q_{r,s,1}(y) = O\left(y^{\frac{m}{2}+1} \log y\right) = O\left(y^{\frac{m}{2}+2}\right) = O(y^{m-1}) = O(y^{n-2}),$$

sobald

$$\frac{m}{2} + 2 \leq m-1 \quad \text{oder} \quad m \geq 6$$

ist.

Satz 3. *Im Falle $k \geq 2$; $m \geq 2$ ist*

$$R^*_{m,k}(x) = O(x^{n-2}) \qquad \textit{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}. \tag{30}$$

Jede reduzible Form $f(z,a)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,k}(x)$ läßt sich als Produkt $f(z,a) = g(z,u)\,h(z,v)$ von primitiven Formen $g(z,u)$, $h(z,v)$ der Grade r, s mit $1 \leq r \leq s \leq m-1$; $r+s=m$ darstellen. Folglich ist nach Satz 2

$$0 \leq R^*_{m,k}(x) \leq \sum_{1 \leq r \leq \frac{m}{2}} P^*_{r,m-r,k}(x) = O(x^{n-2}) \qquad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}.$$

Damit ist (11.3) und der Hauptsatz 1 vollständig bewiesen.

II.

Satz 4. *Im Falle $k=1$; $m \geq 5$ ist*

$$R^*_{m,1}(x) = P^*_{1,m-1,1}(x) + O(x^{m-1}). \tag{31}$$

Die Anzahl derjenigen reduziblen Formen $f(z,a)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$, die keinen linearen Faktor besitzen, ist nach Satz 2 für $m \geq 5$ nur ein $O(x^{m-1})$; ebenso ist die Anzahl der reduziblen Formen $f(z,a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$, die mehr als einen linearen Faktor besitzen, also in $P^*_{1,m-1,1}(x)$ mehrfach gezählt werden, nur ein $O(x^{m-1})$, da die Linearfaktoren zu Faktoren höheren Grades zusammengefaßt werden können. Die reduziblen Formen $f(z,a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$ schließlich, die genau einen linearen Faktor besitzen, werden in $P^*_{1,m-1,1}(x)$ auch genau einmal gezählt. Mithin ist in der Tat

$$R^*_{m,1}(x) = P^*_{1,m-1,1}(x) + O(x^{m-1}),$$

so daß wir zum Beweise des Hauptsatzes 2 nur noch die Anzahl $P^*_{1,m-1,1}(x)$ zu bestimmen haben.

Eine Form $f(z, a)$ der Klasse $\mathfrak{R}_{m,1}(x)$ kann in der etwas vereinfachten Gestalt

$$f(z, a) = a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} z_1 + \cdots + a_m z_1^m$$

geschrieben werden, wodurch sich die Normbedingung zu

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2$$

abändert. Um zunächst die Anzahl $P_{1,m-1,1}(x)$ der Produkte

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0^{m-1} + v_1 z_0^{m-2} z_1 + \cdots + v_{m-1} z_1^{m-1})$$

aus $\mathfrak{R}_{m,1}(x)$ zu bestimmen, haben wir also die Gitterpunkte

$$(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$$

des $(m+2)$-dimensionalen kartesischen Raumes abzuzählen, für die

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2$$

oder

$$(32) \quad \begin{cases} 0 < \varphi(u, v) = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{m-1}^2) + \\ \qquad + 2u_0 u_1 (v_0 v_1 + v_1 v_2 + \cdots + v_{m-2} v_{m-1}) \leq x^2 \end{cases}$$

gilt. Für jedes feste Wertepaar u_0, u_1 mit $u_0^2 + u_1^2 > 0$ stellt die Gleichung

$$\varphi(u, v) = x^2$$

ein Ellipsoid $\mathfrak{E}_m(u)$ des m-dimensionalen kartesischen Raumes dar. Ist daher $E_m(u)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(v) = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ im Bereiche

$$0 < \varphi(u, v) \leq x^2$$

bei festen Werten (u), so wird

$$(33) \qquad P_{1,m-1,1}(x) = \sum_{(u)}{}' E_m(u),$$

wenn (u) alle Gitterpunkte der Ebene mit Ausschluß des Nullpunktes durchläuft.

Nun besteht aber nach Satz 1 für beliebige reelle Werte (u, v) eine Ungleichung der Gestalt

$$(34) \quad \begin{cases} c_0^2 (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{m-1}^2) \leq \varphi(u, v) \\ \qquad \leq c_1^2 (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{m-1}^2) \end{cases}$$

mit positiven Konstanten c_0, c_1. Daher kann die Beschränkung

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2 \quad \text{mit} \quad c_2 = c_0^{-1}$$

vorgenommen werden. Zugleich zeigt diese Ungleichung, daß die (etwa der Größe nach geordneten) Eigenwerte $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_{m-1}$ der quadratischen Form $\varphi(u, v)$ in (v) bei festen Werten (u) der Beschränkung

$$c_0^2 (u_0^2 + u_1^2) \leq \omega_0 \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_{m-1} \leq c_1^2 (u_0^2 + u_1^2)$$

unterliegen, so daß für die Halbachsen des Ellipsoids $\mathfrak{E}_m(u)$ die Ungleichung

$$b_\mu = \frac{x}{\sqrt{\omega_\mu}} \leq \frac{c_2 x}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

besteht. Setzen wir also D_m für die Determinante

$$D_m = \omega_0 \omega_1 \ldots \omega_{m-1}$$

der quadratischen Form $\varphi(u, v)$ in (v), so ist nach einem früheren Ergebnis[3])

$$E_m(u) - \frac{\alpha_m x^m}{\sqrt{D_m}} < c_3 \left(1 + \frac{c_2 x}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}}\right)^{m-1} < c_4 x^{m-1} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m-1}{2}}$$

und folglich

$$P_{1,m-1,1}(x) = \alpha_m x^m \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} + O\left(x^{m-1} \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m-1}{2}}\right)$$

Daraus erhält man, für $m \geq 4$ wegen

$$\sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m-1}{2}} < \sum_{(u)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{\frac{1-m}{2}} = O\left(\int_1^\infty t^{2-m}\, dt\right) = O(1),$$

für $m = 3$ wegen

$$\sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-1} = O\left(\int_1^{c_2 x} t^{-1}\, dt\right) = O(\log x)$$

die Gleichungen

$$P_{1,m-1,1}(x) = \alpha_m x^m \sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} + O(x^{m-1}) \quad \text{für} \quad m \geq 4, \tag{35.1}$$

$$P_{1,2,1}(x) = \alpha_3 x^3 \sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_3^{-\frac{1}{2}} + O(x^2 \log x) \quad \text{für} \quad m = 3. \tag{35.2}$$

Für die noch zu bestimmende m-reihige Determinante

$$D_m = \begin{vmatrix} u_0^2 + u_1^2 & u_0 u_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_0 u_1 & u_0^2 + u_1^2 & u_0 u_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & u_0 u_1 & u_0^2 + u_1^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_0^2 + u_1^2 & u_0 u_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_0 u_1 & u_0^2 + u_1^2 \end{vmatrix}$$

finden wir leicht die Rekursionsformel

$$D_m = (u_0^2 + u_1^2)\, D_{m-1} - u_0^2 u_1^2\, D_{m-2}$$

und die Anfangswerte

$$D_0 = 1; \qquad D_1 = u_0^2 + u_1^2; \qquad D_2 = u_0^4 + u_0^2 u_1^2 + u_1^4$$

[3]) Vgl. ZP II, Satz 7.

und damit durch vollständige Induktion

$$D_m = u_0^{2m} + u_0^{2m-2} u_1^2 + \cdots + u_0^2 u_1^{2m-2} + u_1^{2m}. \tag{36.1}$$

Nun ist für $m \geq 3$ die Doppelreihe

$$\eta(m) = \sum_{(u)}{}' D_m^{-\frac{1}{2}} \tag{36.2}$$

über die Gitterpunkte $(u) = (u_0, u_1)$ der Ebene mit Ausschluß des Nullpunktes konvergent und demnach

$$\sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} = \eta(m) - \sum_{u_0^2 + u_1^2 > (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} = \eta(m) + O(x^{2-m}) \tag{36.3}$$

wegen

$$\sum_{u_0^2 + u_1^2 > (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} \leq c_0^{-m} \sum_{u_0^2 + u_1^2 > (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= O\left(\int_{c_2 x}^{\infty} t^{1-m}\, dt \right) = O(x^{2-m}).$$

Hieraus entnehmen wir

Satz 5. *Im Falle* $k = 1$; $m \geq 3$ *ist*

$$P_{1, m-1, 1}(x) = \alpha_m \eta(m)\, x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geq 4, \tag{37.1}$$

$$P_{1, 2, 1}(x) = \alpha_3 \eta(3)\, x^3 + O(x^2 \log x) \quad \textit{für} \quad m = 3, \tag{37.2}$$

und

$$P^*_{1, m-1, 1}(x) = \frac{\alpha_m \eta(m)}{4 \zeta^2(m)}\, x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geq 4, \tag{38.1}$$

$$P^*_{1, 2, 1}(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4 \zeta^2(3)}\, x^3 + O(x^2 \log x) \quad \textit{für} \quad m = 3. \tag{38.2}$$

Auf Grund der Gln. (35) und (36.3) ist nämlich für $m \geq 4$

$$P_{1, m-1, 1}(x) = \alpha_m x^m \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} + O(x^{m-1})$$

$$= \alpha_m \eta(m)\, x^m + O(x^2) + O(x^{m-1})$$

$$= \alpha_m \eta(m)\, x^m + O(x^{m-1}),$$

für $m = 3$

$$P_{1, 2, 1}(x) = \alpha_3 x^3 \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_3^{-\frac{1}{2}} + O(x^2 \log x)$$

$$= \alpha_3 \eta(3)\, x^3 + O(x^2) + O(x^2 \log x)$$

$$= \alpha_3 \eta(3)\, x^3 + O(x^2 \log x).$$

Der Übergang zur Anzahl $P^*_{1,m-1,1}(x)$ läßt sich in folgender Weise erreichen: Jedes in $P_{1,m-1,1}(x)$ gezählte Formenpaar

$$g(z,u)=u_0z_0+u_1z_1;\qquad h(z,v)=v_0z_0^{m-1}+v_1z_0^{m-2}z_1+\cdots+v_{m-1}z_1^{m-1}$$

kann mit den größten gemeinschaftlichen Teilern

$$d_1=(u_0,u_1);\qquad d_2=(v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})$$

in der Gestalt

$$g(z,u)=\pm d_1g^*(z,u');\qquad h(z,v)=\pm d_2h^*(z,v')$$

mit gleichgradigen primitiven Formen $g^*(z,u')$, $h^*(z,v')$ geschrieben werden. Da nach Voraussetzung das Produkt $f(z,a)=g(z,u)\,h(z,v)$ aus der Klasse $\mathfrak{R}_{m,1}(x)$ stammt, gehört das Produkt $f^*(z,a)=g^*(z,u')\,h^*(z,v')$ der Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,1}\left(\frac{x}{d_1d_2}\right)$ an, weshalb das Paar $g^*(z,u')$, $h^*(z,v')$ in $P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1d_2}\right)$ zu zählen ist. Umgekehrt aber liefert jedes Paar primitiver Formen $g^*(z,u')$, $h^*(z,v')$, das in $P^*_{1,m-1,1}(x/d)$ mit einer ganzen Zahl d aus dem Intervall $1\leq d\leq x$ gezählt wird, für jede Zerlegung $d=d_1d_2$ genau vier verschiedene Paare

$$g(z,u)=\pm d_1g^*(z,u');\qquad h(z,v)=\pm d_2h^*(z,v')$$

von Formen, die in $P_{1,m-1,1}(x)$ zu zählen sind. Mithin gilt

$$P_{1,m-1,1}(x)=4\sum_{1\leq d_1d_2\leq x}P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1d_2}\right),\tag{39}$$

wobei die Summe über alle Paare natürlicher Zahlen d_1, d_2 mit $1\leq d_1d_2\leq x$ zu erstrecken ist.

Setzen wir zur Abkürzung vorübergehend

$$\sum_{1\leq d\leq y}P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{y}{d}\right)=F(y),$$

so ist nach der Umkehrungsformel

$$P^*_{1,m-1,1}(y)=\sum_{1\leq d\leq y}\mu(d)\,F\left(\frac{y}{d}\right).$$

Damit erhalten wir aus (39) zunächst

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}P_{1,m-1,1}(x)&=\sum_{1\leq d_1\leq x}\ \sum_{1\leq d_2\leq\frac{x}{d_1}}P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1d_2}\right)\\&=\sum_{1\leq d_1\leq x}F\left(\frac{x}{d_1}\right),\end{aligned}$$

also wiederum nach der Umkehrungsformel

$$F(x)=\tfrac{1}{4}\sum_{1\leq d_1\leq x}\mu(d_1)\,P_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1}\right).$$

Daraus folgt

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \sum_{1\le d_2\le x} \mu(d_2)\, F\left(\frac{x}{d_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{1\le d_2\le x} \mu(d_2) \sum_{1\le d_1\le \frac{x}{d_2}} \mu(d_1)\, P_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right),$$

also

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2)\, P_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right). \tag{40}$$

Nun entnimmt man den Gln. (37) zunächst für $m \geq 4$:

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2) \left\{\alpha_m \eta(m) \frac{x^m}{d_1^m d_2^m} + O\left(\frac{x^{m-1}}{d_1^{m-1} d_2^{m-1}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\alpha_m \eta(m)}{4} x^m \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m} + O\left(x^{m-1} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{1}{d_1^{m-1} d_2^{m-1}}\right)$$

$$= \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}).$$

Denn es ist

$$0 < \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{1}{d_1^{m-1} d_2^{m-1}} < \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{m-1}} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^{m-1}} = O(1)$$

und

$$\sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m} = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^m} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\mu(d_2)}{d_2^m} - \sum_{d_1 d_2 > x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m} = \frac{1}{\zeta^2(m)} + R(x)$$

mit einem Rest

$$|R(x)| = \left|\sum_{d_1 d_2 > x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m}\right| < \sum_{d_1 d_2 > x} \frac{1}{(d_1 d_2)^m}$$

$$= \sum_{n>x} \frac{\tau(n)}{n^m} \le \sum_{n>x} n^{1-m} = O(x^{2-m}),$$

wenn $\tau(n)$ die Teileranzahl

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \le n$$

bezeichnet.

In gleicher Weise findet man für $m = 3$:

$$P^*_{1,2,1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2) \left\{\alpha_3 \eta(3) \frac{x^3}{d_1^3 d_2^3} + O\left(\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2} \log \frac{x}{d_1 d_2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4} x^3 \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^3 d_2^3} + O\left(x^2 \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2} \log \frac{x}{d_1 d_2}\right)$$

$$= \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^3(3)} x^3 + O(x^2 \log x).$$

Die Gl. (38.1) liefert nun für $m \geq 5$ in Verbindung mit Satz 4 die Abschätzung

$$R^*_{m,1}(x) = P^*_{1,m-1,1}(x) + O(x^{m-1})$$
$$= \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}),$$

also die Gl. (14.2) und damit den Beweis des Hauptsatzes 2.

III.

In den nun allein noch zu behandelnden Fällen $k=1$; $2 \leq m \leq 4$ setze ich zur Vereinfachung $P_{r,s,1}(x) = P_{r,s}(x)$; $P^*_{r,s,1}(x) = P^*_{r,s}(x)$ und führe für $m=3$ noch die Anzahlen $Q_3(x)$, $Q^*_3(x)$ ein:

Mit $Q_3(x)$ bezeichne ich die Anzahl der geordneten Tripel von Linearformen

$$g_1(z) = u_0 z_0 + u_1 z_1; \qquad g_2(z) = v_0 z_0 + v_1 z_1; \qquad g_3(z) = w_0 z_0 + w_1 z_1,$$

deren Produkt

$$f(z, a) = g_1(z)\, g_2(z)\, g_3(z)$$

der Klasse $\mathfrak{R}_{3,1}(x)$ angehört, analog mit $Q^*_3(x)$ die Anzahl der geordneten Tripel primitiver Linearformen, deren Produkt $f(z, a)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{3,1}(x)$ angehört. Dann gilt:

Satz 6. *Für die Anzahlen $R^*_{m,1}(x)$ mit $2 \leq m \leq 4$ bestehen die Gleichungen*

$$R^*_{2,1}(x) = \tfrac{1}{2} P^*_{1,1}(x) + O(x), \tag{41.1}$$

$$R^*_{3,1}(x) = P^*_{1,2}(x) - \tfrac{1}{3} Q^*_3(x) + O(x^2), \tag{41.2}$$

$$R^*_{4,1}(x) = P^*_{1,3}(x) + \tfrac{1}{2} P^*_{2,2}(x) + O(x^3). \tag{41.3}$$

Als Vorbereitung schätzen wir zunächst für $2 \leq m \leq 4$ die Anzahl $D^*_m(x)$ der primitiven Formen $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$ ab, deren Diskriminante verschwindet:

$$D^*_m(x) = O(x^{m-1}) \qquad \text{für} \quad 2 \leq m \leq 4. \tag{42}$$

Im Falle $m=2$ hat eine solche Form $f(z, a)$ notwendig die Gestalt

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)^2$$

mit einer primitiven Linearform $u_0 z_0 + u_1 z_1$, deren Koeffizienten der Normbedingung

$$0 < N^2(f) = u_0^4 + 4 u_0^2 u_1^2 + u_1^4 \leq x^2$$

unterliegen. Da dann aber auch

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leq N(f) \leq x$$

gilt, ist $D^*_2(x)$ gewiß nicht größer als die Anzahl der Gitterpunkte (u_0, u_1) der Ebene im Kreisbereich

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leq x,$$

also

$$0 \leq D^*_2(x) \leq A_2(\sqrt{x}) = O(x).$$

Im Falle $m=3$ hat $f(z, a)$ bei verschwindender Diskriminante die Gestalt

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)^2 (v_0 z_0 + v_1 z_1) = g^2(z)\, h(z)$$

in primitiven Linearformen $g(z)$, $h(z)$. Die Normbedingung

$$0 < N(f) \leq x$$

führt wie im Satze 1 auf eine Ungleichung der Gestalt

$$0 < N^2(g)\, N(h) \leq c_5 N(f) \leq c_5 x,$$

so daß gewiß

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)^2 (v_0^2 + v_1^2) \leq (c_5 x)^2 \tag{43}$$

erfüllt ist. Mithin ist $D_3^*(x)$ nicht größer als die Anzahl der Gitterpunkte (u_0, u_1, v_0, v_1) des vierdimensionalen Raumes, die dem durch (43) beschriebenen Bereiche angehören. Zerlegt man (43) in die Bedingungen

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leq c_5 x; \qquad 0 < v_0^2 + v_1^2 \leq \left(\frac{c_5 x}{u_0^2 + u_1^2}\right)^2,$$

so folgt

$$D_3^*(x) \leq c_6 \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq c_5 x} \left(\frac{c_5 x}{u_0^2 + u_1^2}\right)^2 = c_7 x^2 \sum_{0 < u_1^2 + u_1^2 \leq c_5 x} (u_0^2 + u_1^2)^{-2}$$

$$= O\left(x^2 \sum_{(u_0, u_1)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{-2}\right) = O(x^2).$$

Im letzten Falle $m=4$ hat $f(z, a)$ bei verschwindender Diskriminante eine der beiden Gestalten

$$f_1(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)^2 (v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2)$$

$$f_2(z, a) = (w_0 z_0^2 + w_1 z_0 z_1 + w_2 z_1^2)^2.$$

Infolgedessen ist $D_4^*(x)$ gewiß nicht größer als die Summe der Anzahlen der Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1, v_2)$ bzw. $(w) = (w_0, w_1, w_2)$, die der Bedingung

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)^2 (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \leq (c_8 x)^2$$

bzw.

$$0 < (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2)^2 \leq (c_9 x)^2$$

genügen. Folglich ist

$$0 \leq D_4^*(x) \leq c_{10} \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq c_8 x} \left(\frac{c_8 x}{u_0^2 + u_1^2}\right)^3 + c_{11} (c_9 x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= O\left(x^3 \sum_{(u_0, u_1)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{-3}\right) + O(x^{\frac{3}{2}}) = O(x^3).$$

Hieraus ergeben sich nun sehr rasch die Gleichungen des Satzes 6. Jede reduzible (primitive) Form $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}_{2,1}^*(x)$ läßt sich als Produkt primitiver Linearformen

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)$$

darstellen. Im Falle nichtverschwindender Diskriminante, also verschiedener (primitiver) Linearfaktoren wird $f(z, a)$ in der Anzahl $P_{1,1}^*(x)$ genau zweimal

gezählt. Die Anzahl der $f(z, a)$ mit verschwindender Diskriminante ist ein $O(x)$. Mithin gilt

$$R^*_{2,1}(x) = \tfrac{1}{2} P^*_{1,1}(x) + O(x).$$

Jede reduzible (primitive) Form $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{3,1}(x)$ läßt sich in einer der beiden Gestalten

$$f_1(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2)$$

$$f_2(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)(w_0 z_0 + w_1 z_1)$$

in irreduzible (primitive) Faktoren zerlegen. Dabei brauchen wir im zweiten Falle wegen $D^*_3(x) = O(x^2)$ nur diejenigen Formen $f(z, a)$ zu berücksichtigen, deren Linearfaktoren sämtlich verschieden sind. Nun zählt $P^*_{1,2}(x)$ die Formen $f_1(z, a)$ genau einmal, die Formen $f_2(z, a)$ dagegen genau dreimal, während $Q^*_3(x)$ die Formen $f_2(z, a)$ genau sechsmal zählt. Mithin zählt

$$P^*_{1,2}(x) - \tfrac{1}{3} Q^*_3(x)$$

jede der Formen $f_1(z, a)$, $f_2(z, a)$ mit nichtverschwindender Diskriminante genau einmal. Folglich ist

$$R^*_{3,1}(x) = P^*_{1,2}(x) - \tfrac{1}{3} Q^*_3(x) + O(x^2)$$

in Übereinstimmung mit (41.2).

Für den letzten Fall $m = 4$ benötigen wir noch eine Abschätzung der Anzahl $D^{**}_4(x)$ derjenigen (primitiven) Formen $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{4,1}(x)$, die in mindestens drei irreduzible Faktoren zerfallen:

$$D^{**}_4(x) = O(x^3). \tag{44}$$

Jedenfalls ist eine solche Form darstellbar in der Gestalt

$$\begin{aligned} f(z, a) &= (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)(w_0 z_0^2 + w_1 z_0 z_1 + w_2 z_1^2) \\ &= g_1(z)\, g_2(z)\, h(z) \end{aligned}$$

mit primitiven Formen $g_1(z)$, $g_2(z)$, $h(z)$, so daß aus der Normbedingung

$$0 < N(f) \leq x$$

eine Ungleichung

$$0 < N(g_1)\, N(g_2)\, N(h) \leq c_{12}\, x$$

oder

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2) \leq (c_{12}\, x)^2$$

gefolgert werden kann. Zerlegt man diese Bedingung in

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leq (c_{12}\, x)^2; \quad 0 < w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 \leq \frac{(c_{12}\, x)^2}{(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)},$$

so folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq D^{**}_4(x) &\leq c_{13}\, x^3 \sum_{0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leq (c_{12}\, x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{3}{2}} (v_0^2 + v_1^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &< c_{13}\, x^3 \sum_{(u_0, u_1)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{(v_0, v_1)}{}' (v_0^2 + v_1^2)^{-\frac{3}{2}} = O(x^3). \end{aligned}$$

Bei der Abzählung der primitiven reduziblen Formen $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{4,1}(x)$ brauchen wir infolgedessen nur diejenigen Formen mit nichtverschwindender Diskriminante zu berücksichtigen, die in genau zwei irreduzible (primitive) Faktoren zerfallen, also eine der beiden Gestalten

$$f_1(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0^3 + v_1 z_0^2 z_1 + v_2 z_0 z_1^2 + v_3 z_1^3)$$

$$f_2(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_0 z_1 + u_2 z_1^2)(v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2)$$

haben. Offensichtlich zählt $P^*_{1,3}(x)$ die Formen $f_1(z, a)$ genau einmal, außer diesen aber nur Formen mit mehr als zwei irreduziblen Faktoren; ferner zählt $P^*_{2,2}(x)$ die Formen $f_2(z, a)$ genau zweimal, außer diesen nur Formen mit mehr als zwei irreduziblen Faktoren oder mit verschwindender Diskriminante. Folglich ist, wie der Satz 6 behauptet,

$$R^*_{4,1}(x) = P^*_{1,3}(x) + \tfrac{1}{2} P^*_{2,2}(x) + O(x^3).$$

Die Anzahlen $P^*_{1,2}(x)$ und $P^*_{1,3}(x)$ sind bereits aus Satz 5 bekannt; daher sind zur endgültigen Lösung unseres Problems allein noch die Anzahlen

$$P^*_{1,1}(x),\ P^*_{2,2}(x),\ Q^*_3(x),$$

zunächst also die Anzahlen

$$P_{1,1}(x),\ P_{2,2}(x),\ Q_3(x)$$

zu bestimmen.

IV.

Nach Definition zählt $P_{1,1}(x)$ die Anzahl der Formen

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1),$$

die die Normbedingung

$$0 < N^2(f) = (u_0 v_0)^2 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)^2 + (u_1 v_1)^2 \leq x^2$$

erfüllen, also die Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1)$ des vierdimensionalen Raumes, die dem durch die Bedingung

$$0 < \Phi(u, v) = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) + 2 u_0 u_1 v_0 v_1 \leq x^2, \tag{45.1}$$

$$1 \leq u_0^2 + u_1^2, \qquad 1 \leq v_0^2 + v_1^2 \tag{45.2}$$

gekennzeichneten Bereich $\mathfrak{P}$ angehören.

Nun gilt bekanntlich bei beliebigen reellen Werten u_0, u_1, v_0, v_1 die Ungleichung

$$u_0 u_1 v_0 v_1 | \leq \tfrac{1}{4}(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)$$

und daher auch

$$\tfrac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leq \Phi(u, v) \leq \tfrac{3}{2}(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2). \tag{46}$$

Mithin besteht für alle Gitterpunkte (u, v) des Bereiches $\mathfrak{P}$ die Ungleichung

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leq 2\Phi(u, v) \leq 2x^2. \tag{47}$$

Erklärt man $\delta(u, v)$ für einen beliebigen Gitterpunkt (u, v) durch:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u,v) \text{ zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \\ 0, & \text{wenn } (u,v) \text{ nicht zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \end{cases}$$

so ist offensichtlich

$$\delta(u,v) = \delta(v,u)$$

und

$$P_{1,1}(x) = \sum_{(u,v)} \delta(u,v),$$

wenn die Summe über alle Gitterpunkte (u, v) des vierdimensionalen Raumes genommen wird. Wir setzen

$$2x^2 = y^4$$

und zerlegen unter der Abkürzung

$$|u| = (u_0^2 + u_1^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |v| = (v_0^2 + v_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

diese Summe in vier Teile:

$$P_{1,1}(x) = \sum_{|u|\le y,\ |v|\le y} \delta(u,v) + \sum_{|u|\le y,\ |v|>y} \delta(u,v) + \sum_{|u|>y,\ |v|\le y} \delta(u,v) + \sum_{|u|>y,\ |v|>y} \delta(u,v).$$

Da die letzte dieser Summen leer ist, weil nach (47) die Bedingungen

$$|u|^2\,|v|^2 > y^4 = 2x^2 \quad \text{und} \quad 0 < 2\Phi(u,v) \le 2x^2 = y^4$$

durch keinen Gitterpunkt (u, v) gleichzeitig erfüllt werden können, finden wir

$$P_{1,1}(x) = 2\sum_{|u|\le y} \sum_{(v)} \delta(u,v) - \sum_{|u|\le y,\ |v|\le y} \delta(u,v).$$

Es bleibt demnach die Aufgabe, die beiden Werte

$$S_1(x) = \sum_{|u|\le y} \sum_{(v)} \delta(u,v), \tag{48.1}$$

$$S_2(x) = \sum_{|u|\le y,\ |v|\le y} \delta(u,v) \tag{48.2}$$

zu bestimmen, da aus diesen

$$P_{1,1}(x) = 2S_1(x) - S_2(x) \tag{48.3}$$

entnommen werden kann.

Bei festgehaltenen Werten u_0, u_1 mit $|u| > 0$ stellt

$$E(u) = \sum_{(v)} \delta(u,v)$$

die Anzahl der Gitterpunkte (v) der Ebene dar, die der durch

$$0 < \Phi(u,v) \le x^2$$

dargestellten (im Nullpunkte gelochten) Ellipse angehören. Folglich ist

$$S_1(x) = \sum_{0<|u|\le y} E(u).$$

Für die Anzahl $E(u)+1$ der Gitterpunkte (v) im Bereich

$$0 \leq \Phi(u,v) = (u_0^2+u_1^2)\,v_0^2 + 2u_0u_1v_0v_1 + (u_0^2+u_1^2)\,v_1^2 \leq x^2$$

findet man nach einem früheren Ergebnis[4]) mit der Determinante

$$\Delta(u) = \begin{vmatrix} u_0^2+u_1^2 & u_0u_1 \\ u_0u_1 & u_0^2+u_1^2 \end{vmatrix} = u_0^4 + u_0^2u_1^2 + u_1^4$$

und den Eigenwerten

$$\omega_1 = u_0^2+u_1^2+|u_0u_1|; \qquad \omega_2 = u_0^2+u_1^2-|u_0u_1|$$

der quadratischen Form $\Phi(u,v)$ in (v) die Ungleichung

$$\left| E(u) + 1 - \frac{\pi x^2}{\sqrt{\Delta(u)}} \right| < c_{14}\left(\frac{x^2}{\sqrt{\Delta(u)}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so daß wir wegen der für alle Gitterpunkte (u) mit $|u|>0$ gültigen Schranke

$$0 < \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{u_0^2+u_1^2+|u_0u_1|}{u_0^2+u_1^2-|u_0u_1|} \leq 3$$

erhalten:

$$S_1(x) = \sum_{0<|u|\leq y} E(u)$$

$$= \sum_{0<|u|\leq y}\left(\frac{\pi x^2}{\sqrt{\Delta(u)}} - 1\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}}\sum_{0<|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{6}}(u)\right).$$

Hierin ist

$$\Delta(u) = u_0^4 + u_0^2u_1^2 + u_1^4 \geq \tfrac{3}{4}(u_0^2+u_1^2)^2,$$

also

$$\sum_{0<|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{6}}(u) = O\left(\sum_{0<|u|\leq y}|u|^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= O\left(\int_1^y t^{\frac{1}{3}}\,dt\right) = O(y^{\frac{4}{3}}) = O(x^{\frac{2}{3}}),$$

ferner

$$\sum_{0<|u|\leq y} 1 = O(y^2) = O(x)$$

und damit

$$S_1(x) = \pi x^2 \sum_{0<|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) + O(x^{\frac{4}{3}}). \tag{49}$$

Satz 7. *Für die über alle Gitterpunkte (u,v) der Ebene mit $0<u^2+v^2\leq y^2$ erstreckte Summe*

$$T_1(y) = \sum_{0<u^2+v^2\leq y^2}(u^4+u^2v^2+v^4)^{-\frac{1}{2}}$$

gilt

$$T_1(y) = 4\beta_0\log y + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{y}\right) \tag{50.1}$$

mit den Konstanten

$$\beta_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}} \tag{50.2}$$

und

$$\gamma_0 = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{1<u^2+v^2<x}(u^4+u^2v^2+v^4)^{-\frac{1}{2}} - 2\beta_0\log x\right). \tag{50.3}$$

[4]) Vgl. ZP III, Satz 6.

Zum Beweise setzen wir abkürzend

$$g(u,v) = (u^4 + u^2v^2 + v^4)^{-\frac{1}{2}}$$

und zerlegen

$$\begin{aligned} T_1(y) &= \sum_{0<u^2+v^2\le y^2} g(u,v) \\ &= \sum_{0<u^2\le y^2} \frac{1}{u^2} + \sum_{0<v^2\le y^2} \frac{1}{v^2} + 4 \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} g(u,v) \\ &= 4\zeta(2) + O\left(\frac{1}{y}\right) + 4T_1^*(y) \end{aligned}$$

mit der Summe

$$T_1^*(y) = \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} g(u,v). \tag{51}$$

Jedem Gitterpunkt (u, v) der Ebene mit $u>0, v>0$ ordnen wir nun das Quadrat

$$\mathfrak{W}(u,v): \qquad u \le s \le u+1, \quad v \le t \le v+1$$

zu. Es ist dann für jeden Punkt (s, t) dieses Quadrats

$$g(u,v) \ge g(s,t) \ge g(u+1, v+1)$$

und daher

$$g(u,v) \ge \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \ge g(u+1, v+1)$$

oder

$$0 \le g(u,v) - \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \le g(u,v) - g(u+1, v+1).$$

Damit folgt

$$0 \le T_1^*(y) - \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \le \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} \big(g(u,v) - g(u+1, v+1)\big).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} \big(g(u,v) - g(u+1, v+1)\big) \\ &= \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} g(u,v) - \sum_{0<(u-1)^2+(v-1)^2<y^2} g(u,v) \\ &= \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2 \\ u>0,\ v>0}} g(u,v) - \sum_{\substack{0\le(u-1)^2+(v-1)^2<y^2 \\ u>0,\ v>0}} g(u,v) + \\ &\quad + \sum_{\substack{(v-1)^2\le y^2 \\ v>0}} g(1,v) + \sum_{\substack{(u-1)^2\le y^2 \\ u>0}} g(u,1) - g(1,1) \\ &= \sum_{(u-1)^2+(v-1)^2\le y^2<u^2+v^2} g(u,v) + 2 \sum_{1\le u\le y} \frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}} - g(1,1) \\ &= \sum_{(u-1)^2+(v-1)^2\le y^2<u^2+v^2} g(u,v) + c_{15} + O\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Die Summationsbedingung

$$(u-1)^2 + (v-1)^2 \le y^2 < u^2 + v^2$$

liefert nach der bekannten CAUCHYschen Ungleichung

$$\begin{aligned} u^2+v^2 &= (u-1)^2+(v-1)^2+2(u-1+v-1)+2 \\ &\le (u-1)^2+(v-1)^2+2\sqrt{2}\sqrt{(u-1)^2+(v-1)^2}+2 \\ &\le (y+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{(u-1)^2+(v-1)^2\le y^2<u^2+v^2} g(u,v) \le \sum_{y^2<u^2+v^2\le(y+\sqrt{2})^2} g(u,v) \\ &= O\Big(\iint\limits_{y^2\le s^2+t^2\le(y+\sqrt{2})^2} (s^2+t^2)^{-1}\,ds\,dt\Big) \\ &= O\left(\int_y^{y+\sqrt{2}} \frac{d\varrho}{\varrho}\right) = O\left(\log\frac{y+\sqrt{2}}{y}\right) = O\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Damit haben wir erhalten

$$0 \le T_1^*(y) - \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2\\ u>0,\ v>0}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \le c_{15} + O\left(\frac{1}{y}\right),$$

weshalb der Grenzwert

$$\lim_{y\to\infty}\left(T_1^*(y) - \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2\\ u>0,\ v>0}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt\right) = c_{16}$$

existiert, wobei nach dem eben Gezeigten genauer gilt:

$$T_1^*(y) = \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le y^2\\ u>0,\ v>0}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt + c_{16} + O\left(\frac{1}{y}\right). \tag{52}$$

Für die hierin auftretende Summe von Integralen gilt nun weiter

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\substack{1\le s^2+t^2\le y^2\\ 1\le s,\ 1\le t}} g(s,t)\,ds\,dt &\le \sum_{\substack{1\le u^2+v^2\le y^2\\ 1\le u,\ 1\le v}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \\ &\le \iint\limits_{\substack{1\le s^2+t^2\le(y+\sqrt{2})^2\\ 1\le s,\ 1\le t}} g(s,t)\,ds\,dt, \end{aligned}$$

da für jeden Gitterpunkt (u,v) mit $u^2+v^2\le y^2$ gewiß der Gitterpunkt $(u+1, v+1)$ der Beschränkung

$$(u+1)^2+(v+1)^2 \le (y+\sqrt{2})^2$$

unterliegt. Folglich ist

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{\substack{1\le u^2+v^2\le y^2\\ 1\le u,\ 1\le v}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt - \iint\limits_{\substack{1\le s^2+t^2\le y^2\\ 1\le s,\ 1\le t}} g(s,t)\,ds\,dt \\ &\le \iint\limits_{\substack{y^2\le s^2+t^2\le(y+\sqrt{2})^2\\ 1\le s,\ 1\le t}} g(s,t)\,ds\,dt \\ &\le \iint\limits_{\substack{y^2\le s^2+t^2\le(y+\sqrt{2})^2\\ 0<s,\ 0<t}} g(s,t)\,ds\,dt. \end{aligned}$$

Durch Übergang zu ebenen Polarkoordinaten

$$s = \varrho \cos\varphi, \qquad t = \varrho \sin\varphi$$

findet man

$$\iint\limits_{\substack{y_0^2 \le s^2+t^2 \le y_1^2 \\ s>0,\, t>0}} g(s,t)\, ds\, dt = \int\limits_{y_0}^{y_1} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi \cdot \varrho\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi}}$$

$$= \log\frac{y_1}{y_0} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin 2\varphi}}$$

$$= \log\frac{y_1}{y_0} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin\varphi}}$$

$$= \beta_0 \log\frac{y_1}{y_0}.$$

Damit erhalten wir

$$0 \le \sum_{\substack{1 \le u^2+v^2 \le y^2 \\ 1 \le u,\, 1 \le v}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\, ds\, dt - \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ 1 \le s,\, 1 \le t}} g(s,t)\, ds\, dt$$

$$\le \beta_0 \log\frac{y+\sqrt{2}}{y} = O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Der Übergang zum Integral

$$I_1(y) = \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s>0,\, t>0}} g(s,t)\, ds\, dt = \beta_0 \log y \tag{53}$$

wird nun erreicht durch

$$I_1(y) = \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s \ge 1,\, t \ge 1}} g(s,t)\, ds\, dt + \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ 0<s \le 1,\, t \ge 1}} g(s,t)\, ds\, dt +$$

$$+ \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s \ge 1,\, 0<t \le 1}} g(s,t)\, ds\, dt + \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ 0<s \le 1,\, 0<t \le 1}} g(s,t)\, ds\, dt$$

$$= \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s \ge 1,\, t \ge 1}} g(s,t)\, ds\, dt + c_{17} + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Mithin ist

$$T_1^*(y) - I_1(y) = c_{18} + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

oder

$$T_1^*(y) = \beta_0 \log y + c_{18} + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

und wegen (51) endlich

$$T_1(y) = 4\beta_0 \log y + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

mit den im Satze 7 angegebenen Konstanten.

Nach (49) und (50.1) ergibt sich hieraus auch

$$S_1(x) = \pi x^2 T_1(y) + O(x^{\frac{1}{2}})$$

$$= \pi x^2 \left(4\beta_0 \log y + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right) + O(x^{\frac{1}{2}})$$

also

$$S_1(x) = 2\pi\beta_0 x^2 \log x + \pi(\beta_0 \log 2 + \gamma_0) x^2 + O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{54}$$

Satz 8. *Für die Anzahl $T_2(y)$ der Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1)$ des vierdimensionalen Bereiches*

$$\mathfrak{B}(y): \quad 0 \leq 2\Phi(u, v) \leq y^4, \qquad 0 \leq u_0^2 + u_1^2 \leq y^2, \qquad 0 \leq v_0^2 + v_1^2 \leq y^2$$

gilt

$$T_2(y) = \gamma_1 y^4 + O(y^3) \tag{55.1}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \log(2 + \sin\varphi \sin\psi)}{2 + \sin\varphi \sin\psi} \, d\varphi \, d\psi. \tag{55.2}$$

Zum Beweise nennen wir $I_2(y)$ das vierfache Integral

$$I_2(y) = \int_{\mathfrak{B}(y)} du_0 \, du_1 \, dv_0 \, dv_1 \tag{56}$$

über den im Satze angegebenen Bereich $\mathfrak{B}(y)$ und umgeben jeden Gitterpunkt (u, v) des vierdimensionalen Raumes mit dem Würfel

$$\mathfrak{W}(u, v): \quad \begin{cases} u_0 - \frac{1}{2} \leq s_0 \leq u_0 + \frac{1}{2}, & u_1 - \frac{1}{2} \leq s_1 \leq u_1 + \frac{1}{2}, \\ v_0 - \frac{1}{2} \leq t_0 \leq v_0 + \frac{1}{2}, & v_1 - \frac{1}{2} \leq t_1 \leq v_1 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ist dann $A(y)$ die Anzahl der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, die ganz in $\mathfrak{B}(y)$ enthalten sind, $C(y)$ die Anzahl der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{B}(y)$ nicht leer ist, so wird das Volumen $I_2(y)$ des Bereiches $\mathfrak{B}(y)$ durch

$$A(y) \leq I_2(y) \leq C(y)$$

eingeschränkt. Ist $\mathfrak{W}(u, v)$ ganz in $\mathfrak{B}(y)$ enthalten, so liegt auch der Gitterpunkt (u, v) in $\mathfrak{B}(y)$; andererseits ist der Durchschnitt von $\mathfrak{W}(u, v)$ mit $\mathfrak{B}(y)$ gewiß nicht leer, wenn der Gitterpunkt (u, v) zu $\mathfrak{B}(y)$ gehört. Folglich ist auch

$$A(y) \leq T_2(y) \leq C(y)$$

und damit

$$|T_2(y) - I_2(y)| \leq C(y) - A(y).$$

Die Differenz $D(y) = C(y) - A(y)$ zählt offenbar diejenigen Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, die Randpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}(y)$ enthalten.

Für einen Randpunkt (s, t) von $\mathfrak{B}(y)$ muß in den Bedingungen

$$2\Phi(s, t) \leq y^4; \qquad s_0^2 + s_1^2 \leq y^2; \qquad t_0^2 + t_1^2 \leq y^2$$

wenigstens einmal das Gleichheitszeichen erfüllt sein. Daher gibt es, weil überdies $\Phi(s, t)$ eine quadratische Form sowohl in (s) als auch in (t) ist, eine positive, absolute Konstante c_{19}, derart daß jeder Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, der einen Randpunkt (s, t) von $\mathfrak{B}(y)$ enthält, in dem Bereiche $\mathfrak{B}(y + c_{19}) - \mathfrak{B}(y - c_{19})$ ganz enthalten ist. Folglich gilt

$$0 \leq D(y) \leq I_2(y + c_{19}) - I_2(y - c_{19})$$

und

$$|T_2(y) - I_2(y)| \leq I_2(y + c_{19}) - I_2(y - c_{19}).$$

Das Integral $I_2(y)$ kann durch Einführung von Polarkoordinaten

$$u_0 = \varrho_1 \cos\varphi_1, \quad u_1 = \varrho_1 \sin\varphi_1, \quad v_0 = \varrho_2 \cos\varphi_2, \quad v_1 = \varrho_2 \sin\varphi_2$$

in das Integral

$$I_2(y) = \int \varrho_1 \varrho_2 \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

über den Bereich

$$2\varrho_1^2 \varrho_2^2 (1 + 2\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2) \leq y^4,$$

$$0 \leq \varrho_1 \leq y, \quad 0 \leq \varrho_2 \leq y, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$$

und weiter durch Einführung der Veränderlichen

$$s = \varrho_1^2, \quad t = \varrho_2^2, \quad \varphi = 2\varphi_1, \quad \psi = 2\varphi_2$$

in das Integral

$$I_2(y) = \tfrac{1}{4} \int ds \, dt \, d\varphi \, d\psi$$

über den Bereich

$$st(2 + \sin\varphi \sin\psi) \leq y^4,$$

$$0 \leq s \leq y^2, \quad 0 \leq t \leq y^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

verwandelt werden. Die Integration über s, t bei festen Werten φ, ψ ergibt

$$I_2(y) = \frac{y^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \log(2 + \sin\varphi \sin\psi)}{2 + \sin\varphi \sin\psi} \, d\varphi \, d\psi$$
$$= \gamma_1 y^4$$

mit der im Satze 8 angegebenen Konstanten γ_1.

Infolgedessen ist auch

$$I_2(y + c_{19}) - I_2(y - c_{19}) = \frac{\gamma_1}{4} ((y + c_{19})^4 - (y - c_{19})^4)$$
$$= O(y^3)$$

und damit

$$T_2(y) = \gamma_1 y^4 + O(y^3).$$

Aus dem Satze 8 erhalten wir nun nach (48.2)

$$S_2(x) = \sum_{0 < |u| \leq y} \sum_{0 < |v| \leq y} \delta(u, v)$$
$$= T_2(y) - \sum_{|u| \leq y} 1 - \sum_{|v| \leq y} 1 + 1$$
$$= T_2(y) + O(y^2) = \gamma_1 y^4 + O(y^3),$$

also

$$S_2(x) = 2\gamma_1 x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{57}$$

Fassen wir die so erhaltenen Werte $S_1(x)$, $S_2(x)$ aus (54) und (57) zu $P_{1,1}(x)$ zusammen, so entsteht aus (48.3)

$$P_{1,1}(x) = 2\{2\pi\beta_0 x^2 \log x + \pi(\beta_0 \log 2 + \gamma_0) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})\} - 2\gamma_1 x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})$$

oder

$$P_{1,1}(x) = 4\pi\beta_0 x^2 \log x + (2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}) \tag{58.1}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi\right)}{1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi}\,d\varphi\,d\psi. \tag{58.2}$$

Es ist nämlich nach einem bekannten elementaren Integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\,d\psi}{2+\sin\varphi\sin\psi} = \pi\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}} = 4\pi\beta_0$$

und daher

$$\begin{aligned}
2\pi\beta_0\log 2 - 2\gamma_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log 2\,d\varphi\,d\psi}{2+\sin\varphi\sin\psi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\log(2+\sin\varphi\sin\psi)}{2+\sin\varphi\sin\psi}\,d\varphi\,d\psi \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi\right)}{1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi}\,d\varphi\,d\psi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\,d\psi}{2+\sin\varphi\sin\psi} \\
&= \gamma_2 - 2\pi\beta_0.
\end{aligned}$$

Aus der Gl. (40) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
P^*_{1,1}(x) &= \frac{1}{4}\sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2)\,P_{1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2)\left\{4\pi\beta_0\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2}\log\frac{x}{d_1 d_2} + \right. \\
&\quad \left. + (2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2)\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{d_1^{\frac{3}{2}} d_2^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} \\
&= \pi\beta_0 x^2\log x \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2} - \\
&\quad - \pi\beta_0 x^2 \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2}\log d_1 d_2 + \\
&\quad + \frac{1}{4}(2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2)\,x^2 \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2} + \\
&\quad + O\left(x^{\frac{3}{2}} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

und wegen

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}; \qquad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}$$

weiter

$$\begin{aligned}
P^*_{1,1}(x) &= \frac{\pi\beta_0}{\zeta^2(2)}\,x^2\log x - \frac{2\pi\beta_0\zeta'(2)}{\zeta^3(2)}\,x^2 + \frac{2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2}{4\zeta^2(2)}\,x^2 + \\
&\quad + O\left(x^2\log x \sum_{d_1 d_2 > x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2}\right) + O\left(x^2 \sum_{d_1 d_2 > x} \frac{\log d_1 d_2}{d_1^2 d_2^2}\right) + \\
&\quad + O\left(x^{\frac{1}{2}} \sum_{d_1 d_2 > x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $\tau(n)$ die Teileranzahl der natürlichen Zahl n, so ist bekanntlich[5])

$$\tau(n) = O(n^\varepsilon) \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

und daher

$$\sum_{d_1 d_2 > x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2} = \sum_{n>x} \frac{\tau(n)}{n^2} = O\left(\sum_{n>x} n^{\varepsilon-2}\right) = O(x^{\varepsilon-1})$$

$$\sum_{d_1 d_2 > x} \frac{\log d_1 d_2}{d_1^2 d_2^2} = \sum_{n>x} \frac{\tau(n)\log n}{n^2} = O\left(\sum_{n>x} n^{\varepsilon-2}\log n\right) = O(x^{\varepsilon-1});$$

überdies gilt

$$\sum_{1 \le d_1 d_2 \le x} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}} \le \sum_{d_1=1}^{\infty} \sum_{d_2=1}^{\infty} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}} = O(1).$$

Hieraus erhält man

$$P_{1,1}^*(x) = \frac{\pi\beta_0}{\zeta^2(2)} x^2 \log x + \left(\frac{\pi\gamma_0}{2\zeta^2(2)} - \frac{\pi\beta_0\zeta'(2)}{\zeta^3(2)} - \frac{\pi\beta_0}{2\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{4\zeta^2(2)}\right) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}),$$

folglich nach Satz 6

$$R_{2,1}^*(x) = \tfrac{1}{2} P_{1,1}^*(x) + O(x)$$

$$= \frac{\pi\beta_0}{2\zeta^2(2)} x^2 \log x + \left(\frac{\pi\gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \frac{\pi\beta_0\zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \frac{\pi\beta_0}{4\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)}\right) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})$$

in Übereinstimmung mit der Gl. (15.2) des Hauptsatzes 3.

V.

Nach Definition zählt $Q_3(x)$ die ganzen kubischen Formen

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)(w_0 z_0 + w_1 z_1),$$

die der Normbedingung

$$0 < N^2(f) = \Phi(u, v, w)$$

$$= (u_0 v_0 w_0)^2 + (u_0 v_0 w_1 + u_0 v_1 w_0 + u_1 v_0 w_0)^2 +$$

$$+ (u_1 v_1 w_0 + u_1 v_0 w_1 + u_0 v_1 w_1)^2 + (u_1 v_1 w_1)^2 \le x^2$$

genügen, also die Gitterpunkte $(u, v, w) = (u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1)$ des sechsdimensionalen Raumes, die dem durch die Bedingungen

$$(60.1) \quad \begin{cases} 0 < \Phi(u, v, w) = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)(w_0^2 + w_1^2) + 2(u_0^2 + u_1^2) v_0 v_1 w_0 w_1 + \\ \qquad + 2(v_0^2 + v_1^2) w_0 w_1 u_0 u_1 + 2(w_0^2 + w_1^2) u_0 u_1 v_0 v_1 \le x^2, \end{cases}$$

$$(60.2) \qquad 1 \le u_0^2 + u_1^2, \qquad 1 \le v_0^2 + v_1^2, \qquad 1 \le w_0^2 + w_1^2$$

gekennzeichneten beschränkten Bereiche $\mathfrak{Q}$ des Raumes angehören.

[5]) Vgl. etwa Landau, E.: Handbuch der Lehre von der eilung der Primzahlen, Bd. I, § 60. Leipzig 1909.

Für jeden Punkt (u, v, w) des Raumes besteht, wie man sich leicht überlegt, die Ungleichung

$$(61.1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)(w_0^2+w_1^2) \leq \Phi(u,v,w) \leq \\ \qquad\qquad \leq \frac{5}{2}(u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)(w_0^2+w_1^2), \end{cases}$$

weshalb für jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{Q}$ die Bedingung

$$(61.2)\qquad (u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)(w_0^2+w_1^2) \leq 2\Phi(u,v,w) \leq 2x^2$$

erfüllt ist. Wir setzen zur Abkürzung

$$(62)\qquad 2x^2 = y^6,$$

$$(63)\qquad |u| = (u_0^2+u_1^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |v| = (v_0^2+v_1^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |w| = (w_0^2+w_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

und erklären den Wert $\delta(u, v, w)$ für jeden Gitterpunkt des Raumes durch

$$\delta(u,v,w) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u,v,w) \text{ zu } \mathfrak{Q} \text{ gehört,} \\ 0, & \text{wenn } (u,v,w) \text{ nicht zu } \mathfrak{Q} \text{ gehört.} \end{cases}$$

Dann ist

$$Q_3(x) = \sum_{(u,v,w)} \delta(u,v,w) =$$

$$= \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|>y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|\leq y,|v|>y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ \sum_{|u|\leq y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|\leq y,|w|>y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ \sum_{|u|>y,|v|>y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w),$$

folglich wegen der Symmetrie der Bedingungen (60) auch

$$Q_3(x) = \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + 3\sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|>y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ 3\sum_{|u|>y,|v|>y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w)$$

oder

$$Q_3(x) = 3\sum_{|u|\leq y,|v|\leq y} \sum_{(w)} \delta(u,v,w) - 2\sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ 3\sum_{|u|>y,|v|>y} \sum_{(w)} \delta(u,v,w) - 2\sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w).$$

Hierin ist aber

$$0 \leq \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) \leq \sum_{|u|\leq y} 1 \cdot \sum_{|v|\leq y} 1 \cdot \sum_{|w|\leq y} 1$$

$$= O(y^6) = O(x^2)$$

und

$$\sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w) = 0,$$

da die Summationsbedingung

$$y^6 < |u|^2\,|v|^2\,|w|^2 = (u_0^2+u_1^2)\,(v_0^2+v_1^2)\,(w_0^2+w_1^2) \leqq 2\Phi(u,v,w)$$

mit

$$2\Phi(u,v,w) \leqq 2x^2 = y^6$$

unverträglich ist. Es bleibt demnach, wenn noch zur Abkürzung

$$S_1(x) = \sum_{|u|\leqq y,\,|v|\leqq y} \Big(\sum_{(w)} \delta(u,v,w)\Big), \tag{64.1}$$

$$S_2(x) = \sum_{|u|> y,\,|v|> y} \Big(\sum_{(w)} \delta(u,v,w)\Big) \tag{64.2}$$

gesetzt wird, die Darstellung

$$Q_3(x) = 3\,S_1(x) + 3\,S_2(x) + O(x^2). \tag{64.3}$$

Die Summe

$$E(u,v) = \sum_{(w)} \delta(u,v,w)$$

stellt bei festgehaltenen Werten (u,v) mit $|u|\,|v| > 0$ die Anzahl der Gitterpunkte der (im Nullpunkt gelochten) Ellipse

$$0 < 2\Phi(u,v,w) \leqq y^6$$

in der (w)-Ebene dar. Die in (w) quadratische Form $2\Phi(u,v,w)$ besitzt die (symmetrische) Matrix

$$\begin{pmatrix} 2(u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)+4u_0u_1v_0v_1 & 2(u_0^2+u_1^2)v_0v_1+2u_0u_1(v_0^2+v_1^2) \\ 2(u_0^2+u_1^2)v_0v_1+2u_0u_1(v_0^2+v_1^2) & 2(u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)+4u_0u_1v_0v_1 \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte $\omega_0 \leqq \omega_1$ nach (61.1) der Beschränkung

$$(u_0^2+u_1^2)\,(v_0^2+v_1^2) \leqq \omega_0 \leqq \omega_1 \leqq 5\,(u_0^2+u_1^2)\,(v_0^2+v_1^2)$$

unterliegen, so daß für die Determinante

$$\Delta(u,v) = \omega_0\,\omega_1$$

die Beschränkung

$$(u_0^2+u_1^2)^2\,(v_0^2+v_1^2)^2 \leqq \Delta(u,v) \leqq 25\,(u_0^2+u_1^2)^2\,(v_0^2+v_1^2)^2 \tag{65}$$

vorliegt. Nun gilt nach einem früheren Ergebnis[6]) für die Gitterpunktsanzahl $E(u,v)+1$ der (ungelochten) Ellipse

$$0 \leqq 2\Phi(u,v,w) \leqq y^6$$

die Ungleichung

$$E(u,v) + 1 - \frac{\pi\,y^6}{\sqrt{\Delta(u,v)}} < c_{20}(1+b_0)$$

[6]) Vgl. ZP II, Satz 7.

mit der größeren Halbachse

$$b_0 = \frac{y^3}{\sqrt{\omega_0}} \leqq \frac{y^3}{|u|\,|v|}$$

der Ellipse und daher

$$S_1(x) = \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} E(u,v)$$

$$= \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} \left(\frac{\pi y^6}{\sqrt{\Delta(u,v)}} - 1\right) + O\left(y^3 \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} \frac{1}{|u|\,|v|}\right)$$

$$= \pi y^6 \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) - \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} 1 + O\left(y^3 \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} |u|^{-1}\,|v|^{-1}\right).$$

Hierin ist

$$\sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} 1 = \sum_{1\leqq|u|\leqq y} 1 \cdot \sum_{1\leqq|v|\leqq y} 1 = O(y^4)$$

und

$$\sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} |u|^{-1}\,|v|^{-1} = O\left(\int_1^y\int_1^y ds\,dt\right) = O(y^2),$$

folglich

$$S_1(x) = \pi y^6 \sum_{1\leqq|u|\leqq y,\,1\leqq|v|\leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) + O(y^5). \tag{66.1}$$

In gleicher Weise erhält man, da im Bereiche $\mathfrak{Q}$ nach (61.1) gewiß für alle Gitterpunkte (u, v, w) gilt:

$$|u|^2\,|v|^2 \leqq |u|^2\,|v|^2\,|w|^2 \leqq 2\Phi(u,v,w) \leqq y^6,$$

für $S_2(x)$ die Gleichung

$$S_2(x) = \sum_{|u|>y,\,|v|>y} E(u,v)$$

$$= \sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} \left(\frac{\pi y^6}{\sqrt{\Delta(u,v)}} - 1\right) + O\left(y^3 \sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} |u|^{-1}\,|v|^{-1}\right)$$

$$= \pi y^6 \sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) - \sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} 1 + O\left(y^3 \sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} |u|^{-1}\,|v|^{-1}\right).$$

Hierin ist

$$0 \leqq \sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} 1 = \sum_{y<|u|\leqq y^2} \left(\sum_{y<|v|\leqq \frac{y^3}{|u|}} 1\right)$$

$$= O\left(\sum_{y<|u|\leqq y^2} \frac{y^6}{|u|^2}\right) = O\left(y^6 \int_y^{y^2} \frac{dt}{t}\right)$$

$$= O(y^6 \log y)$$

und

$$\sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\,|v|>y}} |u|^{-1}\,|v|^{-1} = O\left(\int_y^{y^3}\int_y^{y^3/s} ds\,dt\right) = O(y^3 \log y).$$

Folglich gilt

$$S_2(x) = \pi y^6 \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) + O(x^2 \log x). \tag{66.2}$$

Wir entnehmen daraus, wenn noch $2x^2 = y^6$ beachtet wird:

$$Q_3(x) = 6\pi x^2 \left(\sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\ 1 \leqq |v| \leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) + \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) \right) + O(x^2 \log x). \tag{67}$$

Satz 9. *Die Summen*

$$F_1(x) = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\ 1 \leqq |v| \leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v), \tag{68.1}$$

$$F_2(x) = \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) \tag{68.2}$$

genügen den Gleichungen

$$F_1(x) = \tfrac{8}{9} \gamma_3 \log^2 x + O(\log x), \tag{69.1}$$

$$F_2(x) = \tfrac{4}{9} \gamma_3 \log^2 x + O(\log x) \tag{69.2}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(\frac{1}{4} + \cos^2\varphi \cos^2\psi)\ (\frac{1}{4} + \sin^2\varphi \sin^2\psi)}}. \tag{69.3}$$

Zum Beweise ordnen wir jedem Gitterpunkte (u, v) des vierdimensionalen Raumes mit $|u|\,|v| > 0$ den Würfel

$$\mathfrak{W}(u,v): \quad \begin{aligned} &u_0 - \tfrac{1}{2} \leqq s_0 \leqq u_0 + \tfrac{1}{2}, \qquad u_1 - \tfrac{1}{2} \leqq s_1 \leqq u_1 + \tfrac{1}{2}, \\ &v_0 - \tfrac{1}{2} \leqq t_0 \leqq v_0 + \tfrac{1}{2}, \qquad v_1 - \tfrac{1}{2} \leqq t_1 \leqq v_1 + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

zu und nennen $C_1(x)$ bzw. $C_2(x)$ die Summen

$$C_1(x) = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\ 1 \leqq |v| \leqq y} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}}, \tag{70.1}$$

$$C_2(x) = \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}}. \tag{70.2}$$

Ferner führen wir für zwei beliebige positive Größen $y_0 < y_1$ das Integral

$$I_1(y_0, y_1) = \int_{\substack{y_0 \leqq |s| \leqq y_1 \\ y_0 \leqq |t| \leqq y_1}} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}}, \tag{71.1}$$

für beliebige positive Größen y_0, y_1 mit $y_0^2 < y_1^3$ das Integral

$$I_2(y_0, y_1) = \int_{\substack{|s||t| \leqq y_1^3 \\ |s|>y_0,\ |t|>y_0}} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}} \tag{71.2}$$

ein, deren Werte sich leicht berechnen lassen. Einführung von Polarkoordinaten

$$s_0 = \varrho_1 \cos\varphi_1, \qquad s_1 = \varrho_1 \sin\varphi_1,$$
$$t_0 = \varrho_2 \cos\varphi_2, \qquad t_1 = \varrho_2 \sin\varphi_2$$

und der Funktion

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 & \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) \\ \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) & 1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{72}$$

die mit der Determinante $\Delta(s, t)$ im Zusammenhang

$$\Delta(s, t) = 4\varrho_1^4 \varrho_2^4 f(\varphi_1, \varphi_2) \tag{73}$$

steht, ergibt

$$I_1(y_0, y_1) = \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1}\int_{y_0}^{y_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2}{\varrho_1 \varrho_2 \sqrt{f(\varphi_1, \varphi_2)}}$$

$$I_2(y_0, y_1) = \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1^3/y_0}\int_{y_0}^{y_1^3/\varrho_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2}{\varrho_1 \varrho_2 \sqrt{f(\varphi_1, \varphi_2)}}$$

oder in einfacher Rechnung

$$I_1(y_0, y_1) = \frac{c_{21}}{2} \log^2 \frac{y_1}{y_0}$$

$$I_2(y_0, y_1) = \frac{c_{21}}{4} \log^2 \frac{y_1^3}{y_0^2}$$

mit der Konstanten

$$c_{21} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1\, d\varphi_2}{\sqrt{f(\varphi_1, \varphi_2)}}.$$

Eine leichte Umformung ergibt

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 + \sin 2\varphi_1)(1 + \sin 2\varphi_2)\right)\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 - \sin 2\varphi_1)(1 - \sin 2\varphi_2)\right)$$

und daher

$$c_{21} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1\, d\varphi_2}{\sqrt{(\frac{1}{4} + \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2)(\frac{1}{4} + \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2)}}$$
$$= 16\gamma_3$$

in der Bezeichnung des Satzes 9. Somit ist

$$I_1(y_0, y_1) = 8\gamma_3 \log^2 \frac{y_1}{y_0}, \tag{75.1}$$

$$I_2(y_0, y_1) = 4\gamma_3 \log^2 \frac{y_1^3}{y_0^2}. \tag{75.2}$$

Für jeden Punkt (s, t) eines Würfels $\mathfrak{W}(u, v)$ zum Gitterpunkt (u, v) gilt nun, da $\Delta(u, v)$ eine biquadratische Form sowohl in (u) als auch in (v) ist,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\Delta(u, v)}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta(s, t)}}\right| = \frac{|\Delta(s, t) - \Delta(u, v)|}{\sqrt{\Delta(u, v)}\sqrt{\Delta(s, t)}\left(\sqrt{\Delta(u, v)} + \sqrt{\Delta(s, t)}\right)}$$
$$< c_{22}\frac{|u|^3|v|^4 + |u|^4|v|^3}{|u|^6|v|^6}$$
$$= c_{22}\left(\frac{1}{|u|^3|v|^2} + \frac{1}{|u|^2|v|^3}\right).$$

Daher ist

$$|F_1(x)-C_1(x)|<c_{22}\sum_{1\leqq|u|\leqq y,\ 1\leqq|v|\leqq y}\left(\frac{1}{|u|^3|v|^2}+\frac{1}{|u|^2|v|^3}\right)$$

$$=O\left(\int_1^y\int_1^y\frac{d\varrho_1}{\varrho_1^2}\frac{d\varrho_2}{\varrho_2}\right)=O(\log y)$$

und

$$|F_2(x)-C_2(x)|<c_{22}\sum_{\substack{|u||v|\leqq y^3\\ |u|>y,\ |v|>y}}\left(\frac{1}{|u|^3|v|^2}+\frac{1}{|u|^2|v|^3}\right)$$

$$=O\left(\int_{\substack{\varrho_1\varrho_2\leqq y^3\\ \varrho_1>y,\ \varrho_2>y}}\frac{d\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_1^2\varrho_2}\right)=O\left(\frac{\log y}{y}\right),$$

also jedenfalls

$$F_1(x)=C_1(x)+O(\log y), \tag{76.1}$$

$$F_2(x)=C_2(x)+O(\log y). \tag{76.2}$$

Ist der Gitterpunkt (u,v) in dem Bereich

$$1\leqq|u|\leqq y,\qquad 1\leqq|v|\leqq y$$

enthalten, so ist der Würfel $\mathfrak{W}(u,v)$ gewiß ganz im Bereich

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq|s|\leqq y+\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq|t|\leqq y+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

enthalten; andererseits wird der Bereich

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq|s|\leqq y-\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq|t|\leqq y-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ganz von den Würfeln $\mathfrak{W}(u,v)$ überdeckt, deren Mittelpunkte den Bedingungen

$$1\leqq|u|\leqq y,\qquad 1\leqq|v|\leqq y$$

genügen. Infolgedessen ist nach (75.1)

$$I_1\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqq C_1(x)\leqq I_1\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

oder

$$8\gamma_3\log^2\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\leqq C_1(x)\leqq 8\gamma_3\log^2\frac{y+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Hieraus folgt aber sogleich

$$C_1(x)=8\gamma_3\log^2 y+O(\log y),$$

wegen (76.1)

$$F_1(x)=8\gamma_3\log^2 y+O(\log y),$$

also wegen $2x^3=y^6$

$$F_1(x)=\tfrac{8}{3}\gamma_3\log^2 x+O(\log x). \tag{77.1}$$

Ist der Gitterpunkt (u, v) in dem Bereich

$$|u|\,|v| \leq y^3, \qquad |u| > y, \qquad |v| > y$$

enthalten, so ist, wie man sich leicht überlegt, der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$ für alle hinreichend großen $y > c_{23}$ ganz im Bereich

$$|u|\,|v| \leq \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3, \qquad |u| > y - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |v| > y - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

enthalten, während andererseits der Bereich

$$|s|\,|t| \leq \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3, \qquad |s| > y + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |t| > y + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mit $y > c_{23}$ von den Würfeln $\mathfrak{W}(u, v)$ ganz überdeckt wird, deren Mittelpunkte (u, v) im Bereiche

$$|u|\,|v| \leq y^3, \qquad |u| > y, \qquad |v| > y$$

liegen. Folglich gilt auch hier für alle hinreichend großen $y > c_{24}$

$$I_2\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}},\ y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq C_2(x) \leq I_2\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}},\ y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

oder

$$4\gamma_3 \log^2 \frac{\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq C_2(x) \leq 4\gamma_3 \log^2 \frac{\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

also

$$C_2(x) = 4\gamma_3 \log^2 y + O(\log y),$$

wegen (76.2)

$$F_2(x) = 4\gamma_3 \log^2 y + O(\log y),$$

also wegen $2x^2 = y^6$

(77.2) $$F_2(x) = \tfrac{4}{9}\gamma_3 \log^2 x + O(\log x).$$

Satz 10. *Die Gitterpunktsanzahl $Q_3(x)$ genügt der Gleichung*

(78) $$Q_3(x) = 8\pi\gamma_3 x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x)$$

mit der in (69.3) *angegebenen Konstanten γ_3.*

Nach (67) ist nämlich

$$Q_3(x) = 6\pi x^2 \left(F_1(x) + F_2(x)\right) + O(x^2 \log x),$$

also nach (77.1) und (77.2)

$$\begin{aligned} Q_3(x) &= 6\pi x^2 \left\{\tfrac{8}{9}\gamma_3 \log^2 x + \tfrac{4}{9}\gamma_3 \log^2 x + O(\log x)\right\} + O(x^2 \log x) \\ &= 8\pi\gamma_3 x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x). \end{aligned}$$

Der Übergang zur Anzahl $Q_3^*(x)$ der primitiven Formen aus $Q_3(x)$ geschieht nun in folgender Weise: Jedes Tripel primitiver Linearformen

$$u_0^* z_0 + u_1^* z_1, \quad v_0^* z_0 + v_1^* z_1, \quad w_0^* z_0 + w_1^* z_1,$$

deren Produkt in der Anzahl $Q_3^*(x)$ zu zählen ist, liefert durch Vorgabe beliebiger Inhalte d_1, d_2, d_3 und beliebiger Vorzeichen acht Tripel von Linearformen

$$\pm d_1(u_0^* z_0 + u_1^* z_1), \quad \pm d_2(v_0^* z_0 + v_1^* z_1), \quad \pm d_3(w_0^* z_0 + w_1^* z_1),$$

deren Produkte in $Q_3(x\, d_1\, d_2\, d_3)$ zu zählen sind. Infolgedessen besteht die Gleichung

$$Q_3(x) = \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} 8\, Q_3^*\left(\frac{x}{d_1\, d_2\, d_3}\right),$$

worin die Summation über Tripel natürlicher Zahlen d_1, d_2, d_3 vorzunehmen ist, deren Produkt $d_1\, d_2\, d_3$ die Normschranke x nicht übertrifft. Hieraus erhält man durch eine dreifache Umkehrung:

$$Q_3^*(x) = \frac{1}{8} \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)\, Q_3\left(\frac{x}{d_1\, d_2\, d_3}\right),$$

also nach Satz 10:

$$\begin{aligned} Q_3^*(x) &= \frac{1}{8} \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3) \times \\ &\quad \times \left\{ 8\pi\, \gamma_3\, \frac{x^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log^2 \frac{x}{d_1\, d_2\, d_3} + O\left(\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log \frac{x}{d_1\, d_2\, d_3} \right) \right\} \\ &= \pi\, \gamma_3\, x^2 \log^2 x \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} - \\ &\quad - 2\pi\, \gamma_3\, x^2 \log x \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log d_1\, d_2\, d_3 + \\ &\quad + \pi\, \gamma_3\, x^2 \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log^2 d_1\, d_2\, d_3 + \\ &\quad + O\left(x^2 \log x \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \right). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} = \frac{1}{\zeta^3(2)} - \sum_{d_1 d_2 d_3 > x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \sum_{d_1 d_2 d_3 > x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \right| &\leq \sum_{d_1=1}^{\infty} \sum_{d_2 d_3 > x/d_1} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \\ &= \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2} \sum_{n > x/d_1} \frac{\tau(n)}{n^2} = O\left(\sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2} \sum_{n > x/d_1} n^{\varepsilon-2} \right) \\ &= O\left(\sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2} \left(\frac{x}{d_1} \right)^{\varepsilon-1} \right) = O\left(x^{\varepsilon-1} \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{1+\varepsilon}} \right) \\ &= O(x^{\varepsilon-1}) = O\left(\frac{1}{\log x} \right), \end{aligned}$$

ferner

$$\left|\sum_{d_1 d_2 d_3 \le x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}\right| \le \sum_{d_1, d_2, d_3 = 1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} = O(1),$$

$$\sum_{d_1 d_2 d_3 \le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)\,\mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log d_1 d_2 d_3$$

$$\le 3 \sum_{d_1, d_2, d_3 = 1}^{\infty} \frac{\log d_1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} = O(1),$$

$$\left|\sum_{d_1 d_2 d_3 \le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)\,\mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log^2 d_1 d_2 d_3\right| = O(1).$$

Demnach gilt

$$Q_3^*(x) = \frac{\pi \gamma_3}{\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x). \tag{79}$$

Die Anzahl $R_{3,1}^*(x)$ der primitiven irreduziblen Formen der Klasse $\mathfrak{K}_{3,1}^*(x)$ ergibt sich nun leicht auf Grund des Satzes 6. Danach ist

$$R_{3,1}^*(x) = P_{1,2}^*(x) - \tfrac{1}{3} Q_3^*(x) + O(x^2),$$

also nach Satz 5

$$R_{3,1}^*(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 + O(x^2 \log x) - \frac{\pi \gamma_3}{3\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x)$$

oder auch

$$R_{3,1}^*(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 - \frac{\alpha_3 \gamma_3}{4\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x) \tag{80}$$

in Übereinstimmung mit der Gl. (16.2) des Hauptsatzes 3.

VI.

Nach Definition zählt $P_{2,2}(x)$ die Anzahl der ganzen biquadratischen Formen

$$f(z, a) = (u_0 z_0^2 + u_1 z_0 z_1 + u_2 z_1^2)(v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2),$$

die der Normbedingung

$$0 < N^2(f) = \Phi(u, v)$$
$$= (u_0 v_0)^2 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)^2 + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0)^2 +$$
$$+ (u_1 v_2 + u_2 v_1)^2 + (u_2 v_2)^2 \le x^2$$

genügen, also die Anzahl der Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)$ des sechsdimensionalen Raumes, die dem durch die Bedingung

$$\begin{cases} 0 < \Phi(u, v) = (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) + \\ \qquad + 2u_1(u_0 + u_2) v_1 (v_0 + v_2) + 2u_0 u_2 v_0 v_2 \le x^2 \end{cases} \tag{81}$$

gekennzeichneten Bereich $\mathfrak{P}$ des Raumes angehören. Man überzeugt sich auf sehr einfachem Wege davon, daß für alle Punkte (u, v) des Raumes die Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \le \Phi(u, v) \le \tfrac{3}{2}(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \tag{82.1}$$

besteht, so daß für alle dem Bereiche $\mathfrak{P}$ angehörenden Punkte die Ungleichung

$$0 < (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \leq 2\Phi(u, v) \leq 2x^2 \tag{82.2}$$

erfüllt ist. Zur Abkürzung setzen wir

$$2x^2 = y^4$$

und

$$|u| = (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |v| = (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Erklären wir noch die Funktion $\delta(u, v)$ für alle Gitterpunkte (u, v) des sechsdimensionalen Raumes durch

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u, v) \text{ zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \\ 0, & \text{wenn } (u, v) \text{ nicht zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \end{cases}$$

so ist

$$\begin{aligned} P_{2,2}(x) &= \sum_{(u,v)} \delta(u, v) \\ &= \sum_{|u| \leq y, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| \leq y, |v| > y} \delta(u, v) \\ &\quad + \sum_{|u| > y, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| > y, |v| > y} \delta(u, v) \\ &= 2 \sum_{|u| \leq y} \sum_{(v)} \delta(u, v) - \sum_{|u| \leq y, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| > y, |v| > y} \delta(u, v). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$0 \leq \sum_{|u| \leq y, |v| \leq y} \delta(u, v) \leq \Big(\sum_{|u| \leq y} 1\Big)\Big(\sum_{|v| \leq y} 1\Big) = O(y^6) = O(x^3)$$

und

$$\sum_{|u| > y, |v| > y} \delta(u, v) = 0,$$

da nach (82) die Bedingungen

$$y^4 < |u|^2 |v|^2 \leq 2\Phi(u, v) \quad \text{und} \quad 2\Phi(u, v) \leq 2x^2 = y^4$$

nicht verträglich sind. Damit haben wir erhalten:

$$P_{2,2}(x) = 2 \sum_{|u| \leq y} \sum_{(v)} \delta(u, v) + O(x^3). \tag{83}$$

Bei festen Werten (u) mit $|u| > 0$ stellt die Summe

$$E(u) = \sum_{(v)} \delta(u, v)$$

die Anzahl der Gitterpunkte (v) des dreidimensionalen (v)-Raumes dar, die dem durch die Bedingung

$$0 < 2\Phi(u, v) \leq y^4$$

gekennzeichneten (im Nullpunkte gelochten) Ellipsoid $\mathfrak{E}(u)$ angehören. Die Anzahl $E(u)$ kann nach dem schon einmal herangezogenen Verfahren[7]) leicht bestimmt werden: Die quadratische Form $2\Phi(u, v)$ bei festen Werten (u)

[7]) Vgl. ZP II, Satz 7.

besitzt die (symmetrische) Matrix

$$\begin{pmatrix} 2(u_0^2+u_1^2+u_2^2) & 2u_1(u_0+u_2) & 2u_0u_2 \\ 2u_1(u_0+u_2) & 2(u_0^2+u_1^2+u_2^2) & 2u_1(u_0+u_2) \\ 2u_0u_2 & 2u_1(u_0+u_2) & 2(u_0^2+u_1^2+u_2^2) \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_2$, die wegen (82.1) bei festen Werten (u) nach beiden Richtungen beschränkt sind:

$$|u|^2 \leq \omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq 3\,|u|^2$$

und der Determinante

$$\Delta(u) = \omega_0\omega_1\omega_2,$$

für die entsprechend eine Ungleichung

$$|u|^6 \leq \Delta(u) \leq 27\,|u|^6$$

besteht. Für die Hauptachsen $b_0 \geq b_1 \geq b_2$ des Ellipsoids $\mathfrak{E}(u)$ gelten dann auch die Beschränkungen

$$b_\nu = \frac{y^2}{\sqrt{\omega_\nu}} \leq \frac{y^2}{|u|} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Mithin gilt

$$E(u) + 1 - \frac{\alpha_3 y^6}{\sqrt{\Delta(u)}} < c_{25}(1+b_0)(1+b_1) < c_{26}\frac{y^4}{|u|^2}$$

und weiter

$$P_{2,2}(x) = \sum_{1 \leq |u| \leq y} E(u) = \sum_{1 \leq |u| \leq y} \left(\frac{\alpha_3 y^6}{\sqrt{\Delta(u)}} - 1\right) + O\left(y^4 \sum_{1 \leq |u| \leq y} \frac{1}{|u|^2}\right) + O(x^3).$$

Hieraus entsteht wegen

$$\sum_{1 \leq |u| \leq y} \frac{1}{|u|^2} = O\left(\int_1^y dt\right) = O(y)$$

und der Gleichung $2x^2 = y^4$ die Darstellung

$$P_{2,2}(x) = 2\sqrt{2}\,\alpha_3 x^3 \sum_{1 \leq |u| \leq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u) + O(x^3). \tag{84}$$

Satz 11. *Für $y \geq 1$ genügt die Summe*

$$S(x) = \sum_{1 \leq |u| \leq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u) \tag{85.1}$$

der Gleichung

$$S(x) = \tfrac{1}{2}\gamma_4 \log x + O(1) \tag{85.2}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_4 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(2-\cos^2\varphi\cos\psi)(2+\cos^2\varphi\cos\psi-\sin^2 2\varphi(1+\cos\psi))}}. \tag{85.3}$$

Zum Beweise umgeben wir jeden Gitterpunkt $(u) = (u_0, u_1, u_2)$ mit $|u| > 0$ mit dem Würfel

$$\mathfrak{W}(u): \quad u_\nu - \tfrac{1}{2} \leq s_\nu \leq u_\nu + \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

und setzen:

$$T(x) = \sum_{1 \leq |u| \leq y} \iiint_{\mathfrak{W}(u)} \frac{ds_0\, ds_1\, ds_2}{\sqrt{\Delta(s)}},$$

ferner für beliebige positive Größen $y_0 < y_1$

$$I(y_0, y_1) = \iiint_{y_0 \leq |s| \leq y_1} \frac{ds_0\, ds_1\, ds_2}{\sqrt{\Delta(s)}}.$$

Es ist dann, wenn räumliche Polarkoordinaten

$$s_0 = \varrho \cos\varphi \cos\psi, \qquad s_1 = \varrho \sin\varphi, \qquad s_2 = \varrho \cos\varphi \sin\psi$$

eingeführt werden,

$$I(y_0, y_1) = \int_{y_0}^{y_1} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2\, d\varrho \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\varrho^3 \sqrt{f(\varphi, \psi)}}$$

mit der Funktion

$$(86)\quad f(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} 2 & \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) & \cos^2\varphi \sin 2\psi \\ \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) & 2 & \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) \\ \cos^2\varphi \sin 2\psi & \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) & 2 \end{vmatrix}$$

und demnach

$$(87)\qquad I(y_0, y_1) = c_{27} \log \frac{y_1}{y_0},$$

worin c_{27} die Konstante

$$c_{27} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{f(\varphi, \psi)}}$$

bezeichnet. Man findet

$$f(\varphi, \psi) = 2(2 - \cos^2\varphi \sin 2\psi)\,(2 + \cos^2\varphi \sin 2\psi - \sin^2 2\varphi\,(1 + \sin 2\psi))$$

und durch eine einfache Umformung

$$c_{27} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(2 - \cos^2\varphi \cos\psi)\,(2 + \cos^2\varphi \cos\psi - \sin^2 2\varphi\,(1 + \cos\psi))}}$$
$$= 2\sqrt{2}\,\gamma_4$$

in der Bezeichnung des Satzes 11.

Nun ist für jeden Punkt (s) des Würfels $\mathfrak{W}(u)$

$$|\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) - \Delta^{-\frac{1}{2}}(s)| = \frac{|\Delta(s) - \Delta(u)|}{\sqrt{\Delta(s)\,\Delta(u)}\,(\sqrt{\Delta(s)} + \sqrt{\Delta(u)})}$$

und weiter, da $\Delta(u)$ eine Form sechsten Grades in (u) ist:

$$|\Delta^{-\frac{1}{6}}(u) - \Delta^{-\frac{1}{6}}(s)| \leq c_{28} \frac{|u|^5}{|u|^9}$$

$$= c_{28} |u|^{-4}.$$

Hieraus folgt

$$|S(x) - T(x)| \leq c_{28} \sum_{1 \leq |u| \leq y} |u|^{-4} = O(1)$$

oder

$$S(x) = T(x) + O(1). \tag{88}$$

Liegt der Gitterpunkt (u) im Bereich $1 \leq |u| \leq y$, so liegt der Würfel $\mathfrak{W}(u)$ gewiß ganz im Bereich

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |s| \leq y + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

andererseits wird der Bereich

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |s| \leq y - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ganz von den Würfeln $\mathfrak{W}(u)$ überdeckt, deren Mittelpunkte der Bedingung $1 \leq |u| \leq y$ genügen. Folglich ist

$$I\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq T(x) \leq I\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

oder nach (87)

$$c_{27} \log \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \leq T(x) \leq c_{27} \log \frac{y + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Mithin gilt

$$T(x) = c_{27} \log y + O(1)$$

und in Verbindung mit (88) unter Beachtung der Gleichung $2x^2 = y^4$

$$S(x) = \tfrac{1}{2} c_{27} \log x + O(1) = \frac{1}{2\gamma_4} \log x + O(1). \tag{89}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung findet man schließlich:

$$P_{2,2}(x) = 4\alpha_3\gamma_4 x^3 \log x + O(x^3). \tag{90}$$

Aus der Anzahl $P_{2,2}(x)$ gewinnen wir sogleich die Anzahl $P^*_{2,2}(x)$ der primitiven Formen mittels der Gleichung

$$P^*_{2,2}(x) = \frac{1}{4} \sum_{d_1, d_2 \leq x} \mu(d_1)\mu(d_2) P_{2,2}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right),$$

die man durch analoge Überlegungen wie die Gl. (40) erhält. Demnach gilt:

$$P^*_{2,2}(x) = \frac{1}{4}\sum_{d_1 d_2 \leq x} \mu(d_1)\mu(d_2)\left\{4\alpha_3\gamma_4 \frac{x^3}{d_1^3 d_2^3}\log\frac{x}{d_1 d_2} + O\left(\frac{x^3}{d_1^3 d_2^3}\right)\right\}$$

$$= \alpha_3\gamma_4 x^3 \log x \sum_{d_1 d_2 \leq x} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^3 d_2^3} -$$

$$- 2\alpha_3\gamma_4 x^3 \sum_{d_1 d_2 \leq x} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^3 d_2^3}\log d_1 + O\left(x^3 \sum_{d_1 d_2 \leq x}\frac{1}{d_1^3 d_2^3}\right)$$

$$= \alpha_3\gamma_4 x^3 \log x\left(\frac{1}{\zeta^2(3)} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + O(x^3),$$

also

$$P^*_{2,2}(x) = \frac{\alpha_3\gamma_4}{\zeta^2(3)} x^3 \log x + O(x^3). \tag{91}$$

Nun ergibt sich auch rasch die Anzahl $R^*_{4,1}(x)$ der reduziblen (primitiven) Formen der Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$; nach Satz 6 ist ja

$$R^*_{4,1}(x) = P^*_{1,3}(x) + \tfrac{1}{2}P^*_{2,2}(x) + O(x^3),$$

nach Satz 5

$$P^*_{1,3}(x) = \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)} x^4 + O(x^3),$$

folglich nach Gl. (91)

$$R^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)} x^4 + \frac{\alpha_3\gamma_4}{2\zeta^2(3)} x^3 \log x + O(x^3).$$

Damit ist die letzte noch fehlende Gleichung des Hauptsatzes 3 bewiesen.

VII.

Als letzte Aufgabe bleibt noch der Beweis des Hauptsatzes 4. Die Anzahl $K^*_m(x)$ der normierten primitiven Polynome

$$f(z, a) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

des Grades $m \geq 2$, also der Klasse $\mathfrak{R}^*_m(x)$:

$$a_m > 0,$$
$$\text{g.g.T. } (a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1,$$
$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2$$

stimmt offensichtlich mit der Anzahl derjenigen primitiven Formen

$$f^*(z, a) = a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} z_1 + \cdots + a_m z_1^m$$

aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$ überein, für die a_m der Leitkoeffizient ist. Da aber diejenigen primitiven Formen $f^*(z, a)$, die der Bedingung $a_m = 0$ genügen, offensichtlich die Gestalt

$$f^*(z, a) = z_0 g^*(z, a)$$

mit einer primitiven Form $g^*(z, a)$ aus der Klasse $\mathfrak{K}^*_{m-1,1}(x)$ besitzen, während umgekehrt jede Form $g^*(z, a)$ aus $\mathfrak{K}^*_{m-1,1}$ in

$$f^*(z, a) = z_0 g^*(z, a)$$

eine Form aus $\mathfrak{K}^*_{m,1}(x)$ mit $a_m = 0$ liefert, ist

$$K^*_m(x) = K^*_{m,1}(x) - K^*_{m-1,1}(x). \tag{92}$$

Hingegen ist ein Polynom $f(z, a)$ aus $\mathfrak{K}^*_m(x)$ dann und nur dann (im Körper der rationalen Zahlen) irreduzibel, wenn die entsprechende Form $f^*(z, a)$ aus $\mathfrak{K}^*_{m,1}(x)$ irreduzibel ist, insbesondere also einen von Null verschiedenen, demnach positiven Leitkoeffizienten a_m besitzt. Folglich stimmt die Anzahl $I^*_m(x)$ der irreduziblen Polynome aus $\mathfrak{K}^*_m(x)$ mit der Anzahl der irreduziblen Formen aus $\mathfrak{K}^*_{m,1}(x)$ überein:

$$I^*_m(x) = I^*_{m,1}(x). \tag{93}$$

Damit ergeben sich für die Anzahlen $K^*_m(x)$ aus dem Hauptsatz 3 die folgenden Werte:

$$K^*_3(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)} x^4 - \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)} x^3 + O(x^2 \log x),$$

$$K^*_m(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)} x^{m+1} - \frac{\alpha_m}{2\zeta(m)} x^m + O(x^{m-1}) \quad \text{für} \quad m \geq 4.$$

In ähnlicher Weise erhält man die Anzahl

$$K^*_2(x) = K^*_{2,1}(x) - K^*_{1,1}(x),$$

wenn man noch die Anzahl $K^*_{1,1}(x)$ der primitiven Linearformen

$$L(z, a) = a_0 z_0 + a_1 z_1$$

mit

$$a_1 > 0; \qquad (a_0, a_1) = 1; \qquad a_0^2 + a_1^2 \leq x^2$$

bestimmt. Die Anzahl $K_{1,1}(x)$ aller Linearformen $L(z, a)$ mit einer Norm

$$0 < a_0^2 + a_1^2 \leq x^2$$

wird leicht aus (9.1) entnommen:

$$K_{1,1}(x) = A_2(x) - 1 = \alpha_2 x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}).$$

Hieraus erhält man, ganz analog den allgemeinen Betrachtungen:

$$\begin{aligned} K^*_{1,1}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) K_{1,1}\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) \left\{ \alpha_2 \frac{x^2}{d^2} + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} \\ &= \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)} x^2 - \alpha_2 x^2 \sum_{d > x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x^{\frac{3}{2}} \sum_{d \leq x} d^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\left|\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| = O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sum_{d\leq x} d^{-\frac{2}{3}} = O\left(\int_1^x \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right),$$

also

$$K_{1,1}^*(x) = \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)}\, x^2 + O(x). \tag{94}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} K_2^*(x) &= K_{1,1}^*(x) - K_{1,1}^*(x) \\ &= \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}\, x^3 + O(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)}\, x^2 + O(x) \\ &= \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}\, x^3 - \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)}\, x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der Gl. (19.1) des Hauptsatzes 4.

Die Gleichungen für die Anzahlen $I_m^*(x)$ der irreduziblen Polynome können wegen (93) ungeändert aus Hauptsatz 3 übernommen werden.

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 30. Juli 1952.)

THOSAR, Y. V.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 336—348 (1953)

Two Theorems on Operational Calculus.

By

YESHWANT V. THOSAR.

Introduction.

The object of this paper is to establish two new theorems of operational calculus and apply them to get new operational forms. We obtain a remarkable operational relation (5.4) in which the parabolic cylinder function occurs both in the "original" and the "image" function. Incidentally we obtain some new infinite integrals. Also WHITTAKER's well-known integral [15] for parabolic cylinder function of negative order is obtained by operational calculus (4.4).

We write

$$f(p) \doteqdot h(x) \quad \text{or} \quad h(x) \doteqdot f(p) \quad \text{if}$$

$$f(p) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x)\, dx, \qquad R(p) > 0. \tag{1}$$

$h(x)$ is called the "original", and $f(p)$ its "image". We shall occasionally make use of the following rules given by VAN DER POL [7, p. 863]: If $f(p) \doteqdot h(x)$, then

$$f(ap) \doteqdot h\left(\frac{x}{a}\right), \qquad R(a) > 0 \tag{R 1}$$

$$\frac{p f(p+\alpha)}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha x} h(x) \tag{R 2}$$

$$e^{-\lambda p} f(p) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < \lambda \\ h(x-\lambda) & \text{for} \quad x > \lambda \end{cases} \quad \lambda > 0 \tag{R 3}$$

$$\frac{f(p)}{p} \doteqdot \int_0^x h(u)\, du \tag{R 4}$$

$$-p \frac{d}{dp} \frac{f(p)}{p} \doteqdot x h(x). \tag{R 5}$$

Theorem I. *If* $f(p) \doteqdot h(x)$ *and* $f(\sqrt{p}) \doteqdot \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$, *then* $F(p) \doteqdot \frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}}$.

Proof: We know [5, p. 27—31] that if $f(p) \doteqdot h(x)$ then

$$f(\sqrt{p}) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} h(s)\, ds.$$

Putting $s^2/4 = t$ we get

$$f(\sqrt{p}) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{x}} h(2\sqrt{t})\, dt}{\sqrt{t}}$$

i. e.

$$f(\sqrt{p}) \doteq \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$$

where

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{x}} h(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}\, dt.$$

If in this equation we replace $1/x$ by p and t by x we get, by (1),

$$F(p) \doteq \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$$ q. e. d.

The theorem can also be stated in two ways as follows:

(i) *If* $h(x) \doteq f(p)$ *and* $\dfrac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} \doteq F(p)$ *then* $\sqrt{x}\, F\left(\dfrac{1}{x}\right) \doteq f(\sqrt{p})$.

(ii) *If* $F(p) \doteq \dfrac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$ *and* $\sqrt{x}\, F\left(\dfrac{1}{x}\right) \doteq f(\sqrt{p})$ *then* $f(p) \doteq h(x)$.

Example 1. Let

$$f(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \doteq \cos x = h(x)$$

and

$$f(\sqrt{p}) = \frac{p}{p+1} \doteq e^{-x} = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Then by Theorem I, since

$$F(p) \doteq \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$$

we get

$$\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{p}} \doteq \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}.$$ (1.1)

Now take

$$f(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2} \doteq x \sin x = h(x)$$

which is obtained by applying (R 5) to

$$\frac{p}{p^2+1} \doteq \sin x,$$

and take

$$f(\sqrt{p}) = \frac{2p}{(p+1)^2} \doteq 2x e^{-x} = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$$

which is obtained by applying (R 2) to

$$\frac{1}{p} \doteq x.$$

Then we have, by Theorem I,

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(2\sqrt{x}\right) \tag{1.2}$$

(1.1) and (1.2) can also be obtained by putting $n = -\frac{1}{2}$ and $n = \frac{1}{2}$ respectively in

$$p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{n/2} J_n\left(2\sqrt{x}\right), \qquad R(n) > -1.$$

Example 2. We have, due to HOWELL [4],

$$h(x) = \sqrt{\pi}\, I_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{4}\right) \doteqdot (-)^{-n}\Gamma(n+1)\, 2^{\frac{1}{2}}\, p\, D_{-n-1}\left(p\sqrt{2}\right) D_{-n-1}\left(-p\sqrt{2}\right) = f(p)$$

where $R(n) > -1$, and

$$\frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \doteqdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p\, Q_n(p) = F(p).$$

By Theorem I

$$(-)^{-n}\Gamma(n+1)\sqrt{p}\, D_{-n-1}\left(\sqrt{2p}\right) D_{-n-1}\left(-\sqrt{2p}\right) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, Q_n\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2.1}$$

$$R(n) > -1.$$

Using (R 1) with (2.1) we get

$$(-)^{-n}\Gamma(n+1)\sqrt{p}\, D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right) D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, Q_n\left(\frac{a}{x}\right) \tag{2.2}$$

where $R(n) > -1$, $R(a) > 0$.

Hence, by (1), we have

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{\sqrt{x}}\, Q_n\left(\frac{a}{x}\right) dx = (-)^{-n}\Gamma(n+1)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right) D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right) \tag{2.3}$$

valid for $R(n) > -1$, $R(p) > 0$, $R(a) > 0$.

Example 3. Again, due to HOWELL [4],

$$\frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \frac{D_n\left(2\sqrt{x}\right) D_n\left(2i\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} \doteqdot i^n\, n!\, \sqrt{p}\, P_n\left(\frac{2}{p}\right) = F(p).$$

Further

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = i^n\, n!\, P_n(2x) \doteqdot i^n\, n!\, (-)^n \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(\sqrt{p}\right).$$

By Theorem I,

$$D_n(x)\, D_n(ix) \doteqdot i^{-n}\, n!\, \sqrt{\pi}\, \frac{p}{2}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p^2}{2}\right) \tag{3.1}$$

where n is a positive integer.

Hence, by (R 1), we get

$$D_n(ax)\, D_n(iax) \doteqdot i^{-n}\, n!\, \sqrt{\pi}\, \frac{p}{2a}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p^2}{2a^2}\right) \tag{3.2}$$

n being a positive integer and $R(a) > 0$.

By (1), we have

$$\int_0^\infty e^{-px} D_n(ax)\, D_n(iax)\, dx = i^{-n} n!\, \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p^2}{2a^2}\right) \tag{3.3}$$

valid for $R(a)>0$, $R(p)>0$.

Example 4. We have, due to VARMA [*11*, p. 26]

$$f(\sqrt{p}) = \frac{\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^n} \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2x)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, e^{\frac{1}{2}x} D_{-n}(\sqrt{2x}) = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$$

where $R(n)>-1$.

It can be easily seen that

$$f(p) = \frac{p}{(1+p)^n} \doteq \frac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)} = h(x), \qquad R(n)>0.$$

By Theorem I, we get

$$\frac{e^{\frac{1}{2p}}}{p^{\frac{n-2}{2}}} D_{-n}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\right) \doteq \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n)}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-2\sqrt{x}}, \qquad R(n)>0. \tag{4.1}$$

Applying (R 1) to (4.1) we have

$$\frac{e^{\frac{a}{4p}}}{p^{\frac{n-2}{2}}} D_{-n}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right) \doteq \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n)}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-\sqrt{2ax}} \tag{4.2}$$

where $R(n)>0$, $R(a)>0$.

Hence, by (1),

$$\int_0^\infty e^{-px-\sqrt{2ax}}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{2^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{a}{4p}}}{p^{n/2}}\, D_{-n}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$$

valid for $R(a)>0$, $R(p)>0$, $R(n)>0$.

In this equation, writing $p^2/2$ for p, $a^2/2$ for a, and x^2 for x we get the integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{p^2x^2}{2}-ax} x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{p^n} \cdot e^{\frac{a^2}{4p^2}}\, D_{-n}\left(\frac{a}{p}\right) \tag{4.3}$$

valid for $R(a)>0$, $R(p)>0$, $R(n)>0$.

If in (4.3) we put $p=1$, $a=x$ and $x=t$ we get

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2-tx}\, t^{n-1}\, dt = \Gamma(n)\, e^{x^2/4} D_{-n}(x), \qquad R(n)>0 \tag{4.4}$$

which is the well known WHITTAKER'S integral for parabolic cylinder function of negative order [*15*].

If in (4.3) we put $a=1$, $p=x$ and $x=t$ we get

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2t^2-t}\, t^{n-1}\, dt = \Gamma(n)\, \frac{e^{\frac{1}{4x^2}}}{x^n}\, D_{-n}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad R(n)>0. \tag{4.5}$$

Putting $1/x$ for x in (4.5) and then comparing it with (4.4) we have

$$(4.6) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{x^2}-t} t^{n-1}\,dt = x^n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2-tx}\, t^{n-1}\,dt$$

where $R(n)>0$ and $0<R(x)<\infty$.

Example 5. Again, due to VARMA [12, p. 30]

$$\frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = x^{-\frac{1}{2}} D_{2n}\left(2\sqrt{x}\right) \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{p(1-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}} = F(p).$$

Further due to SHASTRI [8],

$$\sqrt{p}\, e^{p/4} D_{-2n-1}\left(\sqrt{p}\right) \doteq \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{x^n}{(2x+1)^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad R(n) > -\frac{1}{2}.$$

Applying to this first (R 3) and then (R 1), we get after a little simplification,

$$(5.1) \qquad \sqrt{p}\, D_{-2n-1}\left(2\sqrt{p}\right) \doteq \begin{cases} 0 & \text{for } x<1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \dfrac{(x-1)^n}{(x+1)^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}} & \text{for } x>1 \end{cases}$$

where $R(n) > -\frac{1}{2}$.

Now,

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(x-1)^n}{(x+1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \sqrt{\pi}\,(2n)!\,\sqrt{2p}\, D_{-2n-1}\left(2\sqrt{p}\right) = f\left(\sqrt{p}\right)$$

by (5.1), this being true when $x>1$ and n is a positive integer. By Theorem I we get the interesting result

$$(5.2) \qquad (2n)!\, 2^{\frac{1}{2}} p\, D_{-2n-1}(2p) \doteq D_{2n}(x), \qquad x>1$$

n being a positive integer.

In (5.2), changing $2n$ into n, we have

$$(5.3) \qquad n!\, 2^{\frac{1}{2}} p\, D_{-n-1}(2p) \doteq D_n(x), \qquad x>1$$

which by (R 1) becomes

$$(5.4) \qquad n!\, 2^{\frac{1}{2}} a\, p\, D_{-n-1}(2ap) \doteq D_n\left(\frac{x}{a}\right)$$

valid for a real, $x>a>0$ and n a positive integer or zero.

Thus we get an operational relation connecting the parabolic cylinder function of positive order with one of negative order. This relation would be useful to get properties of parabolic cylinder functions of negative order from the known properties of the parabolic cylinder functions of positive order and viceversa.

Applying (R 4) to (5.4) we get

$$(5.5) \qquad n!\, 2^{\frac{1}{2}} a\, D_{-n-1}(2ap) \doteq \int_a^x D_n\left(\frac{u}{a}\right) du$$

valid for a real, $x > a > 0$ and n a positive integer or zero. From (5.1) we get

$$(5.6)\qquad \int_1^\infty e^{-px}(x-1)^{\frac{m-1}{2}}(x+1)^{-\frac{m}{2}}\,dx = 2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{D_{-m}(2\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$$

valid for $R(m) > 0$, $R(p) > 0$.

Example 6. We know that

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = 2x^{-k-\frac{1}{2}}K_{2m}(2\sqrt{x}) \doteq \Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)e^{\frac{1}{2p}}p^{k+1}W_{k,m}\left(\frac{1}{p}\right)$$
$$= F(p)$$

where K_n is the modified BESSEL function of the second kind [9, result (3.2)].

Putting $l = -k + \frac{1}{2}$ in the following result due to DHAR [1, formula (35)]

$$x^{l-1}e^{x/2}W_{k,m}(x) \doteq \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)}{\Gamma(k-l+1)}\,p^{\frac{1}{2}-m-k}(1-p)^{k-l}\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+m+k,\ \frac{1}{2}-l+m;\ k-l+1;\ 1-\frac{1}{p}\right)$$

we get,

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \sqrt{x}\,F\left(\frac{1}{x}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)x^{-k-\frac{1}{2}}e^{x/2}W_{k,m}(x) \\ \quad \doteq \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}{\Gamma(2k+\frac{1}{2})}\times \\ \quad \times p^{\frac{1}{2}-m-k}(1-p)^{2k-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+m+k,\ k+m;\ 2k+\frac{1}{2};\ 1-\frac{1}{p}\right) \\ \quad = f(\sqrt{p}) \end{cases}$$

valid for $R(2k+\frac{1}{2}) > 0$. By Theorem I we get

$$(6.2)\qquad \begin{cases} x^{-2k}K_{2m}(x) \doteq \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2^{2k+1}\sin(m+k+\frac{1}{2})\pi\sin(\frac{1}{2}-m+k)\pi}\cdot\frac{p^{1-2m-2k}}{\Gamma(2k+\frac{1}{2})}\times \\ \quad \times (1-p^2)^{2k-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+m+k,\ k+m;\ 2k+\frac{1}{2};\ 1-\frac{1}{p^2}\right) \end{cases}$$

valid for $R(2k+\frac{1}{2}) > 0$, $0 < R(m+k+\frac{1}{2}) < 1$, $0 < R(\frac{1}{2}-m+k) < 1$.

In (6.2) if we put $k = \frac{1}{4}$, $2m - \frac{1}{2} = n$ and make use of [3, p. 23, formula (21)]

$$P_n(\cos\Theta) = \cos^{-n-1}\Theta\,{}_2F_1\left(\frac{n+1}{2},\ 1+\frac{n}{2};\ 1;\ -\tan^2\Theta\right)$$

(since $P_n = P_{-n-1}$) we get after some simplification

$$(6.3)\qquad \frac{K_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{2\pi x}} \doteq -\frac{\pi}{2\sin n\pi}\,p\,P_n(p).$$

From (6.2) and (6.3) we get the integrals

$$(6.4)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-px}x^{-2k}K_{2m}(x)\,dx \\ \quad = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}p^{-2m-2k}(1-p^2)^{2k-\frac{1}{2}}}{2^{2k+1}\sin(m+k+\frac{1}{2})\pi\sin(\frac{1}{2}-m+k)\pi\,\Gamma(2k+\frac{1}{2})}\times \\ \quad \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+m+k,\ k+m;\ 2k+\frac{1}{2};\ 1-\frac{1}{p^2}\right) \end{cases}$$

valid for $R(2k+\frac{1}{2})>0$, $R(p)>0$, $0<R(m+k+\frac{1}{2})<1$, $0<R(\frac{1}{2}-m+k)<1$, and

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{\sqrt{x}} K^2_{n+\frac{1}{2}}(x)\,dx = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\sin n\pi} P_n(p) \tag{6.5}$$

valid for $R(p)>0$, $0<R(n)<1$. It may be pointed out that (6.3) can also be obtained by using

$$K_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} W_{0,n}(2x)$$

along with the DHAR's result [*1*, formula (53)]

$$(2x)^{-1} W_{0,n+\frac{1}{2}}(2x) \doteqdot -\frac{\pi}{2\sin n\pi}\, p\, P_n(p).$$

Example 7. We know [*9*, result (1.4)] that

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = x^{s-1} e^{-\frac{1}{x}} \doteqdot 2p^{1-\frac{s}{2}} K_s\left(2\sqrt{p}\right) = f\left(\sqrt{p}\right).$$

Further

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x<1 \\ \dfrac{(x-1)^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} & \text{for } x>1, \quad R(s)>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}},$$

By Theorem I,

$$2p^{2-s} K_s(2p) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x<2 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\cdot x\,(x^2-4)^{s-\frac{1}{2}}}{2^{2s-2}\Gamma(s-\frac{1}{2})} & \text{for } x>2, \quad R(s)>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

which by (R 1) can be written as

$$p^{2-s} K_s(p) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x<1 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\,x\,(x^2-1)^{s-\frac{1}{2}}}{2^{s-1}\Gamma(s-\frac{1}{2})} & \text{for } x>1, \quad R(s)>\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{7.1}$$

and also as

$$p^{2-s} K_s(ap) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x<a \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\,x\,(x^2-a^2)^{s-\frac{1}{2}}}{2^{s-1}\Gamma(s-\frac{1}{2})\,a^s} & \text{for } x>a, \end{cases} \tag{7.2}$$

a being real and positive, $R(s)>\frac{1}{2}$. Applying (R 4) to (7.1) we have

$$p^{1-s} K_s(p) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^s\Gamma(s+\frac{1}{2})}(x^2-1)^{s-\frac{1}{2}} \tag{7.3}$$

valid for $x>1$, $R(s)>+\frac{1}{2}$. From (7.2) we get

$$\frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)a^s p^{1-s} K_s(ap) = \int_a^\infty e^{-px}\, x\,(x^2-a^2)^{s-\frac{1}{2}}\,dx \tag{7.4}$$

valid for a real and positive, $R(p)>0$, $R(s)>\frac{1}{2}$. This is an integral representation for the K_n function.

Example 8. We have, due to ERDELYI [2],

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = \frac{H_{2n}(\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} \doteqdot (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(p-1)^n}{p^{n-\frac{1}{2}}} = F(p).$$

Further

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(2n)!}{n!}(x-1)^n \doteqdot (2n)! \frac{e^{-p}}{p^n} = f(\sqrt{p})$$

valid for $x>1$. By Theorem I,

$$H_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) \doteqdot (2n)! \frac{e^{-p^2}}{p^{2n}}, \qquad x>1 \tag{8.1}$$

which by (R 1) takes the form

$$H_n\left(\frac{x}{a}\right) \doteqdot \frac{2^n n!}{a^n} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2p^2}{4}}}{p^n}, \qquad x>\frac{a}{2}>0 \tag{8.2}$$

a being real. Again, take [5, p. 27–31]

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = H_{2n+1}(\sqrt{x}) \doteqdot \frac{(2n+1)!}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{1}{p}-1\right)^n = F(p),$$

and

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(2n+1)!}{n!}\sqrt{\pi}\cdot x(x-1)^n \doteqdot (2n+1)!\sqrt{\pi}\, e^{-p}\frac{(p+n+1)}{p^{n+1}}, \qquad x>1$$
$$= f(\sqrt{p})$$

which is obtained by applying first (R 3) and then (R 5) to the operational relation

$$\frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{x^n}{n!}.$$

By Theorem I we get

$$\frac{x}{2} H_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right) \doteqdot \frac{(2n+1)!\, e^{-p^2}(p^2+n+1)}{p^{2n+2}} \tag{8.3}$$

which by (R 1) becomes

$$x H_n\left(\frac{x}{a}\right) \doteqdot \frac{2^{n+1}n!}{a^n} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2p^2}{4}}\cdot\left(\frac{a^2p^2}{4}+\frac{n+1}{2}\right)}{p^{n+1}} \tag{8.4}$$

valid for a real, $x>\frac{a}{2}>0$, n being a positive integer.

Theorem II. *If* $h(x) \doteqdot f(p)$ *and* $h(x^2) \doteqdot \frac{F(p^2/4)}{p/2}$ *then*

$$F(p) \doteqdot \frac{f(1/x)}{\sqrt{\pi x}}.$$

Proof: We know that [5, p. 27–31] if $h(x) \doteqdot f(p)$ then

$$h(x^2) \doteqdot \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2s^2}{4}} f\left(\frac{1}{s^2}\right) ds.$$

Let $s^2 = t$. Then

$$h(x^2) \doteqdot \frac{p}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{4}t} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

where

$$F\left(\frac{p^2}{4}\right) = \frac{p^2}{4} \int_0^\infty e^{-p^2 \frac{t}{4}} \frac{f(1/t)}{\sqrt{\pi t}}\, dt.$$

$\therefore$ By (1),

$$F(p) \doteqdot \frac{f(1/x)}{\sqrt{\pi x}} \quad \text{q. e. d.}$$

The theorem can also be stated in the following two ways:

(i) *If* $F(p) \doteqdot \frac{f(1/x)}{\sqrt{\pi x}}$ *and* $\frac{F(p^2/4)}{p/2} \doteqdot h(x^2)$ *then* $f(p) \doteqdot h(x)$.

(ii) *If* $f(p) \doteqdot h(x)$ *and* $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} f\left(\frac{1}{x}\right) \doteqdot F(p)$ *then* $\frac{F(p^2/4)}{p/2} \doteqdot h(x^2)$.

Example 9. We have, due to MITRA [6, p. 83],

$$h(x^2) = J_\nu(a x)\, J_\nu(b x) \doteqdot \frac{p}{\pi\sqrt{a b}}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2 + a^2 + b^2}{2 a b}\right) = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

and

$$h(x) = J_\nu(a\sqrt{x})\, J_\nu(b\sqrt{x}) \doteqdot e^{-\left(\frac{a^2+b^2}{4p}\right)} I_\nu\left(\frac{a b}{2p}\right) = f(p).$$

By Theorem II,

$$F(p) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

i.e.

$$\frac{2p}{\sqrt{a b}}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{4p + a^2 + b^2}{2 a b}\right) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)x} I_\nu\left(\frac{a b}{2} x\right). \tag{9.1}$$

In (9.1) putting, respectively, $b = a$ and $b = a = \sqrt{2}$, we get

$$\frac{2p}{a}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{2p + a^2}{a^2}\right) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\frac{a^2}{2}x} I_\nu\left(\frac{a^2 x}{2}\right) \tag{9.2}$$

$$p\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}(p + 1) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} I_\nu(x). \tag{9.3}$$

Applying (R 2) to (9.3) we get,

$$p\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}(p) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_\nu(x) \tag{9.4}$$

which is a well known operational relation.

Example 10. We know that [4]

$$h(x^2) = J_{n+\frac{1}{2}}(x^2) \doteqdot \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\, p\, D_{-n-1}\left(\frac{p e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right) D_{-n-1}\left(\frac{p e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

valid for $R(n) > -1$; further

$$h(x) = J_{n+\frac{1}{2}}(x) \doteqdot \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^{n+\frac{1}{2}} = f(p).$$

By Theorem II,

$$(10.1)\qquad \Gamma(n+1)\,2^{\frac{1}{2}}\,p\,D_{-n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2p}\right)D_{-n-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2p}\right)\doteqdot\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}}$$

valid for $R(n)>-1$. This, by (R 1), becomes

$$(10.2)\qquad \left\{\begin{array}{l}\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}p\,D_{-n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)\\ \qquad\doteqdot\dfrac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2}},\quad R(n)>-1,\quad R(a)>0.\end{array}\right.$$

Hence, by (1), we have

$$(10.3)\qquad \left\{\begin{array}{l}\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}D_{-n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)\\ \qquad=\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-px}(\sqrt{x^2+a^2}-a)^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2}}\,dx\end{array}\right.$$

$$(10.4)\qquad =\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi/2}e^{-ap\tan\vartheta}\left(\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta\cos\vartheta}}$$

both integrals being valid for $R(a)>0$, $R(p)>0$, $R(n)>-1$.

Similarly, taking

$$h(x^2)=I_{n+\frac{1}{2}}(x^2)\doteqdot\frac{\Gamma(n+1)}{(-)^n}\cdot\frac{p}{\sqrt{2\pi}}D_{-n-1}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)D_{-n-1}\left(-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)=\frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

and

$$h(x)=I_{n+\frac{1}{2}}(x)\doteqdot\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left\{p-\sqrt{p^2-1}\right\}^{n+\frac{1}{2}}=f(p)$$

we get, by Theorem II, the new operational form

$$(10.5)\qquad \left\{\begin{array}{l}(-)^{-n}\Gamma(n+1)\,2^{\frac{1}{2}}p\,D_{-n-1}\left(\sqrt{2p}\right)D_{-n-1}\left(-\sqrt{2p}\right)\\ \qquad\doteqdot\dfrac{\{1-\sqrt{1-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{1-x^2}},\quad R(n)>-1;\end{array}\right.$$

which by (R 1) becomes

$$(10.6)\qquad \left\{\begin{array}{l}(-)^{-n}\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}p\,D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right)\\ \qquad\doteqdot\dfrac{\{a-\sqrt{a^2-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{a^2-x^2}},\quad R(n)>-1,\quad R(a)>0.\end{array}\right.$$

Hence we get

$$(10.7)\qquad \left\{\begin{array}{l}(-)^{-n}\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right)\\ \qquad=\displaystyle\int_0^\infty e^{-px}\frac{\{a-\sqrt{a^2-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\end{array}\right.$$

where $R(a)>0$, $R(p)>0$, $R(n)>-1$.

Example 11. Take [13]

$$\frac{F(p^2/4)}{p/2} = \Gamma(m)\, p\, e^{p^2/4} D_{-m}(p) \doteqdot x^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}} = h(x^2)$$

where $R(m) > 0$, and

$$h(x) = x^{\frac{m-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{p}{(p+\frac{1}{2})^{\frac{m+1}{2}}} = f(p).$$

Applying Theorem II we get, after using the duplication formula of the Gamma function [16, p. 240] and (R 1),

$$(11.1) \qquad 2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, e^{p/2} D_{-m}\left(\sqrt{2p}\right) \doteqdot \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(1+x)^{\frac{m+1}{2}}}, \qquad R(m) > 0$$

and also

$$(11.2) \qquad \frac{2^{m/2}}{\sqrt{a}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, e^{\frac{ap}{2}} D_{-m}\left(\sqrt{2ap}\right) \doteqdot \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(a+x)^{\frac{m+1}{2}}}, \qquad R(m) > 0$$

where $R(a) > 0$. Hence, by (1),

$$(11.3) \qquad \frac{2^{m/2}}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) e^{\frac{ap}{2}} D_{-m}\left(\sqrt{2ap}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{\frac{m-2}{2}}\, dx}{(x+a)^{\frac{m+1}{2}}}$$

valid for $R(a) > 0$, $R(p) > 0$, $R(m) > 0$. Applying to (11.1) first (R 3) and then (R 1), we get

$$(11.4) \qquad 2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, D_{-m}\left(2\sqrt{p}\right) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1; \\ \dfrac{(x-1)^{\frac{m-2}{2}}}{(x+1)^{\frac{m+1}{2}}} & \text{for } x > 1, \end{cases} \qquad R(m) > 0$$

and also

$$(11.5) \qquad \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, D_{-m}\left(2\sqrt{ap}\right) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \dfrac{(x-a)^{\frac{m-2}{2}}}{(x+a)^{\frac{m+1}{2}}} & \text{for } x > a \end{cases}$$

valid for a real and positive, $R(m) > 0$. Hence by (1)

$$(11.6) \qquad \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) D_{-m}\left(2\sqrt{ap}\right) = \int_a^\infty e^{-px} \frac{(x-a)^{\frac{m-2}{2}}}{(x+a)^{\frac{m+1}{2}}}\, dx$$

valid for a real and positive, $R(p) > 0$, $R(m) > 0$.

Example 12. By (4.1) above,

$$h(x) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma n} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \doteqdot \frac{e^{\frac{1}{2p}}}{p^{\frac{n-2}{2}}} D_{-n}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\right) = f(p), \qquad R(n) > 0,$$

and we easily get

$$h(x^2) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n)} x^{n-2} e^{-2x} \doteqdot \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-1)} \cdot \frac{p}{(p+2)^{n-1}} = \frac{F(p^2/4)}{p/2}.$$

By Theorem II we get the new operational form

$$(12.1) \qquad \frac{p}{(\sqrt{p}+1)^{n-1}} \doteqdot \frac{2^{\frac{n-2}{2}}(n-1)}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{n-3}{2}} e^{\frac{x}{2}} D_{-n}(\sqrt{2x}), \qquad R(n) > 0.$$

(12.1) can also be obtained by applying the rule [5]

$$p \int_p^\infty \frac{f(w)}{w} dw \doteqdot \frac{h(x)}{x} \qquad \text{if} \qquad f(p) \doteqdot h(x),$$

to the known operational form [11]

$$\frac{\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^n} \doteqdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (2x)^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{x/2} D_{-n}(\sqrt{2x}).$$

Now applying (R 2) to (12.1), we get

$$(12.2) \qquad \frac{p}{\{\sqrt{(p+\frac{1}{2})}+1\}^{n-1}} \doteqdot \frac{2^{\frac{n-2}{2}}(n-1)}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{n-3}{2}} D_{-n}(\sqrt{2x}), \qquad R(n) > 0.$$

Hence, by (1),

$$(12.3) \qquad \int_0^\infty e^{-px} x^{\frac{n-3}{2}} D_{-n}(\sqrt{2x})\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-2}{2}}(n-1)\{\sqrt{(p+\frac{1}{2})}+1\}^{n-1}}$$

valid for $R(p) > 0$, $R(n) > 0$.

Example 13. From the known integral [14, p. 393] $\int_0^\infty J_\nu(at)\, t^{\mu-1} e^{-p^2t^2} dt$ in terms of ${}_1F_1$ and the formula

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) = L_n^{(\alpha)}(x),$$

we get

$$(13.1) \qquad J_\alpha(2\sqrt{ax})(ax)^{n+\frac{\alpha}{2}} \doteqdot \Gamma(n+1)\left(\frac{a}{p}\right)^{n+\alpha} e^{-\frac{a}{p}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{a}{p}\right)$$

valid for $R(n+1) > 0$, $R(\alpha+1) > 0$, $R(a) > 0$.

In (13.1) let us take both α and n as positive integers, put $\alpha = m$, and take

$$h(x) = x^{n+\frac{m}{2}} J_m(2\sqrt{x}) \doteqdot n! \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+m}} L_n^{(m)}\left(\frac{1}{p}\right) = f(p).$$

Then [5] $h(x^2) = x^{2n+m} J_m(2x)$

$$\doteqdot \frac{(-1)^m (2n)!\, p}{(p^2+4)^{\frac{2n+m+1}{2}}} P_{2n+m}^m\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right)$$

$$= \frac{F(p^2/4)}{p/2}.$$

By Theorem II, we get the new operational form

$$(13.2)\quad \frac{\sqrt{\pi}}{n!}\cdot\frac{(-1)^m(2n)!}{2^{2n+m}}\cdot\frac{p}{(p+1)^{\frac{2n+m+1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right)\doteqdot e^{-x}x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x)$$

where n and m are both positive integers. Applying (R 2) to (13.2),

$$(13.3)\quad \frac{(-1)^m(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+m}n!}\cdot\frac{1}{p^{\frac{2n+m-1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)\doteqdot x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x).$$

Hence, by (1),

$$(13.4)\quad \frac{(-1)^m(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+m}n!}\cdot\frac{1}{p^{\frac{2n+m+1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)=\int_0^\infty e^{-px}x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x)\,dx$$

valid for $R(p)>0$, both n, m being positive integers.

The known operational form due to SHASTRI [*10*] viz.

$$x^{n-\frac{1}{2}}k_{2n}(x)\doteqdot(-)^n\frac{(2n-2)!}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{p}{(p+1)^n}P^1_{2n-1}\left[\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\right]$$

where k_n is BATEMAN'S function, is a particular case of (13.3). This can be easily seen if we put $m=1$ in (13.3), use

$$L_n^{(1)}(x)=(-)^n(n+1)\frac{e^{x/2}}{x}k_{2n+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$

and then apply (R 2) and (R 1).

References.

[*1*] DHAR, S. C.: Phil. Mag. (7) **21**, 1082—1096 (1936). — [*2*] ERDÉLYI, A.: Math. Z. **42**, 125—143 (1937). — [*3*] HOBSON, E. W.: Spherical an Ellipsoidal Harmonics. 1931. — [*4*] HOWELL, W. R.: Phil. Mag. **24**, 1082—1093 (1937). — [*5*] HUMBERT, P.: Le Calcul Symbolique. 1934. — [*6*] MITRA, S. C.: Bull. Calcutta Math. Soc. **25**, 81—98 (1933). — [*7*] POL, B. VAN DER: Phil. Mag. (7) **8**, 861—898 (1929). — [*8*] SHASTRI, N. A.: Math. Z. **44**, 789—793 (1939). — [*9*] SHASTRI, N. A.: Proc. Indian Acad. Sci. **20**, 211—223 (1944). — [*10*] SHASTRI, N. A.: J. Indian Math. Soc. (2) **3**, 8—18 (1938). — [*11*] VARMA, R. S.: J. London Math. Soc. **12**, 25—27 (1937). — [*12*] VARMA, R. S.: Phil. Mag. (7) **22**, 29—34 (1936). — [*13*] VARMA, R. S.: Proc. Cambridge Phil. Soc. **33**, 210—211 (1937). — [*14*] WATSON, G. N.: Theory of Bessel Functions. 1944. — [*15*] WHITTAKER, E. T.: Proc. London Math. Soc. **35**, 417—427 (1903). — [*16*] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: Mod. Analysis **1940**.

Dept. of Math., College of Science, Nagpur (India).

(Eingegangen am 26. Januar 1952.)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 349—350 (1953)

Schlichte Potenzreihen, die auf $|z|=1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren.

Von

DIETER GAIER.

Vorgelegt sei das Funktionselement

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

mit dem Konvergenzradius 1. Nach HARDY [4] kann es vorkommen, daß (1) auf $|z|=1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert. Daß dies auch dann noch möglich ist, wenn $f(z)$ in $|z|<1$ schlicht ist, wurde neuerdings von ERDÖS, HERZOG und PIRANIAN durch kunstvolle, aber etwas langwierige Überlegungen festgestellt[1]). Es soll hier ein einfaches Prinzip zur Erzeugung solcher Funktionen $f(z)$ angegeben werden; die Hilfsmittel sind funktionentheoretischer Art. Es handelt sich also um den folgenden

Satz. *Es gibt eine in* $|z|<1$ *reguläre und schlichte Funktion* $f(z)$, *deren Potenzreihenentwicklung* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *auf* $|z|=1$ *gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert.*

Zum Beweis bemerken wir:

a) Bildet man ein beliebiges endliches JORDAN-Gebiet $\mathfrak{G}_w$ der w-Ebene[2]) durch eine reguläre Funktion $z=\Phi(w)$ eineindeutig auf $|z|<1$ ab, so ist die Umkehrfunktion $w=f(z)$ in $|z|<1$ regulär und schlicht sowie in $|z|\leq 1$ stetig[3]), die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von $f(z)$ auf $|z|=1$ also gleichmäßig konvergent[4]).

---

[1]) Vgl. P. ERDÖS, F. HERZOG und G. PIRANIAN [2], S. 75. Die zwei Beispiele der Verff. haben noch weitere Eigenschaften: Im ersten Beispiel hat $f(z)$ nur eine Singularität auf $|z|=1$ (vgl. Schluß unserer Arbeit); beim zweiten Beispiel besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Lücken mit gegen ∞ wachsender Lückenlänge, doch soll darauf hier nicht eingegangen werden.

[2]) Das ist ein endliches Gebiet, das von einer geschlossenen JORDAN-Kurve begrenzt wird.

[3]) Vgl. z.B. L. BIEBERBACH [1], S. 31.

[4]) Vgl. L. FEJÉR [3], S. 49; der FEJÉRsche Satz wird auch bei ERDÖS, HERZOG und PIRANIAN [2] herangezogen.

b) Aus den Relationen

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = \int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\Big|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\,x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 n\,|a_n|\,x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

folgt, daß die Potenzreihe der in a) angegebenen Funktion $f(z)$ auf $|z|=1$ nur dann absolut konvergiert, falls $f(z)$ in $<0,1)$ schwankungsbeschränkt ist ($z=x+iy$).

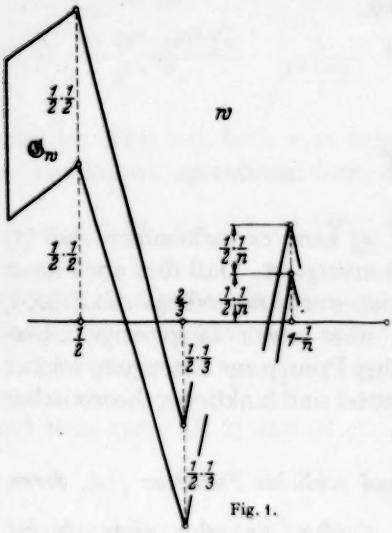

Fig. 1.

Wird also z.B. das beigezeichnete Gebiet $\mathfrak{G}_w$ durch $z=\Phi(w)$ auf $|z|<1$ abgebildet ($\Phi(1)=1$), so besitzt die Umkehrfunktion $w=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sämtliche in unserem Satz angegebenen Eigenschaften, da doch offenbar $f(z)$ in $<0,1)$ nicht schwankungsbeschränkt sein kann.

Abschließend sei hinzugefügt, daß man aus unserer Funktion $f(z)$ leicht eine solche Funktion $g(z)$ herstellen kann, die die im Satz genannten Eigenschaften hat und außerdem auf $|z|=1$ nur eine Singularität besitzt; man hat dazu nur die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ an einer Stelle α mit $0<\alpha<1$ zu betrachten.

Literatur.

[1] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [2] ERDÖS, P., F. HERZOG and G. PIRANIAN: Schlicht Taylor series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute. Pacific J. Math. **1**, 75—82 (1951). — [3] FEJÉR, L.: La convergence sur son cercle de convergence d' une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. C. r. Acad. Sci., Paris **156**, 46—49 (1913). — [4] HARDY, G. H.: A theorem concerning Taylor's series. Quart. J. Pure a. Appl. Math. **44**, 147—160 (1913).

Stuttgart, Math. Institut A der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 22. Oktober 1952.)

MEYER-KÖNIG, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57. S. 351—352 (1953)

Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt.

Von

WERNER MEYER-KÖNIG.

Es handelt sich um das High-Indices-Theorem beim BORELschen Summierungsverfahren B. Die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt B-summierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(a_0+\cdots+a_\nu)\,x^\nu = s$$

ist. Eine Anwendung betrifft das EULER-KNOPPsche Summierungsverfahren E_p der (fest gewählten) positiven Ordnung p. Die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt E_p-summierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{pn}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(2^p-1)^{n-\nu}(a_0+\cdots+a_\nu) = s$$

ist.

Im folgenden sei $0\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ eine Folge ganzer Zahlen. Stets sei

$$\sum_0^\infty a_n \tag{1}$$

eine Reihe mit komplexen, für $n\neq\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ verschwindenden Gliedern, und es gebe eine Zahl $\lambda>0$, so daß die Lückenbedingung

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge\lambda\sqrt{\lambda_n}\quad(n=1,2,\ldots) \tag{2}$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Die Lückenreihe* (1) *sei B-summierbar, und es gebe eine Zahl* $\alpha>1$, *so daß*

$$a_n = O(\alpha^n)\quad(n\to\infty) \tag{3}$$

gilt; dann ist (1) *konvergent.*

Daß Satz 1 richtig ist, wenn (3) durch die stärkere Voraussetzung

$$a_n = O(\alpha^n)\quad\text{für jede Zahl}\quad\alpha>1 \tag{4}$$

ersetzt wird, ergibt sich aus einem Satz, den H. R. PITT[1]) in Anwendung weitreichender allgemeiner TAUBER-Sätze aufstellte. Es ist Verf. nicht bekannt,

[1]) PITT, H. R.: General Tauberian theorems. Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser. **44**, 243—288 (1938). Theorem 17.

daß daraus in der Literatur schon der Schluß auf die Richtigkeit des Satzes 1 gezogen wurde. Dieser Schluß ist aber leicht möglich. Da er an das zu erstrebende Ziel, ohne eine Voraussetzung über die Größenordnung der a_n überhaupt auszukommen, einen Schritt näher heranführt, sei hier darauf aufmerksam gemacht.

Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Wegen (3) besitzt das Funktionselement

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \tag{5}$$

einen positiven Konvergenzradius r. Nach dem FABRYschen Lückensatz ist einerseits $f(z)$ nicht über den Konvergenzkreis der Reihe (5) hinaus fortsetzbar[2]), andererseits ist $f(z)$ wegen der B-Summierbarkeit von (1) regulär im Kreisgebiet $|z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$. Also ist $r \geq 1$, d.h. (4) ist erfüllt. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem PITTschen Satz.

Wegen des $E_p \to B$-Satzes gilt Satz 1 auch mit E_p anstatt B. Dabei kann die Voraussetzung (3) noch weggelassen werden, denn aus der E_p-Summierbarkeit von (1) folgt notwendig $a_n = o\left((2^{p+1}-1)^n\right)$. Somit ergibt sich

Satz 2. *Die Lückenreihe* (1) *sei* E_p*-summierbar; dann ist sie konvergent.*

Daß Satz 2 (für $p=1$) gilt, wenn (2) mit einer hinreichend großen Zahl λ erfüllt ist, hat neuerdings P. ERDÖS[3]) gezeigt[4]). Hinsichtlich der Voraussetzung (2) mit beliebigem $\lambda > 0$ ist Satz 2, wie P. ERDÖS (a. a. O.) bemerkt, bestmöglich. Es wäre erwünscht, einen Beweis des Satzes 2 zu besitzen, der ohne so tiefgreifende Hilfsmittel wie die PITTschen Untersuchungen und den FABRYschen Satz auskommt.

[2]) Es genügt die Berufung auf den von BOREL stammenden Lückensatz, der sich auf Lücken der durch (2) gegebenen Länge bezieht.

[3]) ERDÖS, P.: On a Tauberian theorem for Euler summability. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. **4**, 51—56 (1952).

[4]) Wegen früherer Teilergebnisse in Richtung der Sätze 1 und 2 vgl. Verf., Math. Z. **45**, 479—494 (1939) und **49**, 151—160 (1943/44), sowie die dortigen Hinweise auf A. ZYGMUND und Y. OKADA.

Stuttgart S, Liststr. 51.

(Eingegangen am 23. Oktober 1952.)

JURKAT, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 353—394 (1953)

Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen.

Von
WOLFGANG JURKAT.

Die vorliegende Arbeit knüpft an Untersuchungen von Herrn PEYERIMHOFF und dem Verfasser an, in denen Matrixtransformationen behandelt wurden, für die ein gewisser Mittelwertsatz gilt[1]). Solche Matrixtransformationen zeichnen sich durch viele angenehme Eigenschaften aus: Wir nennen als wichtige Beispiele die einfache Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen, die vollständige Darstellung der Konvergenzfaktoren und die Anwendungen auf den Vergleich von Matrixtransformationen. In allen diesen Fällen zeigt es sich, daß durch den Mittelwertsatz die Lösung des Problems sehr erleichtert wird. Aber man wird fragen, ob die Anwendung des Mittelwertsatzes wirklich wesentlich war oder ob nicht auch für andere Matrixtransformationen dieselben Sätze gelten. Das Beispiel der CESÀROschen Mittel zeigt, daß das letztere zutrifft, denn der Mittelwertsatz gilt hier nur für Ordnungen zwischen 0 und 1, während die Sätze zu einem Teil für alle Ordnungen gelten. Man kann dies dadurch erklären, daß die CESÀROschen Mittel die Iteration der gewöhnlichen arithmetischen Mittel sind, für die jedenfalls der Mittelwertsatz gilt. Ganz ähnlich ist die Lage bei den allgemeinen bewichteten arithmetischen Mitteln und den RIESZschen Mitteln, die man in gewissem Sinne als deren Iteration ansehen kann. So entsteht von selbst der Gedanke, die Matrixtransformationen mit einem Mittelwertsatz zu iterieren, d.h. die zugehörigen Matrizen multiplikativ zusammenzusetzen. In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, die oben erwähnten Ergebnisse auf diese recht umfassende Klasse von Matrizen auszudehnen.

In § 1 untersuchen wir zunächst die RIESZschen Mittel. Da diese nicht unmittelbar als Iteration einer Matrixtransformation mit Mittelwertsatz definiert sind, ist es für die Anwendung unserer Theorie nötig, sie erst auf diese Form zu bringen. Wir lassen uns von der Annahme leiten, daß die RIESZschen Mittel im wesentlichen mit der Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel äquivalent sind. Wie wir später sehen werden, trifft dies nicht ganz zu, sondern wir müssen den Prozeß der Iteration in gewisser Weise abändern. Die so definierten „allgemeinen CESÀROschen Mittel" sind dann wirklich mit den RIESZschen Mitteln in weitem Umfange äquivalent (Satz 1). Der Beweis ist jedoch nicht ganz leicht und beruht für nicht ganzzahlige Ordnungen hauptsächlich auf einer Ergänzung zum Konvexitätssatz von M. RIESZ (Lemma 7).

[1]) JURKAT-PEYERIMHOFF [*11*], JURKAT-PEYERIMHOFF [*12*].

Wesentliche Vereinfachungen treten im Falle $\lambda_n = n$ auf. Die allgemeinen CESÀROschen Mittel sind dann mit den gewöhnlichen CESÀROschen Mitteln äquivalent (für ganze Ordnungen sogar identisch), und wir erhalten so einen neuen Beweis für den bekannten Äquivalenzsatz von RIESZ (Satz 2).

Der allgemeine Äquivalenzsatz wird uns gestatten, bei späteren Anwendungen die RIESZschen Mittel stets durch die allgemeinen CESÀROschen Mittel zu ersetzen. Damit haben wir zugleich ein weites Anwendungsfeld für die folgende Theorie gefunden.

In § 2 beschäftigen wir uns mit Größenbeschränkungen für Matrixtransformationen. Die früheren Ergebnisse besagen, daß die genaue Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen durch das Diagonalglied gegeben wird, wenn für die Matrix der Mittelwertsatz gilt. Von dieser Einschränkung suchen wir uns durch den Begriff der relativen Größenbeschränkung zu befreien. Das Hauptergebnis ist Satz 4, das alle anderen im wesentlichen enthält. Durch Zusammensetzen der relativen Größenbeschränkungen (Lemma 13) können wir nun die genauen Größenbeschränkungen aller Matrizen angeben, die sich als Produkte von Matrizen mit Mittelwertsatz darstellen lassen (Satz 5). Alle diese Größenbeschränkungen werden durch das Diagonalglied gegeben. Anwendungen auf CESÀROsche Mittel (enthalten in Satz 6), RIESZsche Mittel (Sätze 7 und 8) und andere sind möglich.

In § 3 werden Fragen über Konvergenzfaktoren behandelt. Auf Grund der früheren Ergebnisse lassen sich die Konvergenzfaktoren in der RF- und FF-Form vollständig angeben, wenn für die Matrix der Mittelwertsatz gilt. Von dieser Einschränkung suchen wir uns durch stufenweisen Aufbau der Konvergenzfaktoren zu befreien (ganz entsprechend der Einführung der relativen Größenbeschränkung in § 2). Ein allgemeiner Beweis dieses Prinzips vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren gelingt noch nicht. Dagegen erhalten wir unter recht allgemeinen Voraussetzungen einfache hinreichende Bedingungen (Satz 9), die eine Reihe von Anwendungen zulassen. In einem mehr speziellen Fall, der die CESÀROschen Mittel enthält, erhalten wir notwendige und hinreichende Bedingungen (Satz 10). Dieses letzte Ergebnis läßt sich auch auf die allgemeinen CESÀROschen Mittel ausdehnen, und so gelingt die Bestimmung der Konvergenzfaktoren für die RIESZschen Mittel beliebiger Ordnung (Sätze 11 und 12).

Schließlich wenden wir uns in § 4 den Vergleichssätzen für Matrixtransformationen zu. Wir hatten früher durchweg gefordert, daß die schwächere Matrix einen Mittelwertsatz erfüllen soll. Um uns von dieser Einschränkung zu befreien, gehen wir analog zu den vorangehenden Fragestellungen vor (Lemma 23). Ein erstes einfaches Resultat, das die früheren Ergebnisse enthält, ist Satz 13. Als wichtige Anwendung hiervon erhalten wir Vergleichsbedingungen mit den CESÀROschen Mitteln beliebiger Ordnung. Die Methode, die zu Satz 13 geführt hat, läßt sich aber weiter verallgemeinern (Satz 14), so daß jetzt auch die RIESZschen Mittel in den Anwendungsbereich einbezogen werden können. Für den Vergleich mit den RIESZschen Mitteln ganzzahliger Ordnung lassen sich sogar notwendige und hinreichende Bedingungen angeben

(Satz 15). Von den Anwendungen nennen wir die genauen Bedingungen für das „second theorem of consistency" für Rieszsche Mittel (§ 4.3.b) und den Vergleich der Rieszschen Mittel mit der gewöhnlichen Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel (§ 4.3.c).

In dieser Arbeit werden ausschließlich Matrixtransformationen betrachtet. Wir möchten jedoch erwähnen, daß sich auch für Integraltransformationen eine zum Teil analoge Theorie aufbauen läßt.

1. Ein allgemeiner Äquivalenzsatz für Rieszsche Mittel.

1.1. Bezeichnungen und Identitäten. Im folgenden ist durchweg

1 (1) $\quad k$ eine ganze Zahl ≥ 0, $\quad 0 < \delta \leq 1$ und $\varkappa = k + \delta$;

weiter ist λ_n eine Zahlenfolge mit den Eigenschaften

1 (2) $\qquad \Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \qquad 0 \leq \lambda_n \to \infty \quad (n \to \infty)$.

Wir fassen n als Funktion von ω auf

1 (3) $\qquad n = n(\omega): \quad \lambda_n < \omega \leq \lambda_{n+1}$

und setzen

1 (4) $$\begin{cases} A^0(\omega) = A(\omega) = s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \\ A^\varkappa(\omega) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa a_\nu = \varkappa \int\limits_0^\omega (\omega - t)^{\varkappa-1} A(t)\, dt. \end{cases}$$

Eine Folge s_n heißt limitierbar (bzw. die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ summierbar) zum Wert s durch das Verfahren der Rieszschen Mittel, wenn

$$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} \to s \quad (\omega \to \infty)$$

gilt. Dabei sprechen wir von „stetigen" Rieszschen Mitteln, wenn ω stetig gegen ∞ strebt, und von „unstetigen" Rieszschen Mitteln, wenn ω nur die Werte λ_{n+1} durchläuft[2]).

Ist $\varphi(t)$ eine L-integrierbare Funktion, so verstehen wir unter

1 (5) $\qquad I^\alpha[\varphi(t)] = I^\alpha(\omega) = I^\alpha(\omega; \varphi(t))$

das Liouville-Integral der Ordnung α

1 (6) $$I^\alpha[\varphi] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^\omega (\omega - t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt & \text{für} \quad \alpha > 0 \\ \varphi(\omega) & \text{für} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Bekanntlich gilt

1 (7) $\qquad I^\alpha[I^\beta[\varphi]] = I^{\alpha+\beta}[\varphi] \quad (\alpha, \beta \geq 0)$.

[2]) Vgl. Jurkat [10].

Erklären wir $\nu = \nu(t)$ durch $\lambda_\nu < t \leq \lambda_{\nu+1}$, so ist

1(8) $$s_\nu = A(t) \quad \text{und} \quad I^\alpha[s_\nu] = \frac{A^\alpha(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

insbesondere ist

$$I^1[s_\nu] = \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)\, s_\nu + (\omega - \lambda_{n+1})\, s_n.$$

Wegen 1(7) gilt

1(9) $$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\Gamma(\varkappa+1)} = I^\delta\left[\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\right].$$

Wir definieren jetzt die neuen Mittel

1(10) $$C^\varkappa[s_\nu] = C_n^\varkappa,$$

die eine Art Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel sind[3]):

1(11) $$\begin{cases} C^0(\omega) = C_n^0 = s_n \\ C^\varkappa(\omega) = \dfrac{1}{k+1}\, I^\delta\left[\dfrac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}\, C_\nu^k\right] \\ C_n^\varkappa = C^\varkappa(\lambda_{n+1}). \end{cases}$$

Es ist also

1(12) $$C^\delta(\omega) = I^\delta[s_\nu] = \frac{A^\delta(\omega)}{\Gamma(\delta+1)},$$

speziell

$$C^\delta[s_\nu] = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta\, s_\nu.$$

Weiter gilt

1(13) $$C^\varkappa[s_\nu] = \frac{1}{k+1}\, C^\delta\left[\frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}\, C_\nu^k\right],$$

speziell

$$C_n^{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu)\, C_\nu^k;$$

ferner

1(14) $$C^{k+1}(\omega) = C_n^{k+1} + \frac{\omega - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} (C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}).$$

Für $\lambda_n = n$ ist

1(15) $$C^k[s_\nu] = S^k[s_\nu],$$

wobei

1(16) $$S^\alpha[s_\nu] = S_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+\alpha-1}{n-\nu} s_\nu \qquad (\alpha \geq 0)$$

gesetzt ist. Wegen dieser Beziehung zu den CESÀROschen Mitteln, die durch den Iterationsprozeß 1(13) noch enger gestaltet wird, wollen wir die Transformation $C^\varkappa[s_\nu]$ als die „allgemeinen CESÀROschen Mittel" bezeichnen.

[3]) Vgl. § 4.3.c) dieser Arbeit.

Die allgemeinen Cesàroschen Mittel kann man als Verallgemeinerung der wiederholten Aufsummierung ansehen. Entsprechend soll jetzt auch der Differenzenbegriff verallgemeinert werden:

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\Delta_\nu^0 b_\nu = b_\nu, \quad \Delta_\nu^1 b_\nu = \Delta_\nu b_\nu = b_\nu - b_{\nu+1}, \quad \Delta^{k+1} b_\nu = \Delta_\nu(\Delta_\nu^k b_\nu)$$

sei

1 (17)
$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^0 b_\nu = b_\nu \\ \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} b_\nu = \frac{k+1}{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu} \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k b_\nu. \end{cases}$$

Es ist also

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu b_\nu = \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^1 b_\nu = \frac{\Delta b_\nu}{\Delta\lambda_\nu}, \text{ usw.}$$

und für $\lambda_n = n$

1 (18)
$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k b_\nu = \Delta_\nu^k b_\nu.$$

1.2. Vorbereitende Lemmata. Unser Ziel ist zu zeigen, daß die oben definierten allgemeinen Cesàroschen Mittel mit den Rieszschen Mitteln äquivalent sind. Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig, deren Ergebnis in den folgenden Lemmata zusammengefaßt ist. Eine wichtige Eigenschaft der allgemeinen Cesàroschen Mittel und der zugehörigen Differenzen wird durch Lemma 3 (partielle Summation) und Lemma 4 (Mittelwertsatz) ausgedrückt. Die Forderung dieser Eigenschaften hat im wesentlichen den „störenden" Faktor $\frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}$ zur Folge, der in 1 (11) bzw. 1 (13) auftritt.

Lemma 1. *Ist* $0 \leq \xi \leq \omega$, $0 < \delta \leq 1$, *so gilt*

1 (19)
$$\left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^\xi (\omega - t)^{\delta-1} \varphi(t)\, dt \right| \leq |I^\delta(\xi'; \varphi(t))|$$

mit einem geeigneten ξ' $(0 \leq \xi' \leq \xi)$. *Ist speziell* $\varphi(t) = A(t)$ *und* $\xi = \lambda_\nu$, *so kann man* $\xi' = \lambda_{\nu'}$ $(0 \leq \nu' \leq \nu)$ *wählen.*

Die Ungleichung 1 (19) ist der bekannte Rieszsche Mittelwertsatz[4]). Der Zusatz für $\varphi(t) = A(t)$ ist der entsprechende Mittelwertsatz für die unstetigen Rieszschen Mittel[5]).

Lemma 2. *Ist* $0 \leq \varrho \leq \varkappa$ $(\varkappa > 0)$ *und* $0 < \Phi_0(\omega) \nearrow$, $0 < \Phi_\varkappa(\omega) \nearrow$ [6]), *so folgt aus*

$$I^0(\omega) = o(1)\Phi_0(\omega) \quad \text{und} \quad I^\varkappa(\omega) = o(1)\Phi_\varkappa(\omega)$$

zusammen die Abschätzung

$$I^\varrho(\omega) = o(1)\,(\Phi_0(\omega))^{\frac{\varkappa-\varrho}{\varkappa}}\,(\Phi_\varkappa(\omega))^{\frac{\varrho}{\varkappa}} \quad (\omega \to \infty).$$

Die Abschätzung bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzt wird.*

[4]) Vgl. Riesz [19], [20]; Hardy-Riesz [6], S. 28; Verblunsky [22]; Jurkat-Peyerimhoff [11].

[5]) Vgl. Jurkat [10], Jurkat-Peyerimhoff [11].

[6]) Das Zeichen „$\nearrow$" (bzw. „$\searrow$") bedeutet: wächst (bzw. fällt) monoton im weiteren Sinne.

Dies ist der bekannte Konvexitätssatz von M. RIESZ[7]). Der allgemeine Beweis von Lemma 2 ist nicht ganz einfach, aber unsere Anwendungen werden sich im wesentlichen auf den Fall $0<\varkappa\leq 1$ beschränken, wo erhebliche Vereinfachungen auftreten (vgl. auch den Beweis von Lemma 7 dieser Arbeit).

Lemma 3 (partielle Summation). *Für $n\geq r$ ($r\geq 0$, ganz) gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\varrho=0}^{r} C_\nu^\varrho \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho b_\nu \Big|_{\nu=n-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-r-1} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r b_\nu$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta b_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} C_\nu^\varrho \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho b_\nu \Big|_{\nu=n-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-r-1} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r b_\nu .$$

Dabei ist der Wert $\nu=n-\varrho$ in den mit einem Strich bezeichneten Gliedern nach Ausführung der Differenzenbildung einzutragen.

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $r=0$

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = s_n b_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta b_\nu = C_\nu^0 \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^0 b_\nu \Big|_{\nu=n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu^0 \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^0 b_\nu$$

und kann durch Induktion nach r allgemein bewiesen werden.

Lemma 4 (Mittelwertsatz). *Ist $f(x)$ k-mal differenzierbar in dem offenen Intervall $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+k})$ und ist $f^{(k-1)}(x)$ noch stetig in seinen Endpunkten, so gilt*

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k f(\lambda_\nu) = (-1)^k f^{(k)}(\tau_\nu)$$

mit einem geeigneten τ_ν $(\lambda_\nu<\tau_\nu<\lambda_{\nu+k})$.

Der *Beweis* beruht darauf, daß der Ausdruck

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k f(\lambda_\nu)$$

gleich der Steigung k-ter Ordnung der Funktion $f(x)$ ist und daher nach dem Mittelwertsatz für Steigungen dieser Art gleich $f^{(k)}(\tau_\nu)/k!$ sein muß.

Lemma 5. *Ist $\varkappa=k+\delta$ (wie üblich) und*

$$0<\eta_n\nearrow+\infty \quad \text{für} \quad n=n(\omega)\to\infty,$$

so sind die beiden Konvergenzaussagen

$$I^\delta(\omega; s_\nu)=o(1)\,\eta_n \quad \text{und} \quad I^\delta(\lambda_{n+1}; s_\nu)=o(1)\,\eta_n$$

äquivalent, insbesondere also auch

$$C^\varkappa(\epsilon\,)=o(1)\,\eta_n \quad \text{und} \quad C_n^\varkappa=o(1)\,\eta_n .$$

Dies bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ durch $O(1)$ ersetzt wird.

Einen Beweis für die in Lemma 5 behauptete Äquivalenz der stetigen und unstetigen RIESZschen Mittel findet man im Falle $\lambda_n=n$, $\eta_n=n^\delta$ bei RIESZ [21]

[7]) Vgl. RIESZ [20].

und im allgemeinen Falle bei Jurkat [10] (dort auch weitere Literatur zu diesem Fragenkreis). Allerdings bezieht sich der zuletzt genannte Beweis nicht auf den speziellen Fall $\eta^\delta(\omega)=\eta_n$ und braucht daher die zusätzliche Voraussetzung $\frac{\omega}{\eta(\omega)}\nearrow$. Man überzeugt sich aber leicht, daß in unserem jetzigen Falle diese Voraussetzung nicht nötig ist.

1.3. Die beiden Hauptlemmata. Wir gehen jetzt zu den wesentlichen Vorbereitungen über. Eine besondere Bedeutung kommt der Ergänzung zum Konvexitätssatz von Riesz zu (Lemma 7), auf der hauptsächlich der Beweis des Äquivalenzsatzes für nicht ganzzahlige Ordnungen beruht.

Lemma 6. *Es gelte* $0\leq\varrho\leq\varkappa$ $(\varkappa>0)$ *und*

1(20) $\qquad 0<\eta_n\nearrow+\infty,$ $\qquad$ 1(21) $\qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa}\nearrow$

Dann folgt aus

1(22) $\qquad A^\varkappa(\omega)=o(1)\eta_n$ $\qquad$ *oder* $\qquad C^\varkappa(\omega)=o(1)\,\eta_n$

entsprechend

1(23) $\qquad A^\varrho(\omega)=o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}$ $\qquad$ *oder* $\qquad C^\varrho(\omega)=o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}$.

Dies bleibt richtig, wenn man überall $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzt.*

Der Teil von Lemma 6, der sich auf $A^\varkappa(\omega)$ bezieht, ist eine Verallgemeinerung[8]) von theorem 22 bei Hardy-Riesz [6], S. 36. Läßt man die Voraussetzung 1(21) weg, so gilt 1(23) nur noch für ganzzahlige ϱ, während sonst

$$A^\varrho(\omega)=o(1)\left(\frac{\eta_{n-1}}{|\Delta\lambda_{n-1}|^{\varkappa-\varrho}}+\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}\right)$$

zu schreiben ist. Der Beweis von Hardy-Riesz läßt sich ohne Schwierigkeit auf unseren allgemeinen Fall übertragen, man hat nur $o(\lambda_{n+1}^\varkappa)$ durch $o(\eta_n)$ bzw. $O(\eta_n)$ zu ersetzen.

Der zweite Teil von Lemma 6 zeigt die Analogie zwischen den Rieszschen und den allgemeinen Cesàroschen Mitteln. Allerdings konnten wir hier ohne die Voraussetzung 1(21) kein entsprechend einfaches Resultat beweisen.

Der folgende *Beweis* von Lemma 6 lehnt sich eng an die Darstellung bei Hardy-Riesz an (vgl. auch Satz 7 dieser Arbeit). Gewisse Vereinfachungen konnten auf Grund der Voraussetzung 1(21) vorgenommen werden. Bei späteren Anwendungen wird ϱ im allgemeinen ganzzahlig sein, und dann wird der Beweis um ein weiteres Stück einfacher.

a) Es sei $A^\varkappa(\omega)=o(\eta_n)$. Ist Ω eine der Zahlen

$$\lambda_n+\mu\,\frac{|\Delta\lambda_n|}{k+1}\qquad(\mu=1,\ldots,k+1),$$

[8]) Vgl. auch Minakshisundaram-Rajagopal [16].

so gilt nach Formel 1 (9) und Lemma 1

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{\lambda_n}^{\Omega}(\Omega-t)^{\delta-1}\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\,dt=\frac{A^k(\Omega)}{\Gamma(\varkappa+1)}-\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{0}^{\lambda_n}(\Omega-t)^{\delta-1}\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\,dt$$
$$=o(\eta_n)+o(\eta_n)=o(\eta_n).$$

Durch partielle Integration finden wir andererseits

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{\lambda_n}^{\Omega}(\Omega-t)^{\delta-1}\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\,dt$$
$$=\frac{(\Omega-\lambda_n)^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)}\cdot\frac{A^k(\lambda_n)}{\Gamma(k+1)}+\cdots+\frac{(\Omega-\lambda_n)^{\delta+k-1}}{\Gamma(\delta+k)}\frac{A^1(\lambda_n)}{\Gamma(2)}+\frac{(\Omega-\lambda_n)^{\delta+k}}{\Gamma(\delta+k+1)}\frac{A^0(\lambda_{n+1})}{\Gamma(1)}$$
$$=c_0\,\mu^{\varkappa}\cdot|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}A^0(\lambda_{n+1})+\sum_{\varrho=1}^{k}c_\varrho\,\mu^{\varkappa-\varrho}\cdot|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}A^\varrho(\lambda_n)\qquad(c_\varrho\neq 0).$$

Für $\mu=1,\ldots,k+1$ erhalten wir $k+1$ verschiedene Linearkombinationen von

1 (24) $\qquad |\Delta\lambda_n|^{\varkappa}A^0(\lambda_{n+1}),\quad |\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}A^\varrho(\lambda_n)\qquad(\varrho=1,\ldots,k),$

die alle die Größenordnung $o(\eta_n)$ haben. Da aber ihre Determinante

$$\det(c_\varrho\mu^{\varkappa-\varrho})=c_0\ldots c_k\det(\mu^{\varkappa-\varrho})\neq 0$$

ist, müssen die Ausdrücke 1 (24) selbst diese Größenordnung besitzen. Wegen $A^0(\omega)=A^0(\lambda_{n+1})$ folgt insbesondere

$$A^0(\omega)=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}$$

und weiter wegen

$$A^\varrho(\omega)=A^\varrho(\lambda_n)+\varrho\int_{\lambda_n}^{\omega}A^{\varrho-1}(t)\,dt$$

nacheinander

$$A^\varrho(\omega)=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}\quad\text{für}\quad\varrho=1,\ldots,k.$$

Nach Lemma 2 können wir aber schon aus

$$A^0(\omega)=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\quad\text{und}\quad A^\varkappa(\omega)=o(1)\,\eta_n$$

direkt schließen

$$A^\varrho(\omega)=o(1)\left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\right)^{\frac{\varkappa-\varrho}{\varkappa}}(\eta_n)^{\frac{\varrho}{\varkappa}}=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}},$$

und dies gilt nicht nur für die ganzzahligen Werte von ϱ, sondern für alle $0\leq\varrho\leq\varkappa$.

b) Es sei $C^\varkappa(\omega)=o(1)\,\eta_n$. Wir wissen aus Teil a) des Beweises, daß für $k\leq\varrho\leq\varkappa$ aus

$$I^{\varkappa-k}[s_\nu]=o(1)\,\eta_n\quad\text{stets}\quad I^{\varrho-k}[s_\nu]=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}$$

folgt. Denn $I^{\varkappa-k}$ und $I^{\varrho-k}$ sind abgesehen von konstanten Faktoren gleich $A^{\varkappa-k}$ bzw. $A^{\varrho-k}$, und es gilt

1(25) $\qquad 0<\eta_n \nearrow +\infty,$ $\qquad$ 1(26) $\qquad \left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\right)^{\varkappa-k} \eta_n^k \nearrow .$

[Die rechte Seite von 1(26) strebt sogar gegen ∞, wenn $k \geq 1$ ist.]

In unserem Falle ist nach Voraussetzung

$$C^{\varkappa}(\omega) = \frac{1}{k+1} I^{\varkappa-k}\left[\frac{\lambda_{\nu+k+1}-\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu} C_\nu^k\right] = o(1)\,\eta_n .$$

Also gilt für $k<\varrho\leq\varkappa$

$$C^{\varrho}(\omega) = \frac{1}{k+1} I^{\varrho-k}\left[\frac{\lambda_{\nu+k+1}-\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu} C_\nu^k\right]$$

1(27) $\qquad = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_\nu|^{\varkappa-\varrho}}$

und für $\varrho = k$

$$\frac{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} C_n^k = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}}, \quad \text{d.h.} \quad C_n^k = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}} .$$

Ist $k=0$, so ist $C_n^k = C^k(\omega)$, und es folgt 1(27) auch für $\varrho = k$. Ist aber $k \geq 1$, so folgt wegen 1(14) und 1(26) wieder

$$C^k(\omega) = C_n^k + \frac{\omega-\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}(C_n^k - C_{n-1}^k)$$

$$= o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}} .$$

In jedem Falle gilt also 1(27) für $k \leq \varrho \leq \varkappa$.

Ist $0<\varkappa\leq 1$, so ist die Behauptung damit bewiesen. Wir nehmen jetzt die Behauptung für $0<\varkappa\leq r$ (r ganz) als richtig an und werden dann ihre Gültigkeit für $r<\varkappa\leq r+1$ zeigen:

Der bisherige Beweis zeigt ($k=r$), daß 1(27) jedenfalls für $r \leq \varrho \leq \varkappa$ richtig ist. Insbesondere ist

1(28) $\qquad C^r(\omega) = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}} .$

Für $\varkappa = r$ ist aber nach Induktionsannahme die Behauptung richtig, und es gilt wegen 1(26) und 1(21)

$$0<\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}} \nearrow +\infty, \quad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}} : |\Delta\lambda_n|^r = \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}} \nearrow \quad (k=r\geq 1).$$

Daher folgt aus 1(28) die Abschätzung

$$C^{\varrho}(\omega) = o\left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}}\right)\frac{1}{|\Delta\lambda_n|^{r-\varrho}} = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \quad \text{für} \quad 0\leq\varrho\leq r.$$

Also gilt 1(27) für alle $0\leq\varrho\leq\varkappa$, q. e. d.

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(1)$ mit $O(1)$ ist bei beiden Teilen des Beweises leicht nachzuprüfen.

Lemma 7. *Es sei* $|\Delta\lambda_n|$ *monoton (wachsend oder fallend) und* $0<\delta<1$; *weiter gelte*

1(29) $0<\eta_n\nearrow+\infty$, 1(30) $\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\delta}\nearrow$, 1(31) $n|\Delta\lambda_n|^\delta\nearrow$.

Dann folgt aus

$$I^0(\omega)=o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{-\delta} \quad \text{und} \quad I^1(\omega)=o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}$$

zusammen die Abschätzung

$$I^\delta(\omega)=o(\eta_n).$$

Dies bleibt richtig, wenn überall $o(\eta_n)$ *durch* $O(\eta_n)$ *ersetzt wird.*

Lemma 7 ist eine Ergänzung zu Lemma 2: Ist $|\Delta\lambda_n|\nearrow$, so gewinnen wir nichts Neues, da dann $\eta_n|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}\nearrow$ ist. Der nachfolgende Beweis wird für diesen Fall auch sehr einfach (die Bedingung $n|\Delta\lambda_n|^\delta\nearrow$ ist dann von selbst erfüllt). Wächst $|\Delta\lambda_n|$ nicht mehr monoton, so läßt sich Lemma 2 im allgemeinen nicht mehr anwenden. Man denke z.B. an $\eta_n=\lambda_n=\log n$, wo sogar $\eta_n|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}\to 0$ strebt. Trotzdem läßt sich die Behauptung aufrechterhalten, wenn auch unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Regularität des Wachstums von $|\Delta\lambda_n|$. Die Einschränkung, die unsere Voraussetzungen mit sich bringen, ist aber nicht groß. Denn es muß stets $n|\Delta\lambda_n|^\delta$ unbeschränkt sein, weil sonst die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\Delta\lambda_\nu|\le K\sum_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/\delta}$$

konvergieren, also λ_n gegen einen endlichen Wert streben würde.

Beweis. Wir fassen wie üblich n und ν als Funktionen von ω bzw. t auf und schreiben

$$I^\delta(\omega)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{\lambda_{n-1}}(\omega-t)^{\delta-1}I^0(t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{\lambda_{n-1}}^{\omega}(\omega-t)^{\delta-1}I^0(t)\,dt=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

Wegen 1(30) ist

$$\mathrm{II}=o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\delta}\,(\omega-\lambda_{n-1})^\delta=o(\eta_n),$$

denn aus 1(31) folgt

1(32) $$|\Delta\lambda_{n-1}|=O(1)\,|\Delta\lambda_n|.$$

Durch partielle Integration finden wir

$$\mathrm{I}=O(1)\,(\omega-\lambda_{n-1})^{\delta-1}I^1(\lambda_{n-1})+O(1)\int_0^{\lambda_{n-1}}(\omega-t)^{\delta-2}I^1(t)\,dt$$

$$=o(\eta_n)+o(\eta_n)\int_0^{\lambda_{n-1}}(\omega-t)^{\delta-2}\,|\Delta\lambda_\nu|^{1-\delta}\,dt,$$

wobei wir wegen der Stetigkeit von $I^1(\omega)$ die Abschätzung

$$I^1(\lambda_{n-1})=o(\eta_{n-1})\,|\Delta\lambda_{n-1}|^{1-\delta}$$

benutzen durften. Die Behauptung ist also bewiesen, wenn wir

1(33) $$\int_0^{\lambda_{n-1}} (\lambda_n - t)^{\delta-2} |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} dt = O(1)$$

zeigen können.

Da für monoton wachsendes $|\Delta \lambda_n|$ die Bedingung 1(33) trivialerweise erfüllt ist, können wir uns auf den Fall $|\Delta \lambda_n| \searrow$ beschränken. Aus der Voraussetzung 1(31) folgt dann

1(34) $$0 < a \leq \frac{|\Delta \lambda_n|}{|\Delta \lambda_{n-1}|} \leq A\,, \quad \frac{|\Delta^2 \lambda_n|}{|\Delta \lambda_n|^{1+\delta}} = O(1)\,.$$

Die erste dieser Bedingungen ist teils selbstverständlich ($A = 1$), teils schon unter 1(32) angeführt. Die zweite ergibt sich in folgender Art von oben nach unten schließend:

$$|\Delta \lambda_n|^\delta \leq \frac{n+1}{n} |\Delta \lambda_{n+1}|^\delta = |\Delta \lambda_{n+1}|^\delta + \frac{|\Delta \lambda_{n+1}|^\delta}{n}\,,$$

$$\frac{|\Delta^2 \lambda_n|}{|\Delta \lambda_n|^{1-\delta}} = O(1)\, \Delta |\Delta \lambda_n|^\delta = O(1)\, \frac{|\Delta \lambda_{n+1}|^\delta}{n}\,,$$

$$\frac{|\Delta^2 \lambda_n|}{|\Delta \lambda_n|^{1+\delta}} = O(1)\, \frac{1}{n |\Delta \lambda_n|^\delta} = O(1)\,.$$

Wir bestimmen nun n' durch die Ungleichungen

$$\lambda_{n'} < \lambda_n - 1 \leq \lambda_{n'+1} \quad (0 \leq n' \leq n-1)$$

und schreiben

$$\int_0^{\lambda_{n-1}} (\lambda_n - t)^{\delta-2} |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} dt = \int_0^{\lambda_{n'}} + \int_{\lambda_{n'}}^{\lambda_{n-1}}\,.$$

Es gilt

$$\int_0^{\lambda_{n'}} = O(1) \int_0^{\lambda_{n'}} (\lambda_n - t)^{\delta-2} dt$$

$$= O(1) + O(1)\, (\lambda_n - \lambda_{n'})^{\delta-1} = O(1)$$

und weiter

$$\int_{\lambda_{n'}}^{\lambda_{n-1}} = \sum_{\nu=n'}^{n-2} |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} \frac{1}{1-\delta} \left[(\lambda_n - t)^{\delta-1}\right]_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}}$$

$$= \frac{1}{1-\delta} \left\{|\Delta \lambda_{n-2}|^{1-\delta} (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{\delta-1} - |\Delta \lambda_{n'}|^{1-\delta} (\lambda_n - \lambda_{n'})^{\delta-1}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{1-\delta} \sum_{\nu=n'}^{n-3} (\lambda_n - \lambda_{\nu+1})^{\delta-1} \Delta |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta}$$

$$= O(1) + O(1) \sum_{\nu=n'}^{n-3} (\lambda_n - \lambda_{\nu+1})^{\delta-1} |\Delta \lambda_{\nu+1}|\,,$$

da wegen 1(34)

$$\Delta |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} = O(1)\, \frac{|\Delta^2 \lambda_\nu|}{|\Delta \lambda_\nu|^\delta} = O(1)\, |\Delta \lambda_\nu| = O(1)\, |\Delta \lambda_{\nu+1}|$$

ist. Schließlich gilt

$$\sum_{\nu=n'}^{n-3}(\lambda_n-\lambda_{\nu+1})^{\delta-1}|\Delta\lambda_{\nu+1}|\leq\sum_{\nu=n'}^{n-3}\int_{\lambda_{\nu+1}}^{\lambda_{\nu+2}}(\lambda_n-t)^{\delta-1}\,dt$$
$$=O(1)\,\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{\delta}+(\lambda_n-\lambda_{n'+1})^{\delta}\}$$
$$=O(1).$$

Insgesamt erhalten wir 1(33), q. e. d.

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(\eta_n)$ mit $O(\eta_n)$ ist leicht nachzuprüfen.

Die hier zum Beweis von Lemma 7 benutzte Methode gestattet auch allgemeinere Aussagen darüber zu machen, wie sich die Monotonievoraussetzungen bei Lemma 2 vermeiden lassen. Wir wollen jedoch hierauf nicht weiter eingehen.

1.4. Der allgemeine Äquivalenzsatz.

Satz 1. *Es sei* $\varkappa=k+\delta$ ($k\geq 0$, *ganz*; $0<\delta\leq 1$) *und*

1(35) $\quad 0<\eta_n\nearrow+\infty,$ $\quad$ 1(36) $\quad\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\nearrow,$ $\quad$ 1(37) $\quad\Lambda_n=\frac{\lambda_{n+1}}{|\Delta\lambda_n|}\nearrow$

Bei nicht ganzzahligem $\varkappa$ (*d.h.* $0<\delta<1$) *sei außerdem*

1(38) $\quad|\Delta\lambda_n|$ *monoton,* $\quad$ 1(39) $\quad n\,|\Delta\lambda_n|^{\delta}\nearrow.$

Unter diesen Voraussetzungen sind die drei folgenden Konvergenzaussagen äquivalent:

$$A^{\varkappa}(\omega)=o(1)\,\eta_n,\qquad C^{\varkappa}(\omega)=o(1)\,\eta_n,\qquad C_n^{\varkappa}=o(1)\,\eta_n;$$

insbesondere sind äquivalent ($\eta_n=\lambda_{n+1}^{\varkappa}$)

1(40) $\quad\frac{A^{\varkappa}(\omega)}{\omega^{\varkappa}}=s+o(1)$ *und* $\frac{C^{\varkappa}[s_\nu]}{C^{\varkappa}[1]}=s+o(1).$

Die Behauptung bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzt wird.*

Satz 1 berechtigt uns, die RIESZschen Mittel und die allgemeinen CESÀROschen Mittel als weitgehend äquivalent anzusehen. Die Voraussetzungen werden im allgemeinen erfüllt sein: Zum Beispiel wird im allgemeinen Λ_n monoton wachsen, da für die nicht konvergenzgleichen RIESZschen Mittel Λ_n unbeschränkt sein muß. Auf die besonderen Verhältnisse für $\lambda_n=n$, also im Falle der gewöhnlichen CESÀROschen Mittel, werden wir in § 1.5 zu sprechen kommen. Der nachfolgende Beweis wird in diesem Falle wesentlich einfacher.

Beweis. Es wird genügen, die Äquivalenz von

1(41) $\quad A^{\varkappa}(\omega)=o(1)\,\eta_n$ mit $C^{\varkappa}(\omega)=o(1)\,\eta_n$

zu zeigen. Denn nach Lemma 5 gilt dann auch die Äquivalenz mit $C_n^{\varkappa} = o(1)\,\eta_n$. Weiter folgt aus 1(37) nacheinander

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \left(1 + \frac{1}{\Lambda_n}\right)^{-1} \searrow, \quad \text{also} \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O(1),$$

1(42)
$$|\Delta\lambda_n| \leq |\Delta\lambda_{n-1}| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O(1)\,|\Delta\lambda_{n-1}|,$$
$$0 < a \leq \frac{C^{\varkappa}[1]}{\lambda_{n+1}^{\varkappa}} \leq A.$$

Also muß auch 1(40) gelten.

Die Äquivalenz 1(41) beweisen wir durch Induktion. Für $0 < \varkappa \leq 1$ ist die Behauptung wegen 1(12) selbstverständlich. Wir nehmen jetzt die Behauptung für $0 < \varkappa \leq r$ (r ganz) als richtig an und werden dann ihre Gültigkeit für $r < \varkappa \leq r+1$ zeigen:

Der Beweis geht von den beiden folgenden Formeln aus

1(43)
$$\begin{cases} \dfrac{A^{k+1}(\omega)}{\Gamma(k+2)} = C_n^{k+1} + \dfrac{1}{\Gamma(k+2)} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{k} C_\nu^{\varrho} \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{\varrho} (\omega - \lambda_\nu)^{k+1}\big|_{\nu=n-\varrho} - \\ \qquad - \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{\nu=n-k}^{n} (\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu)\, C_\nu^k, \end{cases}$$

1(44)
$$C^{k+1}(\omega) = C_n^{k+1} + \frac{\omega - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \cdot \frac{\lambda_{n+k+1} - \lambda_n}{k+1}\, C_n^k.$$

Die Formel 1(43) folgt aus Lemma 3, wenn man

$$b_\nu = \frac{1}{\Gamma(k+2)} (\omega - \lambda_\nu)^{k+1}, \qquad r = k$$

setzt und die nach Lemma 4 gültige Beziehung

$$\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k} b_\nu = \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{k+1}$$

berücksichtigt.

Es sei nun

$$A^{\varkappa}(\omega) = o(1)\,\eta_n \quad \text{oder} \quad C^{\varkappa}(\omega) = o(1)\,\eta_n.$$

Aus Lemma 6 und der Induktionsannahme folgt dann in jedem Fall

1(45)
$$C^{\varrho}(\omega) = o(1) \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, k).$$

Denn es ist $k = r$, und für $\varrho \geq 1$ gilt nach 1(26)

$$0 < \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \nearrow + \infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \cdot \frac{1}{|\Delta\lambda_n|^{\varrho}} \nearrow$$

[für $\varrho = 0$ folgt 1(45) unmittelbar aus Lemma 6]. Weiter ist nach Lemma 4 und 1(42)

1(46)
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{\varrho} (\omega - \lambda_\nu)^{k+1} = O(1)\,(\omega - \lambda_\nu)^{k+1-\varrho} = O(1)\,|\Delta\lambda_\nu|^{k+1-\varrho} \\ \qquad\qquad (\nu = n-\varrho; \quad \varrho = 0, 1, \ldots, k). \end{cases}$$

Wir tragen 1(45) und 1(46) in 1(43) und 1(44) ein und erhalten

$$\frac{A^{k+1}(\omega)}{\Gamma(k+2)} - C^{k+1}(\omega) = o(\eta_n) \max_{\nu} |\Delta\lambda_\nu|^{k+1-\varkappa} \quad (n-k \leq \nu \leq n).$$

Ist $\varkappa$ ganzzahlig (d.h. $\varkappa = k+1$), so ist damit die Behauptung bewiesen. Bei nicht ganzzahligem $\varkappa$ (d.h. $0<\delta<1$) ist wegen 1(39)

$$|\Delta\lambda_{n-1}| = O(1)\,|\Delta\lambda_n|,$$

und daher gilt dann

1(47) $$\frac{A^{k+1}(\omega)}{\Gamma(k+2)} - C^{k+1}(\omega) = o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}.$$

Der Formel 1(47) stellen wir die analog gebaute Formel

1(48) $$\frac{A^{k}(\omega)}{\Gamma(k+1)} - \frac{1}{k+1}\,\frac{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\,C_n^k = o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{-\delta}$$

gegenüber, die sofort aus 1(45) mit $\varrho = k$ und der nach Induktionsannahme richtigen Parallelformel für $A^k(\omega)$ folgt. Bezeichnen wir die linke Seite von 1(48) mit $I^0(\omega)$, so ist die linke Seite von 1(47) gleich $I^1(\omega)$. Die Voraussetzungen von Lemma 7 sind dann erfüllt, und es folgt

$$I^\delta(\omega) = \frac{A^\varkappa(\omega)}{\Gamma(\varkappa+1)} - C^\varkappa(\omega) = o(\eta_n), \qquad \text{q. e. d.}$$

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(1)$ mit $O(1)$ ist leicht nachzuprüfen.

1.5. Der RIESZsche Äquivalenzsatz für die gewöhnlichen CESÀROschen Mittel. Wir wenden uns jetzt dem Fall $\lambda_n = n$ zu.

Satz 2. *Ist $\lambda_n = n$ und $0<\eta_n \nearrow +\infty$, so sind die beiden Konvergenzaussagen*

$$A^\varkappa(\omega) = o(1)\,\eta_n \quad \textit{und} \quad S_n^\varkappa = o(1)\,\eta_n$$

äquivalent, insbesondere also auch ($\eta_n = n^\varkappa$)

1(49) $$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} = s + o(1) \quad \textit{und} \quad \frac{S_n^\varkappa}{\binom{n+\varkappa}{n}} = s + o(1).$$

Dies bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ durch $O(1)$ ersetzt wird.

Der Spezialfall 1(49) ist der bekannte RIESZsche Äquivalenzsatz[9]). Für ganze $\varkappa$ ist Satz 2 schon in Satz 1 enthalten, da dann $C_n^\varkappa = S_n^\varkappa$ gilt. Für nicht ganze $\varkappa$ fallen aber die Ergebnisse auseinander, und Satz 2 ist dann gleichbedeutend mit der Äquivalenz von

$$C^\varkappa(\omega) = o(1)\,\eta_n \quad \text{und} \quad S_n^\varkappa = o(1)\,\eta_n.$$

Wegen

$$C^\varkappa(\omega) = I^\delta[C_\nu^k], \qquad S_n^\varkappa = S^\delta[S_\nu^k], \qquad C_\nu^k = S_\nu^k$$

[9]) M. RIESZ [19], eine ausführliche Darstellung des Beweises von M. RIESZ findet man bei HOBSON [8], S. 90—98; weitere Beweise gaben INGHAM (unveröffentlicht, für ganze $\varkappa$ vgl. HARDY [5], S. 113), GERGEN-LITTAUER [2], GERGEN [1], JURKAT-PEYERIMHOFF [12] (für $0<\varkappa\leq 1$).

genügt es, die Äquivalenz von

1(50) $$I^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n \quad \text{mit} \quad S^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n$$

zu zeigen. Damit ist der Beweis des allgemeinen Falles zurückgeführt auf den Spezialfall $\varkappa = \delta$ $(0 < \delta < 1)$.

Wir werden jetzt den *Beweis* von 1(50) erbringen, und zwar nach der Methode von M. Riesz:

Es sei also

$$I^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n \quad \text{oder} \quad S^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n .$$

In beiden Fällen gilt (vgl. Lemma 6 und 10 dieser Arbeit)

$$s_n = o(1)\,\eta_n .$$

Weiter ist

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\,\Delta_\nu(\omega-\nu)^\delta - \binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu} = O(1)\,(n-\nu)^{\delta-2}$$

gleichmäßig für $0 \leq \nu < n$, $n < \omega \leq n+1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} I^\delta[s_\nu] - S^\delta[s_\nu] &= s_n\,\frac{(\omega-n)^\delta}{\Gamma(\delta+1)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu\,\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\,\Delta_\nu(\omega-\nu)^\delta - \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu} \\ &= o(\eta_n) + o(\eta_n)\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)^{\delta-2} \\ &= o(\eta_n), \end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(1)$ mit $O(1)$ ist leicht nachzuprüfen.

2. Größenbeschränkungen für Matrixtransformationen.

Wir betrachten im folgenden reelle Matrixtransformationen der Form

2(1) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\,s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu}\,a_\nu$$

mit

2(2) $$a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu > n, \qquad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu}.$$

Wir wollen sagen, daß durch diese Transformation ein Matrixverfahren $\mathfrak{A}$ gegeben sei, und nennen die Matrizen $A = (a_{n\nu})$ bzw. $\bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$ die FF- bzw. RF-Form von $\mathfrak{A}$. Die Matrix A oder $\bar{A}$ heißt normal, wenn

2(3) $$a_{nn} = \bar{a}_{nn} \neq 0$$

ist. Die Konvergenz wird durch die Matrizen

2(4) $$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \bar{E} = S = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \mathbf{1} & & \ddots & \end{pmatrix}$$

dargestellt. Wir schreiben

$$2(5) \qquad \Delta^r A = (\Delta^r_{\nu} a_{n\nu}) = A S^{-r} \quad (r \text{ ganz}, \geq 0),$$

insbesondere ist

$$2(6) \qquad A = \Delta^1 \overline{A} = \Delta \overline{A}.$$

Als Beispiele seien die bewichteten arithmetischen Mittel $M(p_n)$ und die NÖRLUNDschen Mittel $N(p_n)$ in der FF-Form angegeben

$$M(p_n): \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad (p_\nu > 0),$$

$$N(p_n): \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad (p_\nu > 0).$$

2.1. Matrizen mit Mittelwertsatz. Unser Ziel ist, die genaue Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen für eine möglichst umfangreiche Klasse von Matrixverfahren festzustellen. Es hat sich gezeigt, daß diese Größenbeschränkung in einfacher Weise angegeben werden kann bei allen Matrizen, für die ein gewisser Mittelwertsatz gilt. Wir stellen im folgenden zuerst die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften der Matrizen mit Mittelwertsatz zusammen und werden dann zu Verallgemeinerungen übergehen.

Wir wollen sagen: „A hat die Eigenschaft $\mathfrak{M}$" oder „es gilt $\mathfrak{M}(A)$", wenn für jede Folge $\{s_\nu\}$ und alle $n \leq m$ die Ungleichung

$$\mathfrak{M}: \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leq K \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \qquad (0 \leq n' \leq n)$$

mit geeignetem n' gilt.

Lemma 8. *Hinreichend für $\mathfrak{M}$ sind die folgenden Bedingungen*

$$(\mathrm{M}_1) \qquad a_{n\nu} \neq 0, \qquad 0 \leq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leq K \quad (0 \leq \nu \leq n \leq m);$$

$$(\mathrm{M}_2) \qquad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (0 \leq \nu \leq n \leq m).$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [11], Satz 1.)

Beispiele von Transformationen, für die (M_1), (M_2) und folglich auch der Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ gilt:

$$C^\delta[s_\nu], \qquad S^\delta[s_\nu], \qquad M(p_n) \quad (\text{für alle } p_n)$$

und $N(p_n)$, falls noch zusätzlich

$$0 < p_n \searrow, \qquad \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \quad \text{für} \quad n \nearrow$$

erfüllt ist.

Lemma 9. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $\mathfrak{M}(A)$ und die Spaltenbedingung*

$$Sp_0(A): \qquad a_{n\nu} \to 0 \quad (n \to \infty, \ \nu \text{ fest}).$$

Dann folgt aus $\sigma_n = o(1)$ *für* $n \to \infty$, *daß auch*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu = o(1) \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

ist, und zwar gleichmäßig für alle $0 \leq n \leq m$.

Unter den Voraussetzungen (M_1) und (M_2) statt $\mathfrak{M}$ ist der Beweis sehr leicht, vgl. Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Satz 3. Einen allgemeinen Beweis gaben Zeller [*13*], Satz 3.3; Jurkat-Peyerimhoff [*12*], Satz 4 (Zusatz).

Lemma 10. *Die Matrix A sei normal, und es gelte* $\mathfrak{M}(A)$ *und* $Sp_0(A)$. *Weiter sei* $0 < \eta_n \nearrow$. *Dann folgt aus*

2(7) $$\sigma_n = o(\eta_n) \quad bzw. \quad \sigma_n = O(\eta_n)$$

entsprechend

2(8) $$s_n = o(\eta_n) \frac{1}{a_{nn}} \quad bzw. \quad s_n = O(\eta_n) \frac{1}{a_{nn}}.$$

(Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Satz 4 und 6.)

Zusatz. Ist $0 < \eta_n \nearrow + \infty$, so kann die Voraussetzung $Sp_0(A)$ weggelassen werden. (In diesem Fall ist die Anwendung von Lemma 9 unnötig; vgl. auch den Beweis von Satz 4 dieser Arbeit.)

Liegt der Sachverhalt von Lemma 10 vor, d.h. folgt aus 2(7) stets 2(8) für alle positiven, monoton wachsenden Zahlenfolgen η_n, so wollen wir sagen: „Zur Matrix A gehört die Größenbeschränkung $1/a_{nn}$" [oder allgemeiner die Größenbeschränkung g_n, $g_n \neq 0$, wenn in 2(8) die Zahlenfolge g_n an die Stelle von $1/a_{nn}$ zu treten hat].

Lemma 11. *Ist A normal und* g_n *eine Größenbeschränkung von A*, $g_n \neq 0$, *so gilt jedenfalls*

$$\frac{1}{a_{nn}} = O(g_n).$$

Dies ist eine leichte Verallgemeinerung von Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Satz 5. Der Beweis folgt wieder aus dem Toeplitzschen Satz (vgl. auch die Bemerkungen nach Lemma 15 und 16).

Die beiden Lemmata 10 und 11 besagen zusammen, daß $1/a_{nn}$ eine Größenbeschränkung von A ist und daß sich diese Größenbeschränkung nicht verbessern läßt. Anders ausgedrückt: „Die genaue Größenbeschränkung von A wird durch das Diagonalglied gegeben."

Lemma 12. *Die genaue Größenbeschränkung der normalen Matrix A werde durch das Diagonalglied gegeben und dieses falle (dem Betrage nach) monoton. Dann ist die genaue Größenbeschränkung von* $\bar{A}$ *ebenfalls* $1/a_{nn} = 1/\bar{a}_{nn}$, *d.h. aus 2(7) folgt entsprechend*

2(9) $$a_n = o(\eta_n) \frac{1}{a_{nn}} \quad bzw. \quad a_n = O(\eta_n) \frac{1}{a_{nn}},$$

und diese Abschätzung läßt sich nicht verbessern.

Der Beweis ist trivial. Für die Matrix $\bar{A}$ selbst braucht der Mittelwertsatz nicht zu gelten[10]), und doch wird die genaue Größenbeschränkung wieder durch das Diagonalglied gegeben. Wir werden im folgenden nach umfassenderen Kriterien für Matrizen mit dieser besonderen Eigenschaft suchen.

2.2. Relative Größenbeschränkungen. Wir verallgemeinern die Fragestellung: A und B seien zwei normale Matrizen, und es sei

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} = a_{n\nu} s_\nu, \qquad \tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu.$$

Wir wollen sagen, „die genaue Größenbeschränkung von A nach B wird durch das Diagonalglied gegeben", wenn für jede positive, monoton wachsende Zahlenfolge η_n aus

2(10) $$\sigma_n = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n = O(\eta_n)$$

entsprechend

2(11) $$\tau_n = o(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}} \quad \text{bzw.} \quad \tau_n = O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}},$$

folgt und diese Abschätzung sich nicht verbessern läßt. Diese Aussage ist völlig äquivalent damit, daß die genaue Größenbeschränkung von $A B^{-1}$ durch das Diagonalglied gegeben wird. Ist $B = E$, so kommen wir wieder auf den vorher behandelten Fall zurück.

Die bisherigen Ergebnisse lehren unmittelbar:

Satz 3. *Es sei A, B und C normal. Dann folgt aus $\mathfrak{M}(A B^{-1})$ und $Sp_0(A B^{-1})$, daß die genaue Größenbeschränkung von AC nach BC durch das Diagonalglied gegeben wird.*

Zusatz. Statt $Sp_0(A B^{-1})$ kann man auch $o(B) \leqq o(A)$ voraussetzen, d.h. aus $\tau_n = o(1)$ soll $\sigma_n = o(1)$ folgen. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Als wichtiges neues Ergebnis erhalten wir

Satz 4. *Es sei B und C normal; weiter gelte $\mathfrak{M}(A)$ und $Sp_0(A)$; schließlich sei*

2(12) $$a_{n\nu} \neq 0, \qquad 0 \leqq \frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} \nearrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \qquad (0 \leqq \nu \leqq n).$$

Dann wird die genaue Größenbeschränkung von AC nach BC durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Satz 4 enthält im wesentlichen die bisher gewonnenen Ergebnisse: Setzen wir z.B. $B = E$, so ist 2(12) schon erfüllt, wenn $a_{n\nu} > 0$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ ist. Wir erhalten so Satz 3 unter einer geringfügigen weiteren Voraussetzung. Ist weiter auch $C = E$, so kommen wir auf die Ergebnisse von § 2.1 zurück.

[10]) Vgl. PEYERIMHOFF [18], Satz 7.6; man setze z.B.

$$\sigma_n = S^{\delta}[s_\nu] = S^{1+\delta}[a_\nu] \quad (0 < \delta < 1).$$

Der *Beweis* von Satz 4 beruht auf dem Abelschen Lemma und dem Mittelwertsatz $\mathfrak{M}(A)$: O. B. d. A. kann $C=E$ gesetzt werden, da die genaue Größenbeschränkung nur vom Quotient der beiden Matrizen AC und BC abhängt. Aus 2(12) folgt

$$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} a_{n\nu} s_\nu = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} O\left(\sum_{\nu=n'}^{n} a_{n\nu} s_\nu\right) \quad (0 \leq n' \leq n)$$

$$= \frac{b_{nn}}{a_{nn}} o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} O(\eta_n).$$

Ist η_n beschränkt (also konvergent), so ist bei der o-Abschätzung Lemma 9 heranzuziehen (vgl. Zusatz über Sp_0). Hiermit ist gezeigt, daß durch das Diagonalglied eine Größenbeschränkung gegeben wird. Diese läßt sich aber nach Lemma 11 nicht verbessern.

Wir formulieren noch ein einfaches Lemma über das Zusammensetzen von relativen Größenbeschränkungen.

Lemma 13. *Die Matrizen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ seien normal, weiter gelte*

$$\left|\frac{a^{(2)}_{nn}}{a^{(1)}_{nn}}\right| \nearrow \quad \text{für } n \nearrow,$$

und die genauen Größenbeschränkungen von $A^{(1)}$ nach $A^{(2)}$ und $A^{(2)}$ nach $A^{(3)}$ seien durch die Diagonalglieder gegeben. Dann wird auch die genaue Größenbeschränkung von $A^{(1)}$ nach $A^{(3)}$ durch das Diagonalglied gegeben.

Der Beweis ist trivial.

Die Lage, die durch die Sätze 3, 4 und Lemma 13 entstanden ist, können wir ganz roh folgendermaßen skizzieren: Wir nehmen an, wir hätten zwei Matrizen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ und für den Quotienten von $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ gelte der Mittelwertsatz, also

$$A^{(1)} = A\,C, \qquad A^{(2)} = C \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}(A).$$

Weiter sei $B^{(1)}$ eine weitgehend beliebige Matrix „zwischen" $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$, etwa $B^{(1)} = BC$ (das Wort „zwischen" ist nicht weiter erklärt, da es sich hier nur um eine heuristische Überlegung handelt). Wir fragen uns, ob wir die genauen Größenbeschränkungen von $A^{(1)}$ nach allen diesen Matrizen $B^{(1)}$ angeben können. Die Sätze 3 und 4 besagen, daß dies unter gewissen, nicht sehr einschränkenden Voraussetzungen tatsächlich möglich ist. Wir können nun weiter von $A^{(2)}$ nach $A^{(3)}$ schließen, wobei wiederum der Quotient einen Mittelwertsatz haben soll. Durch Zusammensetzen (Lemma 13) finden wir dann auch die Größenbeschränkungen von $A^{(1)}$ nach den Matrizen $B^{(2)}$, die zwischen $A^{(2)}$ und $A^{(3)}$ liegen. So können wir fortfahren, und wenn beispielsweise $A^{(r)} = E$ ist, erhalten wir die genaue Größenbeschränkung von $A^{(1)}$ selbst wie von $A^{(1)}$ nach allen zwischen $A^{(1)}$ und E gelegenen Matrizen. Ein Beispiel für diesen Gedankengang ist

Satz 5. *Ist A ein Produkt von endlich vielen normalen Matrizen, von denen jede einzelne die Bedingungen Sp_0 und $\mathfrak{M}$ erfüllt und ein (dem Betrage nach)*

monoton fallendes Diagonalglied besitzt, so wird die genaue Größenbeschränkung von A und auch von $\bar{A}$ durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0<\eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3 und Lemma 13 und 12.

2.3. Anwendungen und Beispiele. Wir beginnen mit einer einfachen Anwendung von Satz 5:

Satz 6. *Die Matrix A sei normal, und es sei $|a_{n\,n}| \searrow$. Für ein r gelte $Sp_0(\Delta^r A)$ und $\mathfrak{M}(\Delta^r A)$.*

Dann wird die genaue Größenbeschränkung von A und auch von $\bar{A}$ durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0<\eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Der *Beweis* folgt einfach aus der Beziehung

$$A = \Delta^r A \cdot S^r = \Delta^r A \cdot (S^{\frac{1}{2}})^{2r},$$

wobei die Matrix S^α $(\alpha \geq 0)$ durch die Transformation $S^\alpha[s_\nu]$ definiert sein soll ($S^{\frac{1}{2}}$ erfüllt die Bedingung Sp_0). Dieses Ergebnis hätten wir auch durch wiederholte Anwendung von Lemma 12 zusammen mit Lemma 10 und 11 erhalten können.

Im Falle der gewöhnlichen CESÀROschen Mittel $A = S^\varkappa$ sind die Voraussetzungen von Satz 6 (mit $r = \lceil \varkappa \rceil$) erfüllt, und die genaue Größenbeschränkung ist gleich 1.

Statt der gewöhnlichen Differenzen kann man auch die Differenzen $\Delta/\Delta\lambda$ benutzen. Man erhält dann ein zu Satz 6 analoges Ergebnis. Wir wollen in dieser Richtung der Einfachheit halber nur den folgenden Satz aufstellen:

Satz 7. *Es sei*

$$\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n), \qquad 0<\eta_n \nearrow +\infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \nearrow .$$

Dann folgt für alle $0 \leq \varrho \leq \varkappa$ aus

$$C_n^\varkappa = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad C_n^\varkappa = O(\eta_n)$$

entsprechend

$$C_n^\varrho = o(\eta_n)\frac{|\Delta\lambda_n|^\varrho}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \quad \textit{bzw.} \quad C_n^\varrho = O(\eta_n)\frac{|\Delta\lambda_n|^\varrho}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa},$$

und diese Abschätzung läßt sich nicht verbessern. Weiter haben die Reihenglieder a_n die gleiche genaue Größenbeschränkung wie die Teilsummen $s_n = C_n^0$.

Zusatz. Auf Grund des Äquivalenzsatzes gelten (unter geeigneten Voraussetzungen) für die entsprechenden RIESZschen Mittel die gleichen Größenbeschränkungen und diese lassen sich nicht verbessern, wenn wir zum Vergleich nur Größenbeschränkungen mit $0<g_n \nearrow$ zulassen.

Daß bei den allgemeinen CESÀROschen Mitteln diese Größenbeschränkungen bestehen, ist uns nicht neu (vgl. Lemma 6). Ergänzend ist also nur hinzugekommen, daß dies auch die genauen Größenbeschränkungen sind. Man vergleiche im Falle $\varrho = 0$, $\eta_n = \lambda_{n+1}^\varkappa$ hierzu JURKAT [9], Satz 5.

Wir zeigen jetzt, daß Satz 7 in vollem Umfang in der entwickelten Theorie enthalten ist: Die Matrix $C^\varkappa$ sei durch die Transformation $C^\varkappa[s_\nu]$ definiert. Das Diagonalglied dieser Matrix hat unter den obengenannten Voraussetzungen die genaue Größenordnung $|\Delta\lambda_n|^\varkappa$. Wir haben also zu beweisen, daß die genaue Größenbeschränkung von $C^\varkappa$ nach C^ϱ durch das Diagonalglied gegeben wird (wobei natürlich die zugelassenen Größenordnungen η_n die obigen Voraussetzungen erfüllen sollen). Die Größenbeschränkung überträgt sich dann von den Teilsummen auf die Reihenglieder (Lemma 12).

Nach dem Prinzip von Lemma 13 können wir für den *Beweis* $\tau \leqq \varrho < \varkappa \leqq \tau + 1$ (τ ganz, $\geqq 0$) annehmen[11]).

Zunächst sei $\varrho > \tau$. Dann gibt es nach 1 (13) eine normale Matrix C, so daß

$$C^\varkappa = C^{\varkappa-\tau}\,C\,, \qquad C^\varrho = C^{\varrho-\tau}\,C$$

ist. Setzen wir $A = C^{\varkappa-\tau}$ und $B = C^{\varrho-\tau}$, so sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt: Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist nämlich

$$\frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} = \frac{\Gamma(\varkappa-\tau+1)}{\Gamma(\varrho-\tau+1)}\,\frac{\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^{\varrho-\tau}}{\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^{\varkappa-\tau}} = \frac{\Gamma(\varkappa-\tau)}{\Gamma(\varrho-\tau)}\,\frac{(\lambda_{n+1}-\tau_\nu)^{\varrho-\tau-1}}{(\lambda_{n+1}-\tau_\nu)^{\varkappa-\tau-1}}$$

mit einem passenden τ_ν zwischen λ_ν und $\lambda_{\nu+1}$. Also wächst $b_{n\nu}/a_{n\nu}$ monoton mit ν. Die anderen Bedingungen sind auch erfüllt (die Voraussetzung Sp_0 fällt wegen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ weg).

Ist $\varrho = \tau$, so folgt wegen 1 (13) nach Satz 3, daß die genaue Größenbeschränkung von $C^\varkappa = C^{\varkappa-\tau}C$ nach C durch das Diagonalglied gegeben wird. Die durch C und C^τ definierten Transformationen haben aber die gleiche Größenordnung, und dasselbe gilt für ihre Diagonalglieder. Also wird auch die genaue Größenbeschränkung von $C^\varkappa$ nach C^τ durch das Diagonalglied gegeben.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Weitere Anwendungen der Theorie ergeben sich bei den arithmetischen Mitteln $M(p_n)$ und den Nörlundschen Mitteln $N(p_n)$. Es können folgende relative Größenbeschränkungen untersucht werden:

a) von $M(p_n)$ nach $M(q_n)$, b) von $M(p_n)$ nach $N(q_n)$,

c) von $N(p_n)$ nach $M(q_n)$, d) von $N(p_n)$ nach $N(q_n)$.

Einfache hinreichende Bedingungen dafür, daß die genauen Größenbeschränkungen durch die Diagonalglieder gegeben werden, erhält man aus Satz 4. In den Fällen a) und c) kann man auch Satz 3 heranziehen (vgl. die Parallele zu Satz 6). Wir können die Aufstellung der Bedingungen der Einfachheit wegen dem Leser überlassen.

Als ein letztes Beispiel für die Anwendung unserer Theorie betrachten wir die Matrizen $R^\delta_\lambda = C^\delta$ und $R^\delta_{\Phi(\lambda)}$, die durch die Transformationen

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta\,s_\nu \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu[\Phi(\lambda_{n+1})-\Phi(\lambda_\nu)]^\delta\,s_\nu$$

[11]) Man vgl. hierzu die im Anschluß an Lemma 13 gemachten Bemerkungen und berücksichtige 1 (26).

definiert seien. Es handelt sich also um zwei verschiedene unstetige RIESZsche Mittel der gleichen Ordnung. Die Funktion $\Phi(x)$ möge dabei folgende Bedingungen erfüllen:

2(13) $$0 \leq \Phi(x) \to \infty \quad (x \to \infty),$$

2(14) $$\Phi'(x) > 0, \quad \Phi''(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0,$$

2(15) $$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \quad \text{für} \quad x \nearrow.$$

Ist z. B. $\Phi(x)$ eine L-Funktion im Sinne von HARDY [4], S. 17 mit den Eigenschaften

2(16) $$\Phi(x) \to \infty, \qquad \Phi(x) = o(x) \quad (x \to \infty),$$

so sind die Bedingungen 2(13) bis (15) für alle großen x erfüllt, und hierauf wird es im folgenden nur ankommen.

Satz 8. *Die Funktion $\Phi(x)$ erfülle die Bedingungen* 2(13) *bis* (15), *für die zugelassenen Größenordnungen gelte* $0 < \eta_n \nearrow +\infty$, *schließlich sei* $0 < \delta \leq 1$. *Dann ist die genaue Größenbeschränkung von $R^{\delta}_{\Phi(\lambda)}$ nach R^{δ}_{λ} gleich*

2(17) $$\left[\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}\right]^{\delta},$$

wird also durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Es genügt, wenn $\Phi(x)$ die Bedingungen 2(13) bis (15) nur für alle großen x erfüllt. Die Größenbeschränkung 2(17) kann auch durch

2(18) $$[\Phi'(\lambda_{n+1})]^{-\delta}$$

ersetzt werden, und 2(18) läßt sich nicht verbessern, wenn λ_n nicht zu stark anwächst. Für die stetigen RIESZschen Mittel gilt nach Lemma 5 die gleiche genaue Größenbeschränkung, wenn wir zum Vergleich nur monotone Größenbeschränkungen zulassen.

Zum *Beweis* von Satz 8 zeigen wir, daß die Voraussetzungen von Satz 4 mit $A = R^{\delta}_{\Phi(\lambda)}$, $B = R^{\delta}_{\lambda}$, $C = E$ erfüllt sind. Dies folgt aber sofort aus

Lemma 14. *Gilt* 2(13) *bis* (15), *so ist*

$$\frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} = \frac{\Delta_\nu[\lambda_{n+1} - \lambda_\nu]^{\delta}}{\Delta_\nu[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu)]^{\delta}} \nearrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n).$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Lemma 8.)

Der Zusatz zu Satz 8 folgt aus der Tatsache, daß eine Änderung der Φ-Werte für beschränkte x oder Hinzufügen einer Konstanten zu $\Phi(x)$ auf die Gültigkeit der Größenbeschränkung keinen Einfluß hat. Die weiteren Bemerkungen sind klar.

3. Konvergenzfaktoren für Matrixtransformationen.

Wir wenden uns jetzt der Aufstellung von Konvergenzfaktoren zu. Auch hier spielen wieder die Matrizen mit Mittelwertsatz eine wichtige Rolle. Wir stellen im folgenden zuerst die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften dieser Matrizen zusammen und werden dann zu Verallgemeinerungen übergehen.

3.1. Matrizen mit Mittelwertsatz. Die früheren Ergebnisse führen wir in leicht verallgemeinerter Form an:

Lemma 15. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $Sp_0(A)$. Notwendig dafür, daß aus*

3(1) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n) \quad mit \quad 0 < \eta_n \nearrow$$

stets die Konvergenz der Reihe

3(2) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$$

folgt, sind die beiden nachstehenden Bedingungen:
(F) *Die Zahlen ε_ν lassen sich darstellen in der Form*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty;$$

(G) $$\varepsilon_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu}.$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathfrak{M}(A)$ ist die Bedingung (F) *allein schon hinreichend.*

Zusatz. Ersetzt man bei 3(1) das Symbol o durch O, so bleibt (F) ungeändert und bei (G) ist O mit o zu vertauschen. Die Voraussetzung $Sp_0(A)$ kann in beiden Fällen durch

$$a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest}$$

ersetzt werden. Die Notwendigkeit der Bedingung (G) folgt auch ohne die Voraussetzung $Sp_0(A)$.

Lemma 16. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $Sp_0(A)$. Notwendig dafür, daß aus*

3(3) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu = o(\eta_n) \quad mit \quad 0 < \eta_n \nearrow$$

stets die Konvergenz der Reihe

3(4) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$$

folgt, sind die beiden nachstehenden Bedingungen:
($\overline{\text{F}}$) *Es gilt die Darstellung*

$$\Delta_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty$$

oder auch (falls die folgende Darstellung konvergiert)

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \quad mit\ passendem\ \alpha;$$

($\overline{\text{G}}$) $$\bar{\varepsilon}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu}.$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathfrak{M}(A)$ *sind die Bedingungen* $(\overline{\mathrm{F}})$ *und* $(\overline{\mathrm{G}})$ *zusammen auch hinreichend.*

Zusatz. Ersetzt man bei 3(3) das Symbol o durch O, so bleibt $(\overline{\mathrm{F}})$ ungeändert und bei $(\overline{\mathrm{G}})$ ist O mit o zu vertauschen. Die Voraussetzung $S\mathfrak{p}_0(A)$ kann in beiden Fällen durch

$$a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \qquad \nu \text{ fest}$$

ersetzt werden. Die Notwendigkeit der Bedingung $(\overline{\mathrm{G}})$ folgt auch ohne die Voraussetzung $S\mathfrak{p}_0(A)$.

Zu dem *Beweis* von Lemma 15 und 16 vergleiche man PEYERIMHOFF [*18*], Satz 3.6, 5.3, 5.6 und JURKAT-PEYERIMHOFF [*11*], Satz 10. Gewisse Voraussetzungen, die dort nicht nötig waren, sind weggelassen. Weiter ist die Größenordnung η_n an Stelle von $\eta_n = 1$ eingeführt worden.

Die Notwendigkeit der Bedingungen (G) und $(\overline{\mathrm{G}})$ folgt aus

$$3(5) \qquad s_\nu \varepsilon_\nu = o(1) \quad \text{bzw.} \quad a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = o(1).$$

Lemma 11 ist in diesem Fall nicht direkt anwendbar, aber wir können ganz analog schließen: Es sei $A^{-1} = (a'_{n\nu})$, also

$$s_n \varepsilon_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu} \varepsilon_n \eta_\nu \cdot \frac{\sigma_\nu}{\eta_\nu} = o(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Da σ_ν/η_ν eine beliebige Nullfolge sein kann, folgt nach dem TOEPLITZschen Satz

$$a'_{n\nu} \varepsilon_n \eta_\nu|_{\nu=n} = O(1), \quad \text{d.h.} \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right) a_{nn}.$$

Entsprechendes gilt für $\bar{\varepsilon}_\nu$.

Die Zusätze beziehen sich im wesentlichen auf die Vertauschung von o mit O. Dabei werden die Forderungen 3(1) und 3(3) schwächer, also 3(2) und 3(4) stärker. Die Bedingungen (F) und $(\overline{\mathrm{F}})$ bleiben daher notwendig. Bei den Bedingungen (G) und $(\overline{\mathrm{G}})$ ist O durch o zu ersetzen, wie man der oben angestellten Rechnung entnehmen kann. Der hinreichende Teil der früheren Beweise bleibt mit entsprechenden Änderungen gültig. Man vergleiche auch den Beweis von Satz 9 $(A = E)$ dieser Arbeit.

Liegt der Sachverhalt von Lemma 15 vor, d.h. folgt aus 3(1) bei fester Zahlenfolge η_n stets die Konvergenz der Reihe 3(2), so wollen wir die Zahlen ε_ν als „o-Konvergenzfaktoren für A (zur Größenordnung η_n)" bezeichnen. Ist bei 3(1) das Symbol o durch O ersetzt, so sprechen wir von „O-Konvergenzfaktoren (zur Größenordnung η_n)". Entsprechend bezeichnen wir die Zahlen $\bar{\varepsilon}_\nu$ von Lemma 16 als o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $\bar{A}$.

Für Matrizen, die einen Mittelwertsatz erfüllen, gibt Lemma 15 und 16 einen vollständigen Überblick über alle Konvergenzfaktoren. Bemerkenswert ist der Zusammenhang $\Delta\bar{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu$ zwischen den Bedingungen (F) und $(\overline{\mathrm{F}})$, ferner die Übereinstimmung der Größenbeschränkungen bei (G) und $(\overline{\mathrm{G}})$.

Wir nennen zwei Beispiele[12]) für die Anwendung von Lemma 15 und 16:

Lemma 17. *Es sei* $0<\eta_n \nearrow +\infty$.

Die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die CESÀROschen *Mittel* $(A=S^\delta,\ 0<\delta\leq 1)$ *wird in der FF-Form durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *und in der RF-Form durch die Bedingungen* $(\overline{\text{F}})$ *und* $(\overline{\text{G}})$ *gegeben:*

$$\text{(F)} \qquad \varepsilon_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}=\Delta^{-\delta}\alpha_\nu \quad \textit{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$\text{(G)} \qquad \varepsilon_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \varepsilon_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right);$$

$$(\overline{\text{F}}) \qquad \Delta\bar{\varepsilon}_\nu=\Delta^{-\delta}\alpha_\nu \quad \textit{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$(\overline{\text{G}}) \qquad \bar{\varepsilon}_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right).$$

Zusatz. Die Bedingungen (F) und $(\overline{\text{F}})$ lassen sich nach α_n auflösen und lauten dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n|\Delta^\delta\varepsilon_n|<\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\eta_n|\Delta^{\delta+1}\bar{\varepsilon}_n|<\infty.$$

Die aufgelösten Bedingungen sind zusammen mit (G) bzw. $(\overline{\text{G}})$ wieder notwendig und hinreichend.

Lemma 18. *Es sei* $0<\eta_n \nearrow +\infty$.

Die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die (unstetigen) RIESZschen *Mittel* $(A=R^\delta_\lambda,\ 0<\delta\leq 1)$ *wird in der FF-Form durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *und in der RF-Form durch die Bedingungen* $(\overline{\text{F}})$ *und* $(\overline{\text{G}})$ *gegeben:*

$$\text{(F)} \qquad \varepsilon_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta \quad \textit{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$\text{(G)} \qquad \varepsilon_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta \quad \textit{bzw.} \quad \varepsilon_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta;$$

$$\text{(F)} \qquad \Delta\bar{\varepsilon}_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta \quad \textit{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$\text{(G)} \qquad \bar{\varepsilon}_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta.$$

Zusatz. Die Bedingungen (F) und $(\overline{\text{F}})$ lassen sich für $\delta=1$ nach α_n auflösen und lauten dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\left|\Delta\left(\frac{\varepsilon_n}{\Delta\lambda_n}\right)\right|<\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\left|\Delta\left(\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_n}{\Delta\lambda_n}\right)\right|<\infty.$$

Die aufgelösten Bedingungen sind zusammen mit (G) bzw. $(\overline{\text{G}})$ wieder notwendig und hinreichend, falls noch zusätzlich $\Delta\lambda_{n+1}=O(\Delta\lambda_n)$ vorausgesetzt wird.

[12]) Man vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [*11*], § 7 und die dort zitierten Arbeiten.

3.2. Zusammensetzen von Konvergenzfaktoren. Unsere bisherigen Ergebnisse geben uns nur für die Matrizen mit Mittelwertsatz einen vollständigen Überblick über die Konvergenzfaktoren. Es gibt aber Beispiele, in denen unsere Bedingungen (F), (G) bzw. ($\overline{\text{F}}$), ($\overline{\text{G}}$) notwendig und hinreichend sind, obwohl der Mittelwertsatz nicht gilt. Diese Beispiele legen eine Untersuchung der Iteration der bisherigen Transformationen nahe: Es sei $\mathfrak{C}$ ein Matrixverfahren, das in der FF-Form oder RF-Form durch $C = A\,B$ bzw. $\overline{C} = A\overline{B}$ gegeben sei. Dann entsteht die Frage, ob man nicht auf Grund der Kenntnis der Konvergenzfaktoren für A und $\mathfrak{B}$ die Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ angeben kann.

Wir beginnen mit einer einfachen Bemerkung über das Zusammensetzen von Konvergenzfaktoren. (Die fehlenden Voraussetzungen wird der Leser leicht ergänzen können.)

Die o- und O-Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ erfüllen die Bedingungen

$$\text{(F)}\quad \gamma_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n c_{n\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{($\overline{\text{F}}$)}\quad \Delta\bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n c_{n\nu}$$

mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty.$$

Setzen wir

3 (6) $$\varepsilon_k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n a_{nk},$$

so gehen (F) und ($\overline{\text{F}}$) über in

3 (7) $$\gamma_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} \varepsilon_k b_{k\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta\bar{\gamma}_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} \varepsilon_k b_{k\nu}.$$

Dies beruht auf der Gleichung

$$c_{n\nu} = \sum_{k=\nu}^{n} a_{nk} b_{k\nu}.$$

Die Bedingungen 3 (7) haben den gleichen Aufbau wie die der Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{B}$. Die zur Darstellung der Konvergenzfaktoren benutzten Zahlen ε_k sind aber nach 3 (6) selbst wieder „Konvergenzfaktoren“[13]), und zwar gerade die „Konvergenzfaktoren“ für A, die zu der gleichen Größenordnung η_n gehören. Die Bedingungen 3 (7) können auch nach ε_k aufgelöst sein; das ändert an diesem Prinzip des Zusammensetzens nichts.

Wir haben hier nur die notwendigen Bedingungen (F) und ($\overline{\text{F}}$) auf eine andere Form gebracht, erhalten also in 3 (6) und 3 (7) auch nur notwendige Bedingungen. Nehmen wir zu 3 (6) und 3 (7) noch die Bedingungen

(G) $$\gamma_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu}$$

und

($\overline{\text{G}}$) $$\bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu}$$

[13]) Aus 3 (6) braucht im allgemeinen nicht zu folgen, daß die Zahlen ε_k wirklich Konvergenzfaktoren sind, es sei denn, daß für A der Mittelwertsatz gilt. Sie haben nur die gleiche Darstellung wie die Konvergenzfaktoren.

hinzu, so bleibt es durchaus noch offen, ob wir dadurch tatsächlich die Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ erhalten — auch wenn wir von den ε_k verlangen, daß sie wirklich Konvergenzfaktoren für A sein sollen. Man kann aber vermuten, daß sich auf diese Weise die Konvergenzfaktoren für alle endlichen Produkte von Matrizen mit Mittelwertsatz bestimmen lassen werden. Die folgenden Sätze sollen ein erster Schritt in Richtung auf dieses Ziel sein.

Satz 9. *Die Matrizen A und B seien normal; die genaue Größenbeschränkung von A werde durch das Diagonalglied gegeben, und dieses falle (dem Betrage nach) monoton; die Matrix B erfülle $\mathfrak{M}(B)$ und $Sp_0(B)$.*

Dann ist jedenfalls die folgende Darstellung hinreichend für o- und O-Konvergenzfaktoren

$$\text{für } C = AB\text{:} \qquad \gamma_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \varepsilon_n b_{n\nu} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{\eta_n}{a_{nn}} \right| < \infty,$$

$$\text{für } \overline{C} = A\overline{B}\text{:} \quad \begin{cases} \Delta\bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \varepsilon_n b_{n\nu} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{\eta_n}{a_{nn}} \right| < \infty, \\ \bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu}. \end{cases}$$

(Es wird natürlich vorausgesetzt, daß die Darstellungen konvergieren.)

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung $Sp_0(B)$ weggelassen werden.

Dieser Satz enthält für $A = E$ den hinreichenden Teil von Lemma 15 und 16. Wir bemerken weiter, daß die Zahlen ε_n Konvergenzfaktoren für A sind, ganz im Sinne des vorher erläuterten Prinzips vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren.

Der *Beweis* beruht darauf, daß aus der Größenordnung η_n der $\mathfrak{C}$-Transformation sich für die $\mathfrak{B}$-Transformation die Größenordnung η_n/a_{nn} ergibt. Daraus folgt, daß die Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{B}$, die zu der Größenordnung η_n/a_{nn} gehören, erst recht Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ sein müssen.

Auf Grund des Mittelwertsatzes können wir aber auch direkt schließen:

$$\sum_{\nu=0}^{k} s_\nu \gamma_\nu = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon_n \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu} s_\nu$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Die Summe I ist die k-te Teilsumme der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O\left(\frac{\eta_n}{a_{nn}}\right),$$

und für die Summe II gilt

$$\mathrm{II} = O(1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{\eta_n}{a_{nn}} \right| = o(1).$$

Der Beweis für $\overline{C}$ kann auf diesen durch partielle Summation zurückgeführt werden (man benutze Lemma 10).

Satz 9 liefert in manchen Fällen recht einfache hinreichende Bedingungen für Konvergenzfaktoren. Zum Beispiel kann man für $\mathfrak{B}$ die (unstetigen) RIESZschen Mittel 1. Ordnung nehmen. Dann lassen sich nach dem Zusatz zu Lemma 18 die Konvergenzfaktorenbedingungen nach ε_n auflösen. So gewinnt man einen neuen Zugang zu den Ergebnissen von JURKAT [9], § 2. Andere einfache Beispiele lassen sich leicht bilden.

Bei Satz 9 haben wir einen relativ großen Anwendungsbereich, dafür aber nur hinreichende Bedingungen. Anders steht es bei einem Typ von Matrizen, den wir von Satz 6 her kennen.

Satz 10. *Die Matrix C sei normal, und es sei $|c_{nn}| \searrow$; weiter gelte $\mathfrak{M}(\Delta^r C)$ und $Sp_0(\Delta^r C)$. Dann wird die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für C durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *und für $\overline{C}$ durch die Bedingungen* ($\overline{\text{F}}$) *und* ($\overline{\text{G}}$) *gegeben:*

(F) $$\Delta^r \gamma_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \Delta_\nu^r c_{n\nu}, \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty,$$

(G) $$\gamma_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu};$$

($\overline{\text{F}}$) $$\Delta^{r+1} \overline{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \Delta_\nu^r c_{n\nu}, \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty,$$

($\overline{\text{G}}$) $$\overline{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu}.$$

Zusatz. Die Voraussetzung $Sp_0(\Delta^r C)$ kann durch

$$\Delta_\nu^r c_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest}$$

ersetzt werden.

Dieser Satz gibt für $r = 0$ die gleiche Darstellung der Konvergenzfaktoren wie Lemma 15 und 16. Setzen wir

$$C = AB \quad \text{mit} \quad A = \Delta^r C, \qquad B = S^r,$$

so erkennen wir, daß $\Delta^r \gamma_\nu = \varepsilon_\nu$ gerade die nach ε_ν aufgelöste Bedingung 3 (7) ist und daß die Zahlen ε_ν Konvergenzfaktoren für A sind, ganz im Sinne des eingangs erläuterten Prinzips vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren.

Der *Beweis* beruht auf einer r-maligen partiellen Summation:

3 (8) $$\sum_{\nu=0}^{k} s_\nu \gamma_\nu = \sum_{\varrho=0}^{r-1} S_{k-\varrho}^{\varrho+1} \Delta^\varrho \gamma_{k-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{k-r} S_\nu^r \Delta^r \gamma_\nu$$

$$= \text{I} + \text{II}.$$

Wir wissen von Lemma 15 her, daß (G) eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von 3 (8) ist. Also gilt auch

$$\Delta^\varrho \gamma_k = O\left(\frac{1}{\eta_k}\right) c_{kk} \quad \text{bzw.} \quad \Delta^\varrho \gamma_k = o\left(\frac{1}{\eta_k}\right) c_{kk}.$$

Andererseits ist nach Satz 6 die genaue Größenbeschränkung von C nach S^ϱ $(0 \leq \varrho \leq r)$ gleich $1/c_{n\,n}$. Daraus folgt ersichtlich

$$\mathrm{I} = o(1) \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

so daß unter der Voraussetzung (G) die Konvergenz von 3 (8) gleichbedeutend ist mit der Konvergenz von II. Dies besagt aber nichts anderes, als daß die Zahlen $\Delta^r \gamma_\nu$ Konvergenzfaktoren für $\Delta^r C$ sein sollen, d.h. nach Lemma 15, daß (F) gelten soll. (F) und (G) sind also zusammen notwendige und hinreichende Bedingungen. Die Aussage über die Konvergenzfaktoren für $\overline{C}$ folgt aus dem bisherigen Beweis wegen $\Delta^{r+1}\overline{C} = \Delta^r C$.

Satz 10 läßt sich unmittelbar auf die Cesàroschen Mittel beliebiger Ordnung $(C = S^\varkappa, \varkappa > 0)$ anwenden. Die Bedingungen lauten in aufgelöster Form

$$\text{für } C: \quad \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n |\Delta^\varkappa \gamma_n| < \infty, \qquad \gamma_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right);$$

$$\text{für } \overline{C}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n |\Delta^{\varkappa+1} \bar{\gamma}_n| < \infty, \qquad \bar{\gamma}_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\gamma}_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right).$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von Lemma 17.

Bei der bisherigen Betrachtung haben wir die gewöhnlichen Differenzen bevorzugt. Wir können aber auch mit den allgemeinen Differenzen $\Delta/\Delta\lambda$ arbeiten und erhalten dann ähnliche Ergebnisse. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf die Anwendungen bei Rieszschen Mitteln, die besondere Bedeutung haben.

3.3. Die Konvergenzfaktoren für Rieszsche Mittel beliebiger Ordnung. Wir wollen uns jetzt der Bestimmung der Konvergenzfaktoren für die Rieszschen Mittel zuwenden. Bisher waren genaue Bedingungen nur bekannt für die Ordnungen $0 < \varkappa \leq 1$ und darüber hinaus nur hinreichende Bedingungen[14]). Die auftretenden Schwierigkeiten liegen zu einem Teil an dem stetigen Parameter der Rieszschen Mittel. Für $0 < \varkappa \leq 1$ sind aber die stetigen Mittel mit den unstetigen äquivalent, und daher genügt es, die Konvergenzfaktoren für diese zu kennen. Dieser Gedanke läßt sich sofort verallgemeinern: Auf Grund unseres Äquivalenzsatzes sind (unter gewissen Voraussetzungen) die Konvergenzfaktoren für die Rieszschen Mittel auch Konvergenzfaktoren für die allgemeinen Cesàroschen Mittel und umgekehrt. Damit werden wir nun einen Zugang zu den Konvergenzfaktoren für die Rieszschen Mittel beliebiger Ordnung finden.

Die allgemeinen Cesàroschen Mittel waren in § 1.1 durch die Transformation $C^\varkappa[s_\nu]$ definiert, und wir hatten $\varkappa = k + \delta$ (k ganz, ≥ 0; $0 < \delta \leq 1$) gesetzt. Die vermittelnde Matrix bezeichnen wir wieder[15]) mit $C^\varkappa$; insbesondere ist $C^\delta = R^\delta_\lambda$.

---

[14]) Man vgl. Jurkat [9], §§ 1,2; Peyerimhoff [18], § 9; Jurkat-Peyerimhoff [11], § 7; vgl. weiter Lemma 18 und Satz 9 dieser Arbeit.

[15]) Vgl. die Bezeichnungen bei Satz 7 und 8.

Satz 11. *Es sei (wie bei Satz 7)*

$$\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n), \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \nearrow .$$

Dann wird die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die allgemeinen CESÀROschen *Mittel in der FF-Form (d.h. für $C^\varkappa$) durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *gegeben:*

(F) *Schreiben wir $\gamma_\nu = \Delta\bar{\gamma}_\nu$, so gilt die Darstellung*

$$|\Delta\lambda_\nu|\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1}\bar{\gamma}_\nu = \varepsilon_\nu ,$$

wobei die ε_ν o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $C^\delta = R_\lambda^\delta$ (zur Größenordnung η_n) sind;

(G) $$\gamma_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\varkappa \quad \textit{bzw.} \quad \gamma_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\varkappa .$$

Zusatz. Nach Lemma 18 können wir die Bedingung (F) ersetzen durch

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1}\bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n| < \infty .$$

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, also $\delta = 1$, so können wir die aufgelösten Bedingungen für ε_ν benutzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\left|\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_n^\varkappa\bar{\gamma}_n\right| < \infty .$$

Jede dieser Bedingungen ist zusammen mit (G) wieder notwendig und hinreichend.

Bei Satz 11 bestätigt sich erneut das früher erläuterte Prinzip vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren. Betrachten wir nämlich die Produktdarstellung

1 (13) $$C^\varkappa[s_\nu] = C^\delta\left[\frac{1}{k+1}\,\frac{\lambda_{\nu+k+1}-\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}\,C_\nu^k\right]$$

für $C^\varkappa$, so erkennen wir in (F) die nach ε_ν aufgelöste Bedingung 3 (7) wieder.

Der *Beweis* geht von der nach Lemma 3 gültigen Formel 3 (9) aus ($\gamma_\nu = \Delta\bar{\gamma}_\nu$):

3 (9) $$\sum_{\nu=0}^{n-1}s_\nu\gamma_\nu = \sum_{\varrho=1}^{k}C_\nu^\varrho\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho\bar{\gamma}_\nu\Big|_{\nu=n-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-k-1}C_\nu^k\Delta_\nu\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k\bar{\gamma}_\nu = \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

Nach Lemma 15 ist (G) eine notwendige Bedingung, da die genaue Größenordnung des Diagonalglieds von $C^\varkappa$ gleich $|\Delta\lambda_n|^\varkappa$ ist (vgl. Beweis zu Satz 7). Aus (G) folgt aber

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho\bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^{\varkappa-\varrho} \quad \text{bzw.} \quad = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^{\varkappa-\varrho} \quad \text{für} \quad \varrho = 1,\ldots,k .$$

Andererseits ist nach Satz 7

$$C_\nu^\varrho = o(\eta_\nu)\,|\Delta\lambda_\nu|^{\varrho-\varkappa} \quad \text{bzw.} \quad = O(\eta_\nu)\,|\Delta\lambda_\nu|^{\varrho-\varkappa} \quad \text{für} \quad \varrho = 1, \ldots, k.$$

Also gilt

$$\mathrm{I} = o(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. die Konvergenz der linken Seite von 3(9) ist unter der (notwendigen) Voraussetzung (G) gleichbedeutend mit der Konvergenz von

$$\mathrm{II} = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k \cdot |\Delta\lambda_\nu| \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} \bar{\gamma}_\nu = \sum_\nu t_\nu \varepsilon_\nu.$$

In dieser Summe durchläuft t_ν wegen 1(13) alle Folgen mit

$$C^\delta[t_\nu] = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad = O(\eta_n),$$

wenn s_ν alle Folgen mit

$$C^\varkappa[s_\nu] = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad = O(\eta_n)$$

durchläuft. Daher bedeutet die Konvergenz von II, daß die ε_ν o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $C^\delta = R_\lambda^\delta$ (zur Größenordnung η_n) sind. Also sind (F) und (G) notwendig und hinreichend für die Konvergenz von 3(9), d.h. für die Konvergenzfaktoren für $C^\varkappa$.

Aus Satz 11 können wir durch partielle Summation

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{\gamma}_\nu = s_n \bar{\gamma}_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta\bar{\gamma}_\nu$$

sehr leicht den entsprechenden Satz für die RF-Form der allgemeinen Cesàro-schen Mittel ableiten. [Die Notwendigkeit von $(\overline{\mathrm{G}})$ folgt aus Lemma 16.]

Satz 12. *Es sei (wie bei Satz 7)*

$$\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n), \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \nearrow.$$

Dann wird die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die allgemeinen Cesàroschen Mittel in der RF-Form (d.h. für $C^\varkappa S$) durch die Bedingungen $(\overline{\mathrm{F}})$ und $(\overline{\mathrm{G}})$ gegeben:

$(\overline{\mathrm{F}})$ *Es gilt die Darstellung*

$$|\Delta\lambda_\nu| \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} \bar{\gamma}_\nu = \varepsilon_\nu,$$

wobei die ε_ν o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $C^\delta = R_\lambda^\delta$ (zur Größenordnung η_n) sind;

$(\overline{\mathrm{G}})$ $$\bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) |\Delta\lambda_\nu|^\varkappa \quad \text{bzw.} \quad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) |\Delta\lambda_\nu|^\varkappa.$$

Zusatz. Nach Lemma 18 können wir die Bedingung $(\overline{\mathrm{F}})$ ersetzen durch

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} \bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty.$$

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, also $\delta = 1$, so können wir die aufgelösten Bedingungen für ε_ν benutzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \left| \Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_n^{\varkappa} \bar{\gamma}_n \right| < \infty .$$

Jede dieser Bedingungen ist zusammen mit $(\overline{G})$ wieder notwendig und hinreichend.

4. Vergleichssätze für Matrixtransformationen.

Wir hatten in § 2 die Frage untersucht, wann aus einer Größenordnung der A-Transformation eine gewisse Größenordnung der B-Transformation folgt. Wir denken uns jetzt die Matrizen A und B festgehalten und werden nun die umgekehrte Fragestellung untersuchen:

Es sei $0 < \eta_n \nearrow$. Wenn aus

4(1) $$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n)$$

bei fester Zahlenfolge η_n stets

4(2) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n)$$

folgt, so schreiben wir kurz

4(3) $$o(B) \leqq o(A) \; [\eta_n] .$$

Folgt aus 4(1) stets 4(2) und auch umgekehrt, so schreiben wir

4(4) $$o(B) = o(A) \; [\eta_n] ;$$

gilt die Umkehrung nicht, so schreiben wir

4(5) $$o(B) < o(A) \; [\eta_n] .$$

Die Relationen

$$O(B) \leqq O(A) \; [\eta_n] , \qquad O(B) = O(A) \; [\eta_n] , \qquad O(B) < O(A) \; [\eta_n]$$

werden durch Vertauschung von o mit O in 4(1) und 4(2) erklärt.

Es wird sich zeigen, daß die in § 2 untersuchten Matrizen A und B im wesentlichen in der Relation 4(3) zueinander stehen. Dies kommt in den entsprechenden Monotonievoraussetzungen zum Ausdruck. Andererseits ist durch die „Vergleichssätze" die Frage nach den relativen Größenbeschränkungen verallgemeinert. Diese lassen sich jetzt als Vergleichssätze spezieller Art formulieren:

$$o(A) \leqq o(B^*) \; [\eta_n] \quad \text{bzw.} \quad O(A) \leqq O(B^*) \; [\eta_n] \quad \text{mit} \quad B^* = \left(\frac{a_{nn}}{b_{nn}} b_{n\nu} \right) .$$

(So ist z. B. Satz 4 im wesentlichen in Lemma 19 enthalten. Dieser Zusammenhang legt einige einfache Verallgemeinerungen und Ergänzungen zu den Sätzen des § 2 nahe, die aber keine große Bedeutung haben.)

Auch zwischen den Vergleichs- und den Konvergenzfaktorensätzen besteht ein gewisser Zusammenhang, der besonders bei nicht zeilenfiniten Matrizen von Bedeutung ist[16]: die einzelnen Zeilen der Matrix A müssen Konvergenzfaktoren für B sein. Diese „Anwendbarkeitsbedingung" hat insbesondere die Darstellung $A = C\,B$ zur Folge, wobei die einzelnen Zeilen von C sich aus den Darstellungen der einzelnen Zeilen von A als Konvergenzfaktoren ergeben. Aus dem Toeplitzschen Satz erhält man dann weitere Bedingungen, die zusammen mit den Konvergenzfaktorenbedingungen notwendig und hinreichend für den Stärkevergleich

$$O(B) \leqq O(A)\,[\eta_n] \quad \text{bzw.} \quad o(B) \leqq o(A)\,[\eta_n]$$

sind.

4.1. Matrizen mit Mittelwertsatz. Auch bei den Vergleichssätzen spielen wieder die Matrizen mit Mittelwertsatz eine besonders wichtige Rolle. Wir stellen im folgenden zuerst die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften dieser Matrizen zusammen und werden dann zu Verallgemeinerungen übergehen.

Lemma 19. *Es gelte* $\mathfrak{M}(B)$ *und* $b_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leq n$. *Dann folgt aus*

$$4(6) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right| = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty \qquad \left(\Delta_\nu \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} = \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \quad \text{für} \quad \nu = n \right)$$

die Beziehung

$$O(B) \leqq O(A)\,[\eta_n].$$

Gilt überdies noch $Sp_0(A)$ *und* $Sp_0(B)$, *so ist auch*

$$o(B) \leqq o(A)\,[\eta_n].$$

(Jurkat-Peyerimhoff [12], Satz 5.)

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so können die Voraussetzungen $Sp_0(A)$, $Sp_0(B)$ weggelassen werden.

Aus 4(6) folgt $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} = O(1)$. Um uns von dieser Einschränkung zu befreien, wird ein weiterer Mittelwertsatz $\mathfrak{M}^*$ eingeführt. Wir sagen: „Eine normale Matrix A hat die Eigenschaft $\mathfrak{M}^*$" oder „es gilt $\mathfrak{M}^*(A)$", wenn für jede Folge $\{s_\nu\}$ und alle $n \leq m$ die Ungleichung

$$\mathfrak{M}^*: \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leq K^* \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \, \frac{\left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right|}{\sum_{\nu=0}^{n'} |a_{n'\nu}|} \qquad (0 \leq n' \leq n)$$

mit geeignetem n' gilt.

[16] Vgl. Lorentz [15], Peyerimhoff [17], Zeller [23].

Lemma 20. *Hinreichend für* $\mathfrak{M}^*$ *(mit* $K^*=1$*) sind die folgenden Bedingungen*

(M_1) $\quad a_{n\nu} \neq 0, \quad 0 \leq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leq K \quad (0 \leq \nu \leq n \leq m);$

(M_2) $\quad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow$ *für* $\nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n \leq m).$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Satz 1.)

Es sind also die gleichen Bedingungen wie bei Lemma 8, und die dort genannten Beispiele für $\mathfrak{M}$ sind zugleich Beispiele für $\mathfrak{M}^*$.

Lemma 21. *Es gelte* $\mathfrak{M}^*(B)$ *und* $b_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leq n$. *Ferner sei*

$$\sum_{\nu=0}^{m} |b_{m\nu}| = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}| \quad (0 \leq n \leq m)$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|.$$

Dann folgt aus

4(7) $$\sum_{\nu=\mu}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right| = O\left(\frac{a_{n\mu}}{b_{n\mu}} \right) + O(1) \quad (0 \leq \mu \leq n)$$

die Beziehung

$$O(B) \subseteqq O(A) \, [\eta_n].$$

Gilt überdies noch $Sp_0(A)$ *und* $Sp_0(B)$, *so ist auch*

$$o(B) \subseteqq o(A) \, [\eta_n].$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Satz 6.)

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so können die Voraussetzungen $Sp_0(A)$, $Sp_0(B)$ weggelassen werden.

Die Bedingungen 4(6) und 4(7) sind unter einfachen Monotonievoraussetzungen erfüllt.

In gewissen Fällen können die Vergleichssätze verschärft werden:

Lemma 22. *Ist A normal, so folgt aus*

4(8) $$o(B) \subseteqq o(A) \, [\eta_n]$$

und

$$b_{nn} \neq O(a_{nn}) \quad (n \to \infty)$$

die Beziehung

4(9) $$o(B) \subset o(A) \, [\eta_n].$$

In 4(8) *und* 4(9) *darf o durch O ersetzt werden.*
(JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Lemma 7.)

4.2. Einige Verallgemeinerungen. Bei den bisherigen Vergleichssätzen wurde immer vorausgesetzt, daß für die „schwächere" Matrix B einer

der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}^*$ gelten soll. Bei Anwendungen ist aber diese Bedingung nicht immer erfüllt. Man wird sich daher von dieser Einschränkung nach Möglichkeit befreien wollen. Die Situation ist ähnlich wie in § 2.2 bei den Sätzen über relative Größenbeschränkungen, und wir helfen uns wieder durch die gleiche Überlegung:

Lemma 23. *Ist C normal, so sind die Aussagen*

$$o(B) \leqq o(A)\ [\eta_n]$$

und

$$o(BC) \leqq o(AC)\ [\eta_n]$$

völlig gleichbedeutend. Dies bleibt richtig, wenn überall o durch O ersetzt wird.

Nach dieser selbstverständlichen Bemerkung kommt es bei den Vergleichssätzen nur auf den Quotienten AB^{-1} an; ein normaler Faktor C auf beiden Seiten kann weggelassen werden. Ist z. B. $B = B_1 B_2$, wobei B_2 normal ist und B_1 einen Mittelwertsatz erfüllt, so läßt sich

$$o(B) \leqq o(A)\ [\eta_n] \quad \text{auf} \quad o(B_1) \leqq o(A\,B_2^{-1})\ [\eta_n]$$

zurückführen, und wir können jetzt die Ergebnisse von § 4.1 anwenden. Durch diese Überlegung ist allerdings nur dann etwas gewonnen, wenn die Vergleichsbedingungen nach der Umformung nicht zu kompliziert ausfallen, d. h. wenn sich die Elemente der Matrix $A\,B_2^{-1}$ in einfacher Weise angeben lassen.

Eine erste Anwendung ist

Satz 13. *Es gilt*

$$o(B) \leqq o(A)\ [\eta_n] \quad \textit{und} \quad O(B) \leqq O(A)\ [\eta_n],$$

wenn eine der beiden folgenden Gruppen von Voraussetzungen erfüllt ist:

1°. *Es gelte* $\quad \mathfrak{M}(\Delta^r B), \quad \Delta_\nu^r b_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leqq n$;

weiter sei $\quad 0 \leqq \dfrac{\Delta_\nu^r a_{n\nu}}{\Delta_\nu^r b_{n\nu}} \leqq K, \quad \dfrac{\Delta_\nu^r a_{n\nu}}{\Delta_\nu^r b_{n\nu}}$ *monoton in* ν;

schließlich gelte $Sp_0(\Delta^r A)$ und $Sp_0(\Delta^r B)$, wenn η_n beschränkt ist;
oder

2°. *Es gelte* $\quad \mathfrak{M}^*(\Delta^r B), \quad \Delta_\nu^r b_{n\nu} \neq 0$ *für*, $\nu \leqq n$;

weiter sei $\quad 0 \leqq \dfrac{\Delta_\nu^r a_{n\nu}}{\Delta_\nu^r b_{n\nu}} \searrow$ *für* $\nu \nearrow \quad (0 \leqq \nu \leqq n)$;

schließlich sei $\Delta^r B$ permanent[17]) *und $\Delta^r A$ nulltreu.*

Beweis. Wir brauchen nach Lemma 23 nur die Matrizen $\Delta^r B = B\,S^{-r}$ und $\Delta^r A = A\,S^{-r}$ zu vergleichen. Die Bedingungen 1° und 2° entsprechen der Anwendung von Lemma 19 bzw. 21.

[17]) Die Permanenzbedingung kann ersetzt werden durch Sp_0 und die Forderung, daß die Zeilennormen die genaue Größenordnung 1 haben sollen.

Zusatz. Die Monotonievoraussetzungen können natürlich leicht durch allgemeinere Voraussetzungen ersetzt werden. Eine Verschärfung von Satz 13 erhält man durch Anwendung von Lemma 22. Schließlich erhält man durch Vertauschung von A mit B und nochmalige Anwendung von Satz 13 gewisse Äquivalenzsätze. (Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [12], § 4.)

Eine wichtige Anwendung von Satz 13 bezieht sich auf den Fall der gewöhnlichen CESÀROschen Mittel $B = S^{\varkappa}$:

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so erhalten wir als Vergleichsbedingung bei unbeschränktem η_n

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta_\nu^{\varkappa} a_{n\nu}| = O(1) \quad (\varkappa = k+1,\ r = k).$$

Wir haben hier die allgemeineren Bedingungen von Lemma 19 an Stelle von 1° benutzt. Wir bemerken, daß die notwendige und hinreichende Vergleichsbedingung nur wenig anders lautet:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_n |\Delta_\nu^{\varkappa} a_{n\nu}| = O(\eta_n) \quad \text{und} \quad \Delta_\nu^{\varkappa} a_{n\nu} = o(\eta_n)\ ^{18}).$$

Einfache hinreichende Vergleichsbedingungen bei beliebigem $\varkappa$ sind

1°. Wenn η_n unbeschränkt ist:

$$0 \leq \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \leq K, \qquad \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \text{ monoton in } \nu;$$

oder

2°. Wenn $A^* = \left(\frac{1}{n^\delta}\, \Delta_\nu^k a_{n\nu}\right)$ nulltreu ist und $0 < \frac{\eta_n}{n^\delta} \nearrow$:

$$0 \leq \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \searrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n).$$

Aus Satz 13 ergeben sich für die *Äquivalenz*

$$o(S^{\varkappa}) = o(A)\ [\eta_n] \quad \text{bzw.} \quad O(S^{\varkappa}) = O(A)\ [\eta_n]$$

drei Gruppen von Bedingungen, von denen wir nur die folgende anführen:

Es gelte $\mathfrak{M}^*(\Delta^k A), \quad \Delta_\nu^k a_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leq n$;

weiter sei $a_{nn} = O(1), \quad 0 \leq \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \nearrow$ für $\nu \nearrow$;

schließlich sei $A^* = \left(\frac{1}{n^\delta}\, \Delta_\nu^k a_{n\nu}\right)$ permanent[17]), $0 < \frac{\eta_n}{n^\delta} \nearrow$.

[18]) Vgl. Satz 15. Man kann übrigens die Bedingungen 4(6) und 4(7) von Lemma 19 und 21 entsprechend verallgemeinern:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \left|\Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| = O(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=\mu}^{n} \eta_\nu \left|\Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| = O(\eta_n) \frac{a_{n\mu}}{b_{n\mu}} + O(\eta_n) \quad (0 \leq \mu \leq n).$$

Hierzu braucht man nur in den früheren Beweisen bei der Abschätzung durch den Mittelwertsatz etwas genauer zu verfahren.

Bei Satz 13 haben wir die gewöhnlichen Differenzen benutzt, aber auch hier erhalten wir analoge Ergebnisse bei Verwendung der allgemeinen Differenzen $\Delta/\Delta\lambda$: Nach Lemma 3 gilt für Dreiecksmatrizen A

$$4(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{a}_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu},$$

oder in anderer Form

$$A = \Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{A} \cdot C^r,$$

wobei wir

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{A} = \left(\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}\right)$$

gesetzt haben. Statt die Matrizen A und B zu vergleichen, können wir daher nach Lemma 23 auch $\Delta(\Delta/\Delta\lambda)^r \overline{A}$ und $\Delta(\Delta/\Delta\lambda)^r \overline{B}$ vergleichen. So gelangen wir in gleicher Weise wie bei Satz 13 zu folgendem allgemeineren Ergebnis.

Satz 14. *Es gilt*

$$o(B) \leqq o(A)\,[\eta_n] \quad \textit{und} \quad O(B) \leqq O(A)\,[\eta_n],$$

wenn eine der beiden folgenden Gruppen von Voraussetzungen erfüllt ist:

1°. *Es gelte* $\mathfrak{M}\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{B}\right)$, $\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leqq n$;

weiter sei

$$0 \leqq \frac{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}}{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu}} \leqq K, \qquad \frac{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}}{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu}} \quad \textit{monoton in } \nu;$$

schließlich gelte

$$Sp_0\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{B}\right) \quad \textit{und} \quad Sp_0\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{A}\right), \qquad \textit{wenn } \eta_n \textit{ beschränkt ist;}$$

oder

2°. *Es gelte* $\mathfrak{M}^*\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{B}\right)$, $\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leqq n$;

weiter sei

$$0 \leqq \frac{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}}{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu}} \searrow \quad \textit{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leqq \nu \leqq n);$$

schließlich sei

$$\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{B} \qquad \textit{permanent}^{17}) \textit{ und} \qquad \Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \overline{A} \textit{ nulltreu.}$$

Zusatz. Die Monotonievoraussetzungen können natürlich leicht durch allgemeinere Voraussetzungen ersetzt werden. Eine Verschärfung von Satz 14

erhält man durch Anwendung von Lemma 22. Schließlich erhält man durch Vertauschung von A mit B und nochmalige Anwendung von Satz 14 gewisse Äquivalenzsätze.

4.3. Matrixtransformationen, die nicht schwächer als RIESZsche Mittel sind. Wenn man Matrixtransformationen mit den RIESZschen Mitteln vergleichen will, so treten ganz ähnliche Schwierigkeiten wie bei der Bestimmung der Konvergenzfaktoren auf, die wieder zu einem Teil an dem stetigen Parameter der RIESZschen Mittel liegen. Und auch hier ziehen wir zur Lösung des Problems unseren Äquivalenzsatz heran, der unter gewissen Voraussetzungen den Vergleich mit den RIESZschen Mitteln auf einen Vergleich mit den allgemeinen CESÀROschen Mitteln zurückführt.

Wir beginnen mit dem Vergleich bei ganzzahliger Ordnung:

Satz 15. *Notwendig und hinreichend für*

$$O(C^r) \subseteqq O(A)\ [\eta_n]$$

ist die Bedingung

$$4(11) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \left| \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu} \right| = O(\eta_n) \quad (n \to \infty);$$

notwendig und hinreichend für

$$o(C^r) \subseteqq o(A)\ [\eta_n]$$

sind die Bedingungen 4(11) *und*

$$4(12) \qquad \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu} = o(\eta_n) \quad (\nu \text{ fest}, n \to \infty).$$

Der *Beweis* folgt aus der Beziehung

$$4(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}$$

mit Hilfe des TOEPLITZschen Satzes.

Hinreichende[19]) Bedingungen für

$$O(C^\varkappa) \subseteqq O(A)\ [\eta_n] \quad \text{und} \quad o(C^\varkappa) \subseteqq o(A)\ [\eta_n]$$

bei beliebigem $\varkappa$ erhalten wir aus Satz 14. Wegen der Produktdarstellung

$$C^\varkappa [s_\nu] = C^\delta \left[\frac{1}{k+1} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k \right], \quad \text{d.h.} \quad C^\varkappa = C^* C^k$$

ist

$$\Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^k \overline{C^k} = C^* = \left(\frac{k}{\Gamma(\delta+1)} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{k+1} \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta \right).$$

[19]) Mit Hilfe des erwähnten Zusammenhanges zwischen Konvergenzfaktoren- und Vergleichssätzen ließen sich auch genaue Bedingungen bei beliebigem $\varkappa$ angeben.

Wir können nun ganz entsprechend wie bei der Anwendung von Satz 13 auf die gewöhnlichen Cesàroschen Mittel vorgehen:

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so erhalten wir als Vergleichsbedingung bei unbeschränktem η_n

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{\varkappa} \bar{a}_{n\nu} \right| = O(1) \quad (\varkappa = k+1,\ r = k).$$

Wir haben hier die allgemeineren Bedingungen von Lemma 19 an Stelle von 1° benutzt. Die notwendige und hinreichende Bedingung lautet nur wenig anders[18]).

Einfache hinreichende Vergleichsbedingungen bei beliebigem $\varkappa$ sind

1°. Wenn η_n unbeschränkt ist:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{k+1} \bar{a}_{n\nu}}{\left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta} \leq K, \qquad \frac{\left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{k+1} \bar{a}_{n\nu}}{\left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right) (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta} \quad \text{monoton in } \nu;$$

oder

2°. Wenn $A^* = \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^\delta} \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^k \bar{a}_{n\nu} \right)$ nulltreu ist und wenn $\Delta \lambda_{n+1} = O(\Delta \lambda_n)$, $0 < \frac{\eta_n}{\lambda_{n+1}^\delta} \nearrow$:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{k+1} \bar{a}_{n\nu}}{\left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta} \searrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n).$$

Die Aufstellung von Äquivalenzbedingungen durch zweimalige Anwendung von Satz 14 überlassen wir dem Leser.

Die bisher entwickelten Vergleichsbedingungen lassen verschiedene Anwendungen zu:

a) Das „first theorem of consistency“[20]). Wir definieren jetzt $R_\lambda^\varkappa$ für alle $\varkappa$ durch die Gleichung $R_\lambda^\varkappa = C^\varkappa$ und bezeichnen weiter mit $\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa$ diejenige Matrix, die aus $R_\lambda^\varkappa$ entsteht, wenn man die n-te Zeile mit $1/\lambda_{n+1}^\varkappa$ multipliziert. Bei dem first theorem of consistency (in allgemeiner Form) handelt es sich um die Aussagen

$$o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa \right) \leqq o\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa'}} R_\lambda^{\varkappa'} \right) [\eta_n] \quad \text{und} \quad O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa \right) \leqq O\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa'}} R_\lambda^{\varkappa'} \right) [\eta_n]$$

für $0 \leq \varkappa \leq \varkappa'$. Zunächst ist klar, daß man sich auf den Fall $\varkappa = k + \delta$, $\varkappa' = k + \delta'$ mit $0 \leq \delta < \delta' \leq 1$ beschränken kann, da das Zeichen $\leqq$ transitiv ist. Auf Grund der Beziehung

$$C^\varkappa[s_\nu] = C^\delta \left[\frac{1}{k+1} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k \right] \quad (0 < \delta \leq 1)$$

[20]) Vgl. Hardy-Riesz [6], theorem 16.

läßt sich nach Lemma 23 der Vergleich zurückführen auf

$$4(11) \qquad o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\delta\right) \leqq o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^{\delta'}\right)[\eta_n] \quad \text{und} \quad O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\delta\right) \leqq O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^{\delta'}\right)[\eta_n],$$

wobei man allerdings die zusätzliche Voraussetzung $\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n)$ in Kauf nehmen muß. Die Beziehung 4(11) ist aber richtig nach JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Satz 9, und zwar gilt sie sogar für alle η_n mit $0 < \lambda_{n+1}^\varkappa \eta_n \nearrow$. Diese Überlegungen entsprechen im wesentlichen der Anwendung von 1°. (Man vergleiche auch den Beweis von Satz 7.)

b) Das „second theorem of consistency"[21]. Während wir die unstetigen RIESZschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ mit den allgemeinen CESÀROschen Mitteln identifiziert haben, wollen wir die stetigen RIESZschen Mittel $R^\varkappa(\lambda)$ durch die Transformation $I^\varkappa[s_\nu]$ definieren, also als Matrix mit stetigem ersten Parameter:

$$R^\varkappa(\lambda) = \left(\frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \Delta_\nu (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa\right);$$

dabei soll wieder $\lambda_n < \omega \leqq \lambda_{n+1}$ sein und $(\omega - \lambda_\nu)^\varkappa$ für $\nu > n$ durch Null ersetzt werden. Neben $R^\varkappa(\lambda)$ wird die analog gebaute Transformation

$$R^\varkappa(\Phi(\lambda)) = \left(\frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \Delta_\nu (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^\varkappa\right)$$

betrachtet, wobei $\Phi(x)$ für $x \geqq 0$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$0 \leqq \Phi(x) \to \infty \quad (x \to \infty), \qquad \Phi(x) \nearrow \quad \text{(im engeren Sinne)}$$

sein soll. Bei dem second theorem of consistency (in allgemeiner Form) handelt es sich um die Aussagen

$$4(12) \qquad O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa\right) \leqq O\left(\frac{1}{\Phi^\varkappa(\lambda)} R^\varkappa(\Phi(\lambda))\right) \quad [\eta_n]$$

und

$$4(13) \qquad o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa\right) \leqq o\left(\frac{1}{\Phi^\varkappa(\lambda)} R^\varkappa(\Phi(\lambda))\right) \quad [\eta_n].$$

Dabei soll z.B. 4(12) bedeuten, daß aus

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^\varkappa} C_n^\varkappa = O(\eta_n) \quad (n \to \infty)$$

stets

$$4(14) \qquad \frac{1}{\Phi^\varkappa(\omega)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \Delta_\nu (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^\varkappa s_\nu = O(\eta_n) \quad (\omega \to \infty)$$

folgt. Entsprechendes gilt bei 4(13). Die Bedingung 4(14) ist genau dann erfüllt, wenn sie für jede Folge ω_n mit $\lambda_n < \omega_n \leqq \lambda_{n+1}$ gilt. Für jede feste Folge ω_n ist aber die linke Seite von 4(14) eine gewöhnliche Matrixtransformation, und wir können unsere Vergleichsbedingungen anwenden.

[21]) Vgl. HARDY-RIESZ [6], theorem 17 und 19; HARDY [3]; HIRST [7]; KUTTNER [14]; JURKAT-PEYERIMHOFF [12], § 5.2.

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so erhalten wir nach Satz 15 als notwendige und hinreichende Bedingung für 4(12)

$$4(15)\quad \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \lambda_{\nu+1}^{\varkappa} \left| \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{\varkappa} (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa} \right| = O(\eta_n) \Phi^{\varkappa}(\omega) \quad (\omega \to \infty),$$

wobei für η_n alle Zahlenfolgen mit $0 < \eta_n \lambda_{n+1}^{\varkappa} \nearrow$ zugelassen sind. Als notwendige und hinreichende Bedingungen für 4(13) ergeben sich 4(15) zusammen mit

$$4(16)\qquad \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{\varkappa} (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa} = o(\eta_n) \Phi^{\varkappa}(\omega) \quad (\omega \to \infty).$$

Diese Bedingungen kann man als Weiterbildung der Bedingungen von Hirst [7] ansehen, die hinreichend, aber nur in einem schwächeren Sinne notwendig sind (vgl. Kuttner [14]).

Hinreichende Bedingungen bei beliebigem $\varkappa$ erhalten wir aus 1° und 2°, wenn wir dort η_n durch $\eta_n \lambda_{n+1}^{\varkappa}$ und $\bar{a}_{n\nu}$ durch $\frac{\lambda_{n+1}^{\varkappa}}{\Phi^{\varkappa}(\omega)} (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa}$ ersetzen. Man kann versuchen festzustellen, für welche Funktionen $\Phi(x)$ diese Bedingungen erfüllt sind; aber wir wollen hierauf nicht weiter eingehen (vgl. Jurkat-Peyerimhoff [12], § 5.2).

c) Iteration bewichteter arithmetischer Mittel. Man wird fragen, warum wir die allgemeinen Cesàroschen Mittel nicht als gewöhnliche Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel eingeführt haben, sondern die kompliziertere Definition

$$C^k[s_\nu] = \frac{1}{k} C^1 \left[\frac{\lambda_{\nu+k} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^{k-1} \right]$$

der Definition

$$M^k = (C^1)^k$$

vorgezogen haben[22]). Uns lag daran, für die Rieszschen Mittel eine für manche Zwecke brauchbarere Form zu finden, und wir können daher auch so fragen: Sind die Rieszschen Mittel (d.h. C^k) mit M^k äquivalent? Die Hilfsmittel für einen Vergleich dieser Verfahren in der einen Richtung stehen in Satz 15 bereit. Man kann ebenso leicht nach der gleichen Methode ein zu Satz 15 analoges Ergebnis für die Matrix M^k beweisen, wodurch der Vergleich auch in der anderen Richtung möglich wird. Die Bedingungen für λ_ν, die man auf diese Weise erhält, sind für größere Werte von k nicht sehr übersichtlich und nur erfüllt für gewisse regelmäßig wachsende Folgen λ_ν.

Um den einfachsten Fall zu betrachten, setzen wir $k = 2$: Bei unbeschränktem η_n ist nach Satz 15 für den Vergleich

$$O(C^2) \leqq O(M^2)\ [\eta_n] \quad \text{und} \quad o(C^2) \leqq o(M^2)\ [\eta_n]$$

notwendig und hinreichend

$$4(17)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \left| \Delta_\nu \left(\frac{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+2} - \lambda_\nu} \right) \right| = O(\eta_n).$$

[22]) Die Iteration M^k der arithmetischen Mittel wurde schon von K. Knopp [13] in anderem Zusammenhang untersucht.

Die Bedingung 4(17) ist nicht für alle zulässigen Folgen λ_n erfüllt, aber z. B. wenn $\frac{\Delta\lambda_{\nu+1}}{\Delta\lambda_\nu}$ monoton ist.

Auf eine Untersuchung des allgemeinen Falles, wo in die Bedingungen natürlich die Differenzen höherer Ordnung eingehen, wollen wir verzichten. Wir erkennen aber, daß sich die RIESZschen Mittel nicht in der von uns gewünschten Allgemeinheit durch die gewöhnliche Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel ersetzen lassen.

Literatur.

[1] GERGEN, J. J.: Summability of double Fourier series. Duke Math. J. **3**, 133—148 (1937). — [2] GERGEN, J. J., and S. B. LITTAUER: Continuity and summability for double Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 401—435 (1935). — [3] HARDY, G. H.: The second theorem of consistency of summable series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15**, 72—88 (1916). — [4] HARDY, G. H.: Orders of infinity, 2. Aufl. Cambridge 1924. — [5] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [6] HARDY, G. H., and M. RIESZ: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915. — [7] HIRST, K.: On the second theorem of consistency in the theory of summation by typical means. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **33**, 353—366 (1932). — [8] HOBSON, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, 2. Aufl., Bd. II. Cambridge 1926. — [9] JURKAT, W.: Über Konvergenzfaktoren bei RIESZschen Mitteln. Math. Z. **54**, 262—271 (1951). — [10] JURKAT, W.: Über RIESZsche Mittel mit unstetigem Parameter. Math. Z. **55**, 8—12 (1952). — [11] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1952). — [12] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). — [13] KNOPP, K.: Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung. Palermo Rendiconti **25**, 237—252 (1908). — [14] KUTTNER, B.: Note on the „second theorem of consistency" for RIESZ summability. J. Lond. Math. Soc. **26**, 104—111 (1951). — [15] LORENTZ, G.: Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein CESÀRO-Verfahren sind. Math. Z. **51**, 85—91 (1949). — [16] MINAKSHISUNDARAM, S., and C. T. RAJAGOPAL: On a tauberian theorem of K. ANANDA RAU. Quart. J. Math. **17**, 153—161 (1946). — [17] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Diss. Tübingen 1951. — [18] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1952). — [19] RIESZ, M.: Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1651—1654 (1911). — [20] RIESZ, M.: Sur un thécrème de la moyenne et ses applications. Acta Litt. ac. Sci. Univ. Szeged **1**, 114—126 (1923). — [21] RIESZ, M.: Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **22**, 412—419 (1923). — [22] VERBLUNSKY, S.: On the limit of a function an a point. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **32**, 163—199 (1931). — [23] ZELLER, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1952).

Tübingen, Amselweg 18.

(Eingegangen am 9. Juni 1952.)

PICKERT, G.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 395—404 (1953)

Direkte Zerlegungen von algebraischen Strukturen mit Relationen.

Von
GÜNTER PICKERT.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich den *Remakschen Satz* für eine Gruppe mit einer Familie von Paarungen bewiesen, wobei der Paarungsbegriff den des Operators verallgemeinert. Dieses Ergebnis läßt sich bei geringfügiger Verschärfung der Voraussetzungen wesentlich einfacher durch Zurückführen auf die von O. ORE herrührende, im folgenden als *Satz von Ore* bezeichnete verbandstheoretische Verallgemeinerung des Remakschen Satzes gewinnen; auf diese Tatsache machte mich Herr M. F. SMILEY freundlicherweise aufmerksam. Unter Ausnutzung des hierbei verwendeten Verfahrens gelingt nun die Ausdehnung des Remakschen Satzes auf eine verhältnismäßig umfassende Klasse algebraischer Strukturen mit Relationen. Dies wird im folgenden dargestellt. Abschnitt **1** stellt die benötigten Grundbegriffe und Tatsachen über direkte Zerlegungen algebraischer Strukturen zusammen. In Abschnitt **2** wird in Verallgemeinerung des Paarungsbegriffs erklärt, wann eine Relation (mit beliebig vielen Leerstellen) hinsichtlich einer algebraischen Struktur zulässig heißen soll; für eine solche Relation P werden dann die Begriffe P-Endomorphismus und P-direkte Zerlegung definiert. Abschnitt **3** behandelt die für das Folgende grundlegende Darstellung der P-direkten Zerlegungen mittels der Elemente eines gewissen Verbandes. Anwendung des Oreschen Satzes in der in Abschnitt **4** angegebenen Gestalt auf diesen Verband liefert dann in Abschnitt **5** den Remakschen Satz über die bis auf P-Automorphismen eindeutige Bestimmtheit der maximalen P-direkten Zerlegungen unter der Voraussetzung, daß die algebraische Struktur eine binäre Verknüpfung mit einem eine Unterstruktur bildenden neutralen Element besitzt und daß zwei in Abschnitt **3** definierte Verbände von Kongruenzrelationen untereinander vertauschbare Elemente haben und von endlicher Länge sind.

1. Unter einer *algebraischen Struktur* G sei im folgenden verstanden eine nichtleere Menge (welche der Einfachheit halber ebenfalls mit G bezeichnet werde) zusammen mit einer nichtleeren Menge[2]) Φ von in G erklärten Funktionen

[1]) PICKERT, G.: Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen. Math. Z. **53**, 456—462 (1950).

[2]) In manchen Untersuchungen ist es erforderlich, statt einer Menge eine *Familie* zu nehmen; siehe z.B. H. F. J. LÖWIG, On the properties of freely generated algebras. J. angew. Math. **190**, 65—74 (1952). Die Möglichkeit, mit einer *Menge* auszukommen, beruht darauf, daß hier sämtliche vorkommenden Homomorphismen Endomorphismen sind — von einer unwesentlichen Ausnahme abgesehen.

endlich vieler Argumente, den *Verknüpfungen* von G. Eine solche Verknüpfung $F \in \Phi$ ist also eine Abbildung von G^{n_F}[3]) in G, wobei die natürliche Zahl n_F, die Anzahl der Argumente der Funktion F, durchaus von F abhängen kann. Über Φ werde nun die *Tarskische Voraussetzung*[4]) gemacht, nämlich, daß darin eine Verknüpfung F mit $n_F = 2$ und einem neutralen Element vorkommt; d.h. also, wenn $F(x, y) = x + y$ geschrieben und das — bekanntlich eindeutig bestimmte — neutrale Element als das *Nullelement* 0 bezeichnet wird:

$$x + 0 = x = 0 + x \quad \textit{für alle} \quad x \in G. \tag{1}$$

Ferner wird über dieses Nullelement

$$F(0, \ldots, 0) = 0 \quad \textit{für alle} \quad F \in \Phi \tag{2}$$

vorausgesetzt, d.h. also: $\{0\}$ ist Unterstruktur von G. Allgemein bezeichnet man eine nichtleere Menge $M \subseteq G$ als *Unterstruktur* von G, wenn aus $F \in \Phi$ und $x_\nu \in M$ $(\nu = 1, \ldots, n_F)$ stets $F(x_1, \ldots, x_{n_F}) \in M$ folgt. Eine Unterstruktur kann also wieder als eine algebraische Struktur mit der Verknüpfungsmenge Φ aufgefaßt werden, wobei dann allerdings verschiedene Verknüpfungen von G dieselbe Verknüpfung von M liefern können. Eine Abbildung ϱ von G in sich heißt *Endomorphismus* von G, wenn $\varrho\, 0 = 0$ und

$$\varrho F(x_1, \ldots, x_{n_F}) = F(\varrho x_1, \ldots, \varrho x_{n_F}) \quad \textit{für alle} \quad F \in \Phi \quad \textit{und} \quad x_\nu \in G \tag{3}$$

gilt. Ein Endomorphismus ϱ bildet G auf eine Unterstruktur ab, die mit ϱG bezeichnet werde. Für den durch $\varrho G = \{0\}$ definierten Endomorphismus ϱ wird wieder das Zeichen 0 verwendet. Ein n-tupel $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von Endomorphismen ϱ_ν heißt *direkte Zerlegung*[5]) von G, wenn $\varrho_\nu^2 = \varrho_\nu$, $\varrho_\nu \varrho_\mu = 0$ für alle $\nu, \mu = 1, \ldots, n$ mit $\nu \neq \mu$ gilt und zu $x_1, \ldots, x_n \in G$ mit $\varrho_\nu x_\nu = x_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ genau ein x mit $\varrho_\nu x = x_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ vorhanden ist. Die ϱ_ν heißen die *Zerlegungsendomorphismen* der direkten Zerlegung und die $\varrho_\nu x$ die *Komponenten* von x. Zufolge (1) gilt mit der für $n \geq 2$ durch

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \big(\ldots((x_1 + x_2) + x_3) + \cdots\big) + x_n \quad \text{für alle} \quad x_1, \ldots, x_n \in G$$

bestimmten Funktion F_n die Beziehung[6])

$$x = F_n(\varrho_1 x, \ldots, \varrho_n x) \quad \textit{für alle} \quad x \in G \tag{4}$$

bei jeder direkten Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von G. Eine in G erklärte Äquivalenzrelation γ heißt *Kongruenzrelation* von G, wenn für $F \in \Phi$ und $x_\nu, y_\nu \in G$ aus $x_\nu \gamma y_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n_F)$, d.h. dem Bestehen der Relation γ zwischen x_ν und y_ν, stets $F(x_1, \ldots, x_{n_F})\, \gamma\, F(y_1, \ldots, y_{n_F})$ folgt. Die Kongruenzrelationen von G

[3]) Allgemein bezeichnet A^B die Menge der Abbildungen von B in A, wofür im Falle $B = \{1, \ldots, n\}$ kurz A^n geschrieben wird.

[4]) Vgl. JÓNSSON u. TARSKI, Direct decompositions of finite algebraic systems, Notre Dame 1947, sowie A. W. GOLDIE, On direct decompositions I, Proc. Cambridge Phil. Soc. 48, 1—22 (1952) (im folgenden mit G bezeichnet).

[5]) Vgl. G, S. 3.

[6]) G, S. 6.

bilden nun bekanntlich mit $\leqq$ als Teilordnungsbeziehung einen Verband[7]), wobei $\gamma \leqq \gamma'$ bedeutet, daß aus $x \gamma y$ stets $x \gamma' y$ folgt. In diesem Verband ist die Identität ι das kleinste und die durch $x \varepsilon y$ (für alle $x, y \in G$) erklärte Relation ε das größte Element. Da die Hinzufügung der oben erklärten Funktion F_n zu Φ offensichtlich den Umfang der Begriffe Unterstruktur, Endomorphismus und Kongruenzrelation von G nicht verändert, kann o.B.d.A. $F_n \in \Phi$ für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ angenommen werden.

In einem Verband wird ein Element β als die *direkte Vereinigung*[8]) $\gamma_1 \dot\cup \gamma_2 \dot\cup \ldots \dot\cup \gamma_n$ von Elementen γ_ν bezeichnet, wenn $\beta = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ gilt und $\bigcup_{\nu \in N} \gamma_\nu \cap \bigcup_{\nu \in N'} \gamma_\nu$ (mit $N' = \{1, \ldots, n\} - N$) für jede nichtleere Menge $N \subset \{1, \ldots, n\}$ kleinstes Element des Verbandes ist. Handelt es sich wie hier insbesondere um den Verband der Kongruenzrelationen einer algebraischen Struktur, so wird $\beta = \gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \gamma_n$ im Falle der *Vertauschbarkeit* der γ_ν, d.h. $\gamma_\nu \gamma_\mu = \gamma_\mu \gamma_\nu (\nu, \mu = 1, \ldots, n)$[9]) als das *direkte Produkt* $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ bezeichnet. Folgt aus $\beta = \gamma \dot\cup \gamma'$, daß γ oder γ' das kleinste Element des Verbandes ist, so heißt β *direkt-unzerlegbar*. Die direkten Zerlegungen $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von G sind nun eineindeutig den Darstellungen $\varepsilon = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ zugeordnet[10]) mittels der Festsetzung

(5) $\qquad x \gamma_\nu y$ *genau dann, wenn* $\varrho_\mu x = \varrho_\mu y$ *für alle* $\mu \neq \nu$

und der Bestimmung der ϱ_ν aus den γ_μ mittels

(6) $\qquad 0 \gamma_\nu (\varrho_\nu x) \left(\bigcup_{\mu \neq \nu} \gamma_\mu\right) x$ *für alle* $x \in G$;

dabei ist also $\varrho_\nu G$ der *Kern* von γ_ν, d.h. die Menge der y mit $y \gamma_\nu 0$. Diejenigen Kongruenzrelationen, welche in solchen Darstellungen von ε vorkommen, seien als die *Zerlegungsrelationen* von G und die γ_ν in (5), (6) insbesondere als die Zerlegungsrelationen der direkten Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ bezeichnet. Zur Bestimmung aller Zerlegungsrelationen genügt es natürlich, die Zerlegungen mit $n = 2$ zu betrachten, da ja $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n = \gamma_1 \times (\gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n)$ gilt. Nach (5) gibt es daher zu einer Zerlegungsrelation γ stets einen Endomorphismus ϱ so, daß $x \gamma y$ und $\varrho x = \varrho y$ dasselbe bedeuten. Hat die Verknüpfung $+$ nun die Eigenschaft, daß aus $x + z = y + z$ stets $x = y$ folgt, so folgt daher für jede Zerlegungsrelation γ aus $(x + z) \gamma (y + z)$ stets $x \gamma y$. Für ein Loop (= Quasigruppe mit neutralem Element) sind daher alle Zerlegungsrelationen normal, so daß der von den Zerlegungsrelationen erzeugte Unterverband nur aus untereinander vertauschbaren Kongruenzrelationen besteht[11]).

[7]) Vgl. G. Birkhoff, Lattice Theory, New York 1948 (im folgenden mit B bezeichnet), S. 23/24.

[8]) Bei B, S. 94 nur in modularen Verbänden eingeführt und mit $\times$ bezeichnet; G, S. 6 verwendet die Benennung „direktes Produkt" und die Bezeichnung $\otimes$, während er den im folgenden unter diesem Namen eingeführten Begriff „algebraisches direktes Produkt" nennt und mit $\times$ bezeichnet. $\cup$ und $\cap$ werden hier und im folgenden als Zeichen für die Bildung der oberen bzw. unteren Grenze in dem betreffenden Verband gebraucht.

[9]) $x (\gamma_\nu \gamma_\mu) y$ bedeutet wie üblich, daß es ein z mit $x \gamma_\nu z \gamma_\mu y$ gibt.

[10]) G, S. 8.

[11]) Zum Begriff „normal" und der hier gezogenen Folgerung vgl. B, S. 85/86.

2. Es sei jetzt P eine *Relation* in G mit der nichtleeren Indexmenge[12]) I ihrer Leerstellen, d.h. $P \subseteq G^I$. Die Relation P wird als *zulässig* bezeichnet, wenn für jede Verknüpfung $F \in \Phi$ und $f_1, \ldots, f_{n_F} \in P$ die durch

$$F(f_1, \ldots, f_{n_F})(i) = F(f_1(i), \ldots, f_{n_F}(i)) \quad \textit{für alle} \quad i \in I \tag{7}$$

definierte Abbildung $F(f_1, \ldots, f_{n_F})$ in P liegt und die durch $0(i) = 0$ (für alle $i \in I$) definierte Abbildung 0 in P enthalten ist. Offenbar sind $\{0\}$ und G^I solche zulässigen Relationen. Im folgenden sei P stets als zulässig vorausgesetzt. Das besagt also: *Φ läßt sich gemäß (7) auch als Menge von Verknüpfungen in der dadurch zur algebraischen Struktur gemachten Menge P auffassen und die Gln.* (1), (2) *übertragen sich von G auf P.* Natürlich können verschiedene Verknüpfungen von G dieselbe Verknüpfung von P liefern.

Ein Endomorphismus ϱ von G wird als *P-Endomorphismus* bezeichnet, wenn mit f stets auch die durch

$$(\varrho f)(i) = \varrho f(i) \quad \textit{für alle} \quad i \in I \tag{8}$$

definierte Abbildung ϱf in P liegt[13]). ϱ läßt sich dann gemäß (8) als Abbildung von P in sich auffassen, und zwar ist ϱ sogar Endomorphismus der algebraischen Struktur P; denn aus (3), (7) und (8) folgt $(\varrho F(f_1, \ldots, f_{n_F}))(i) = \varrho F(f_1, \ldots, f_{n_F})(i) = \varrho F(f_1(i), \ldots, f_{n_F}(i)) = F(\varrho f_1(i), \ldots, \varrho f_{n_F}(i)) = F((\varrho f_1)(i), \ldots, (\varrho f_{n_F})(i)) = F(\varrho f_1, \ldots, \varrho f_{n_F})(i)$ für alle $i \in I$, also $\varrho F(f_1, \ldots, f_{n_F}) = F(\varrho f_1, \ldots, \varrho f_{n_F})$, d.h. die (3) entsprechende Beziehung, und ferner ergibt sich $(\varrho\, 0)(i) = \varrho\, 0(i) = \varrho\, 0 = 0$, also $\varrho\, 0 = 0$ auch für das Nullelement von P. Es ist sofort zu erkennen, daß sowohl im Falle $P = \{0\}$ wie auch im Falle $P = G^I$ jeder Endomorphismus ein P-Endomorphismus ist. Ein umkehrbarer P-Endomorphismus ϱ, dessen Umkehrung ϱ^{-1} wieder ein P-Endomorphismus ist[14]), heißt *P-Automorphismus*.

Eine direkte Zerlegung von G, deren Zerlegungsendomorphismen P-Endomorphismen sind, werde *P-direkt* genannt. Wird entsprechend (7) durch

$$F((x_1', \ldots, x_n'), \ldots, (x_1^{(n_F)}, \ldots, x_n^{(n_F)})) = (F(x_1', \ldots, x_1^{(n_F)}), \ldots, F(x_n', \ldots, x_n^{(n_F)})) \tag{9}$$

die Menge G^n der n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zu einer algebraischen Struktur mit der Verknüpfungsmenge Φ gemacht, so wird für jede direkte Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ durch

$$\varrho x = (\varrho_1 x, \ldots, \varrho_n x) \quad \textit{für alle} \quad x \in G \tag{10}$$

eine umkehrbare Abbildung ϱ von G in G^n definiert, welche wegen (9) und der Endomorphismuseigenschaft der ϱ_ν die Gl. (3) erfüllt:

$$\begin{aligned} \varrho F(x_1, \ldots, x_{n_F}) &= (F(\varrho_1 x_1, \ldots, \varrho_1 x_{n_F}), \ldots, F(\varrho_n x_1, \ldots, \varrho_n x_{n_F})) \\ &= F((\varrho_1 x_1, \ldots, \varrho_n x_1), \ldots, (\varrho_1 x_{n_F}, \ldots, \varrho_n x_{n_F})) \\ &= F(\varrho x_1, \ldots, \varrho x_{n_F}). \end{aligned}$$

[12]) Damit wird ausgedrückt, daß I im folgenden durch irgendeine eineindeutig auf I abgebildete Menge ersetzt werden darf.

[13]) Vgl. die Homomorphismusdefinition in G. PICKERT, Bemerkungen zum Homomorphiebegriff, Math. Z. **53**, 375—386 (1950).

[14]) Diese Bedingung ist nicht etwa überflüssig! Siehe PICKERT, a. a. O.[13]).

ϱ ist also ein Isomorphismus[15]) von G auf die Unterstruktur ϱG von G^n. Wird nun P^n in der üblichen Weise, nämlich mittels der Festsetzung $(f_1, \ldots, f_n)(i) = (f_1(i), \ldots, f_n(i))$, als Teilmenge von $(G^n)^1$ aufgefaßt und ϱ mittels (8) auf P ausgedehnt, so gilt:

Eine direkte Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ist genau dann P-direkt, wenn $\varrho P \overset{\cdot}{\subseteq} P^n$ ist

Dieses Ergebnis ist übrigens unabhängig von der Voraussetzung (1).

3. Zur weiteren Untersuchung der P-direkten Zerlegungen werden die folgenden drei Verbände betrachtet: Der von den Zerlegungsrelationen von G erzeugte Unterverband $\mathfrak{G}$ des Verbandes der Kongruenzrelationen von G; der von den Zerlegungsrelationen von P erzeugte Unterverband $\mathfrak{P}$ des Verbandes der Kongruenzrelationen von P; der Unterverband $\mathfrak{V}$ des Kardinalproduktes[16]) $\mathfrak{G}\,\mathfrak{P}$, welcher aus den Paaren (γ, π) mit $\gamma \in \mathfrak{G}$, $\pi \in \mathfrak{P}$ und

$$f(i)\,\gamma\,g(i) \quad \textit{für alle} \quad i \in I, \quad \textit{falls} \quad f\,\pi\,g \tag{11}$$

besteht. Es ist noch nachzuweisen, daß $\mathfrak{V}$ wirklich ein Unterverband ist. Es sei $(\gamma, \pi) \in \mathfrak{V}$, $(\gamma', \pi') \in \mathfrak{V}$. Bekanntlich[17]) folgt aus $f(\pi \cup \pi')\,g$, daß mit gewissen $h_\nu \in P$ Beziehungen $f\,\pi_1\,h_1\,\pi_2\,h_2\,\pi_3 \ldots h_{m-1}\,\pi_m\,g$ bestehen, wobei $\pi_\nu = \pi$ oder $= \pi'$ ist. Gemäß (11) folgt daraus nun $f(i)\,\gamma_1\,h_1(i)\,\gamma_2 \ldots h_{m-1}(i)\,\gamma_m\,g(i)$ mit $\gamma_\nu = \gamma$ oder $= \gamma'$ und daraus wiederum $f(i)\ (\gamma \cup \gamma')\,g(i)$. Somit liegt $(\gamma, \pi) \cup (\gamma', \pi') = (\gamma \cup \gamma', \pi \cup \pi')$ in $\mathfrak{V}$. Aus $f(\pi \cap \pi')\,g$ folgt $f\,\pi\,g$ und $f\,\pi'\,g$, daraus nach (11) $f(i)\,\gamma\,g(i)$ und $f(i)\,\gamma'\,g(i)$, also $f(i)\,(\gamma \cap \gamma')\,g(i)$. Somit liegt auch $(\gamma, \pi) \cap (\gamma', \pi') = (\gamma \cap \gamma', \pi \cap \pi')$ in $\mathfrak{V}$.

Offensichtlich enthält $\mathfrak{G}$ die Kongruenzrelationen ι und ε. Die entsprechenden Kongruenzrelationen von P seien einfachheitshalber ebenso bezeichnet. Es gilt nun der für das Folgende grundlegende Satz[18]): *Die untereinander vertauschbaren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathfrak{G}$ sind genau dann die Zerlegungsrelationen einer P-direkten Zerlegung von G, wenn es untereinander vertauschbare $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathfrak{P}$ mit*

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma_1, \pi_1) \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, (\gamma_n, \pi_n) \tag{12}$$

in $\mathfrak{V}$ gibt. Die π_ν sind dabei durch die γ_ν eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ eine P-direkte Zerlegung von G, so auch — wenn die ϱ_ν gemäß (8) als Abbildungen von P aufgefaßt werden — eine direkte Zerlegung von P; denn sind $f_\nu \in P$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit $\varrho_\nu f_\nu = f_\nu$, also $\varrho_\nu f_\nu(i) = f_\nu(i)$ für alle $i \in I$, gegeben, so gibt es nach Voraussetzung über die ϱ_ν genau eine Abbildung $f \in G^1$ mit $\varrho_\nu f(i) = f_\nu(i)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ für alle $i \in I$ und nach (4) ist dann $f(i) = F_n(f_1(i), \ldots, f_n(i))$, also gemäß (7) $f = F_n(f_1, \ldots, f_n) \in P$. Diese direkte Zerlegung von P liefert nun eine Darstellung $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ in $\mathfrak{P}$. Dabei bedeutet $f\,\pi_\nu\,g$ entsprechend (5) dasselbe wie $\varrho_\mu f = \varrho_\mu g$ für alle $\mu \neq \nu$,

[15]) Vgl. G, S. 4, Th. 3.1.

[16]) Darunter versteht man den Verband aller Paare (γ, π) mit $\gamma \in \mathfrak{G}$, $\pi \in \mathfrak{P}$, in welchem $(\gamma, \pi) \subseteq (\gamma', \pi')$ dasselbe bedeutet wie $\gamma \subseteq \gamma'$, $\pi \subseteq \pi'$; vgl. B, S. 25.

[17]) B, S. 23, Th. 4.

[18]) Für den Fall einer Gruppe G verdanke ich diesen Satz einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. F. Smiley.

also nach (8) dasselbe wie $\varrho_\mu f(i) = \varrho_\mu g(i)$ für alle $\mu \neq \nu$ und alle $i \in I$. Das besagt nach (5) aber gerade $f(i)\,\gamma_\nu\, g(i)$ für alle $i \in I$. Somit ist (11) bestätigt, also $(\gamma_\nu, \pi_\nu) \in \mathfrak{V}$. Da $\mathfrak{V}$ Unterverband von $\mathfrak{G}\mathfrak{P}$ ist, folgt schließlich aus $\varepsilon = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ und $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ die behauptete Beziehung (12).

Ist umgekehrt (12) erfüllt, so folgt daraus wegen der Vertauschbarkeit der γ_ν sowohl wie der π_ν untereinander $\varepsilon = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ in $\mathfrak{G}$ und $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ in $\mathfrak{P}$. Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß die nach (6) durch die γ_ν bestimmten ϱ_ν P-Endomorphismen sind. Zu diesem Zweck werden die Zerlegungsendomorphismen der durch $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ bestimmten direkten Zerlegung von $\mathfrak{P}$ benutzt. Für das Bild f_ν eines $f \in P$ bei dem ν-ten dieser Zerlegungsendomorphismen gilt dann entsprechend (6) die Beziehung

$$0\,\pi_\nu f_\nu \left(\bigcup_{\mu \neq \nu} \pi_\mu\right) f.$$

Es gibt also $h_1, \ldots, h_{m-1} \in P$ so, daß

$$0\,\pi_\nu f_\nu \pi_{\mu_1} h_1 \pi_{\mu_2} h_2 \ldots \pi_{\mu_{m-1}} h_{m-1} \pi_{\mu_m} f$$

mit gewissen $\mu_k \neq \nu$ gilt. Wegen der den (γ_ν, π_ν) zukommenden Eigenschaft (11) folgt daraus

$$0\,\gamma_\nu f_\nu(i)\,\gamma_{\mu_1} h_1(i)\,\gamma_{\mu_2} h_2(i) \ldots \gamma_{\mu_{m-1}} h_{m-1}(i)\,\gamma_{\mu_m} f(i),$$

also

$$0\,\gamma_\nu f_\nu(i) \left(\bigcup_{\mu \neq \nu} \gamma_\mu\right) f(i),$$

d.h. aber nach (6) $f_\nu(i) = \varrho_\nu f(i)$ für alle $i \in I$. Daher ist $\varrho_\nu f = f_\nu \in P$.

Aus dieser Herleitung folgt sofort auch die eindeutige Bestimmtheit der π_ν; denn die zu $\varepsilon = \pi_1 \times \cdots \times \pi_n$ gehörige direkte Zerlegung von P, welche entsprechend (5) umgekehrt die π_ν festlegt, wird ja wegen $\varrho_\nu f = f_\nu$ bereits durch die ϱ_ν, also auch durch die γ_ν bestimmt. Der erste Teil des Beweises liefert übrigens noch die explizite Kennzeichnung der π_ν mittels der γ_ν: $f\,\pi_\nu\, g$ bedeutet dasselbe wie $f(i)\,\gamma_\nu\, g(i)$ für alle $i \in I$.

Die P-direkte Zerlegung $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ werde als *maximal* bezeichnet, wenn in einer P-direkten Zerlegung (ϱ', ϱ'') einer Unterstruktur $\varrho_\nu G$ stets $\varrho' = 0$ oder $\varrho'' = 0$ ist. Es gilt der Satz:

Sind alle Elemente von $\mathfrak{G}$ untereinander vertauschbar und ebenso alle Elemente von $\mathfrak{P}$, so drückt sich die Maximalität einer P-direkten Zerlegung von G darin aus, daß in (12) *die (γ_ν, π_ν) direkt-unzerlegbar sind.*

Beweis. $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ sei nicht maximal, also (ϱ', ϱ'') mit $\varrho' \neq 0$, $\varrho'' \neq 0$ eine P-direkte Zerlegung etwa von $\varrho_1 G$. Man rechnet leicht nach, daß $(\varrho'\varrho_1, \varrho''\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ wieder eine P-direkte Zerlegung von G ist. Da aus $\varrho'\varrho_1 x = \varrho'\varrho_1 y$, $\varrho''\varrho_1 x = \varrho''\varrho_1 y$ sofort $\varrho_1 x = \varrho_1 y$ folgt, sind die $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ auch Zerlegungsrelationen dieser neuen Zerlegung. Werden die den $\varrho'\varrho_1$, $\varrho''\varrho_1$ zugeordneten Zerlegungsrelationen mit γ', γ'' bezeichnet, so folgen aus $x\,\gamma'\,y$ sowohl wie aus $x\,\gamma''\,y$ die Gleichungen $\varrho_\mu x = \varrho_\mu y$ $(\mu = 2, \ldots, n)$ und damit die Beziehung $x\,\gamma_1\,y$. Also ist $\gamma' \leqq \gamma_1$, $\gamma'' \leqq \gamma_1$. Umgekehrt folgt aus $x\,\gamma_1\,y$, wenn z durch $\varrho'\varrho_1 z = \varrho'\varrho_1 y$, $\varrho''\varrho_1 z = \varrho''\varrho_1 x$, $\varrho_\mu z = \varrho_\mu x = \varrho_\mu y$ $(\mu = 2, \ldots, n)$

bestimmt wird, die Beziehung $x\,\gamma'\,z\,\gamma''\,y$, d.h. es gilt $\gamma_1 \subseteqq \gamma'\,\gamma''$. Damit ist $\gamma_1 = \gamma' \cup \gamma''$ bewiesen, und wegen $\gamma' \cap \gamma'' = \iota$ gilt sogar $\gamma_1 = \gamma' \dot\cup \gamma''$. Aus der (12) entsprechenden Gleichung

$$(13) \qquad (\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma', \pi') \dot\cup (\gamma'', \pi'') \dot\cup (\gamma_2, \pi_2) \dot\cup \ldots \dot\cup (\gamma_n, \pi_n)$$

wird nun

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma_1, \pi' \dot\cup \pi'') \dot\cup (\gamma_2, \pi_2) \dot\cup \ldots \dot\cup (\gamma_n, \pi_n).$$

Vergleich mit (12) beweist in Anbetracht der eindeutigen Bestimmtheit der π die Gleichung $\pi_1 = \pi' \dot\cup \pi''$, so daß also

$$(14) \qquad (\gamma_1, \pi_1) = (\gamma', \pi') \dot\cup (\gamma'', \pi'')$$

gilt. Wegen $\varrho' \neq 0$ gibt es ein $x \in G$ mit $\varrho'\varrho_1 x \neq 0$. Wird y durch $\varrho'\varrho_1 y = 0$, $\varrho''\varrho_1 y = \varrho''\varrho_1 x$, $\varrho_\mu y = \varrho_\mu x$ $(\mu = 2, \ldots, n)$ bestimmt, so ist $x\,\gamma'\,y$, aber $x \neq y$, also $\gamma' \neq \iota$. In gleicher Weise folgt $\gamma'' \neq \iota$ aus $\varrho'' \neq 0$. Daher ist (γ_1, π_1) nicht direkt-unzerlegbar.

Wird umgekehrt (γ_1, π_1) als nicht direkt-unzerlegbar vorausgesetzt, also (14) mit $(\gamma', \pi') \neq (\iota, \iota)$, $(\gamma'', \pi'') \neq (\iota, \iota)$ angenommen, so ist $\gamma' \neq \iota$ und $\gamma'' \neq \iota$, weil aus $\gamma' = \iota$ in Anbetracht von (11) ja $\pi' = \iota$ und aus $\gamma'' = \iota$ ja $\pi'' = \iota$ folgen würde. Weiter folgt aus (12) und (14) die Gl. (13); denn wegen der über die Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ gemachten Vertauschbarkeitsvoraussetzung sind $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ sowie damit auch $\mathfrak{V}$ modular[19]), und in einem modularen Verband folgt $a_1 \dot\cup \ldots \dot\cup a_n = a_1 \cup \ldots \cup a_n$ bereits daraus, daß die $(a_1 \cup \ldots \cup a_k) \cap a_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ gleich dem kleinsten Element des Verbandes sind[20]). In der zu (13) gehörenden P-direkten Zerlegung von G seien ϱ_1', ϱ_1'' die den γ', γ'' entsprechenden Zerlegungsendomorphismen. $\varrho_1' G$ ist als Kern von γ' wegen $\gamma' \subseteqq \gamma_1$ im Kern $\varrho_1 G$ von γ_1 enthalten, und ebenso gilt natürlich auch $\varrho_1'' G \subseteqq \varrho_1 G$. Daher rufen ϱ_1', ϱ_1'' P-Endomorphismen ϱ', ϱ'' von $\varrho_1 G$ hervor, und man sieht leicht ein, daß (ϱ', ϱ'') eine P-direkte Zerlegung von $\varrho_1 G$ ist. Wegen $\gamma' \neq \iota$ gibt es nun $x, y \in G$ mit $x\,\gamma'\,y$ und $x \neq y$, also mit $\varrho_1' x \neq \varrho_1' y$, so daß $\varrho_1' G > \{0\}$ sein muß. Daraus folgt nun $\varrho' \neq 0$ wegen $\varrho'\varrho_1 G = \varrho_1'\varrho_1 G \geqq \varrho_1'^2 G = \varrho_1' G$. In derselben Weise ergibt sich $\varrho'' \neq 0$ aus $\gamma'' \neq \iota$, so daß (ϱ', ϱ'') nicht maximal ist.

4. Um nun den Remakschen Satz für die P-direkten Zerlegungen beweisen zu können, benötigt man den *Satz von Ore* in der folgenden Form[21]):

In einem modularen Verband endlicher Länge[22]) *besitzt das größte Element e eine Darstellung $e = a_1 \dot\cup \ldots \dot\cup a_m$ mit direkt-unzerlegbaren a_μ. Ist $e = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_n$ eine weitere Darstellung mit direkt-unzerlegbaren b_ν und sind die a_μ, b_ν sämtlich von dem kleinsten Element 0 des Verbandes verschieden, so ist $m = n$, und nach*

[19]) *B*, S. 86/87, Beweis von Th. 3.

[20]) *B*, S. 73, Th. 7 Cor.; man kann statt dieser Tatsache auch den in modularen Verbänden geltenden Hilfssatz heranziehen: Aus $a \cap b = 0 = (a \cup b) \cap c$ folgt $(a \cup c) \cap b = 0$.

Beweis: $((a \cup c) \cap b) \cup a = (a \cup c) \cap (b \cup a) = a \cup (c \cap (b \cup a)) = a$,

$$(a \cup c) \cap b = ((a \cup c) \cap b) \cup (a \cap b) = (((a \cup c) \cap b) \cup a) \cap b = a \cap b = 0.$$

[21]) Diese Form verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. F. Smiley.

[22]) Definition dieses Begriffes siehe z. B. *B*, S. 11.

passender Umnumerierung der b_ν gibt es Elemente c_ν mit

$$e = a_\nu \dot\cup c_\nu = b_\nu \dot\cup c_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, m).$$

Der erste Teil des Satzes wird wie üblich durch vollständige Induktion nach der Länge des Verbandes bewiesen, was hier nicht ausgeführt zu werden braucht. Der Beweis des zweiten Teiles wird durch vollständige Induktion nach m geführt, wobei die Behauptung — von $m = n$ abgesehen — noch durch $c_\nu = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_{\nu-1} \dot\cup a_{\nu+1} \dot\cup \ldots \dot\cup a_m$ zu

$$(15) \qquad e = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_\nu \dot\cup a_{\nu+1} \dot\cup \ldots \dot\cup a_m \qquad (\nu = 1, \ldots, m-1)$$

verschärft wird. Da die Richtigkeit für $m = 1$ offensichtlich ist, braucht nur noch der Induktionsschritt von $m-1$ nach m durchgeführt zu werden. Die folgende Herleitung dafür stützt sich auf den auch beim Beweis der üblichen Fassung des Oreschen Satzes verwendeten Hilfssatz[23]), welcher besagt, daß nach passender Umnumerierung der b_ν

$$(16) \qquad e = b_1 \dot\cup a_2 \dot\cup \ldots \dot\cup a_m$$

gilt. Es sei nun die Numerierung so gewählt, daß (16) erfüllt ist, also (15) für $\nu = 1$. Die $b_2, \ldots, b_n$ können dann natürlich unter sich noch beliebig umnumeriert werden. Wegen der Modularität und den sich aus $e = b_1 \dot\cup \ldots \dot\cup b_m$ sowie (16) für $a = a_2 \cup \ldots \cup a_m$, $b = b_2 \cup \ldots \cup b_m$ ergebenden Gleichungen $b_1 \cup b = e = b_1 \cup a$, $b_1 \cap b = 0 = b_1 \cap a$ wird nun bekanntlich[24]) der Unterverband der Elemente $\leqq a$ sowohl wie der Unterverband der Elemente $\leqq b$ durch $x \to x \cup b_1$ isomorph auf den Unterverband e/b_1 der Elemente $\geqq b_1$ abgebildet, dessen kleinstes Element also b_1 ist. Aus $a_2 \dot\cup \ldots \dot\cup a_m = a$ und $b_2 \dot\cup \ldots \dot\cup b_n = b$ entstehen durch diese Isomorphismen die Beziehungen

$$(a_2 \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (a_m \cup b_1) = e = (b_2 \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (b_n \cup b_1) \quad \text{in} \quad e/b_1,$$

worin natürlich die $a_\mu \cup b_1$ $(\mu = 2, \ldots, m)$ sowohl wie die $b_\nu \cup b_1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ sämtlich direkt-unzerlegbar sind. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $m-1 = n-1$ und bei passender Umnumerierung der $b_2, \ldots, b_n$ unter sich

$$(17) \quad e = (b_2 \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (b_\nu \cup b_1) \dot\cup (a_{\nu+1} \cup b_1) \dot\cup \ldots \dot\cup (a_m \cup b_1) \quad (\nu = 2, \ldots, m-1)$$

in e/b_1. Mit

$$d_k = \begin{cases} b_k & \text{für} \quad k = 1, \ldots, \nu \\ a_k & \text{für} \quad k = \nu+1, \ldots, m \end{cases}$$

gilt daher

$$(d_2 \cup \ldots \cup d_k \cup b_1) \cap (d_{k+1} \cup b_1) = b_1 \qquad (k = 2, \ldots, m-1).$$

Wegen der Modularität folgt daraus

$$\big((d_1 \cup \ldots \cup d_k) \cap d_{k+1}\big) \cup b_1 = b_1,$$

also

$$(d_1 \cup \ldots \cup d_k) \cap d_{k+1} \leqq b_1$$

[23]) Siehe etwa *B*, S. 94/95. Dieser Hilfssatz enthält den schwierigen Teil des Beweises.
[24]) Siehe etwa *B*, S. 73, Th. 6.

und damit wegen der aus (16) und $e = b_1 \cup \ldots \cup b_n$ folgenden Beziehung $d_{k+1} \cap b_1 = 0$ $(k = 1, \ldots, m-1)$:

$$(d_1 \cup \ldots \cup d_k) \cap d_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1).$$

Wegen der Modularität des Verbandes besagt dieses Ergebnis zusammen mit der aus (17) folgenden Gleichung $e = d_1 \cup \ldots \cup d_m$ gerade die Behauptung (15) für die noch fehlenden Fälle $\nu = 2, \ldots, m-1$ [20]).

5. Mit den so zusammengestellten Hilfsmitteln läßt sich nun der *Remaksche Satz für die P-direkten Zerlegungen* beweisen:

Ist G eine die Tarskische Voraussetzung nebst (2) *erfüllende algebraische Struktur mit der zulässigen Relation P, haben die von den Zerlegungsrelationen von G bzw. P erzeugten Verbände $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ endliche Länge und sind die Elemente von $\mathfrak{G}$ sowie die von $\mathfrak{P}$ untereinander vertauschbar, so besitzt G maximale P-direkte Zerlegungen, und aus einer solchen $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ erhält man mittels P-Automorphismen σ von G alle andern in der Gestalt $(\sigma \varrho_1 \sigma^{-1}, \ldots, \sigma \varrho_n \sigma^{-1})$.*

Aus der Längenendlichkeit von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ folgt natürlich auch die von $\mathfrak{V}$. Die Vertauschbarkeitsvoraussetzungen ziehen nun — wie schon in **3** bemerkt — die Modularität von $\mathfrak{V}$ nach sich. Auf $\mathfrak{V}$ kann also der Satz von Ore aus **4** angewandt werden. Mittels der in **3** gewonnenen Beschreibung der P-direkten Zerlegungen ergibt sich daraus sofort die Existenz maximaler P-direkter Zerlegungen, und für zwei solche $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ und $(\varrho'_1, \ldots, \varrho'_{n'})$ mit den Zerlegungsrelationen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bzw. $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'}$ folgt $n' = n$ sowie nach passender Umnumerierung

$$(18) \qquad (\varepsilon, \varepsilon) = (\gamma_\nu, \pi_\nu) \cup (\bar{\gamma}_\nu, \bar{\pi}_\nu) = (\gamma'_\nu, \pi'_\nu) \cup (\bar{\gamma}_\nu, \bar{\pi}_\nu)$$

mit gewissen $(\bar{\gamma}_\nu, \bar{\pi}_\nu) \in \mathfrak{V}$, wobei die π_ν, π'_ν die den γ_ν, γ'_ν gemäß (12) entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{P}$ sind. (18) liefert nun zwei P-direkte Zerlegungen von G, die eine mit den Zerlegungsrelationen $\gamma_\nu, \bar{\gamma}_\nu$, die andere mit $\gamma'_\nu, \bar{\gamma}_\nu$. Bei der ersten sei σ_ν der zu γ_ν gehörige Zerlegungsendomorphismus und bei der zweiten σ'_ν der zu γ'_ν gehörige. Entsprechend (5) bedeutet dann $\sigma_\nu x = \sigma_\nu y$ dasselbe wie $x \bar{\gamma}_\nu y$ und damit dasselbe wie $\sigma'_\nu x = \sigma'_\nu y$. Unter Berücksichtigung von $\sigma_\nu^2 = \sigma_\nu$ und $\sigma_\nu'^2 = \sigma'_\nu$ gewinnt man daraus

$$(19) \qquad \sigma_\nu \sigma'_\nu = \sigma_\nu, \qquad \sigma'_\nu \sigma_\nu = \sigma'_\nu.$$

Als Kern von γ_ν bzw. von γ'_ν ist ferner $\sigma_\nu G = \varrho_\nu G$, $\sigma'_\nu G = \varrho'_\nu G$ und daher

$$(20_{1-5}) \quad \sigma_\nu \varrho_\nu = \varrho_\nu, \quad \varrho_\nu \sigma_\nu = \sigma_\nu, \quad \sigma'_\nu \varrho'_\nu = \varrho'_\nu, \quad \varrho'_\nu \sigma'_\nu = \sigma'_\nu, \quad \varrho_\mu \sigma_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Nun wird wegen (20_4) durch

$$(21) \qquad \varrho'_\nu \sigma x = \sigma'_\nu \varrho_\nu x \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \text{ für alle } x \in G,$$

oder, was nach der auf die ϱ'_ν angewandten Gl. (4) dasselbe ist,

$$(22) \qquad \sigma x = F_n(\sigma'_1 \varrho_1 x, \ldots, \sigma'_n \varrho_n x) \quad \text{für alle } x \in G$$

eine Abbildung σ von G in sich definiert. σ ist ein Endomorphismus von G, denn nach (21) und der Endomorphismuseigenschaft der $\varrho_\nu \varrho'_\nu, \sigma'_\nu$ folgt für ein

$F \in \Phi$, wobei nur zur Vereinfachung der Schreibweise $n_F = 1$ angenommen ist:

$$\varrho'_\nu F(\sigma x) = F(\varrho'_\nu \sigma x) = F(\sigma'_\nu \varrho_\nu x) = \sigma'_\nu \varrho_\nu F(x),$$

also gemäß (21) $F(\sigma x) = \sigma F(x)$. Da für $f \in P$ aus (22), (7), (8) und der Tatsache, daß die σ'_ν, ϱ_ν P-Endomorphismen sind, $\sigma f = F_n(\sigma'_1 \varrho_1 f, \ldots, \sigma'_n \varrho_n f) \in P$ folgt, ist σ sogar ein P-Endomorphismus. Für irgendein $y \in G$ folgt aus $\sigma x = y$ nach (21), (19) und (20_1) $\sigma_\nu \varrho'_\nu y = \varrho_\nu x$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Wegen (20_2) lassen sich umgekehrt diese Gleichungen bei gegebenem y durch genau ein x erfüllen und nach (21), (19), (20_3) folgt aus ihnen wieder $\varrho'_\nu y = \sigma'_\nu \varrho_\nu x$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, also $\sigma x = y$. Somit ist σ eine umkehrbare Abbildung von G auf sich mit

$$\varrho_\nu \sigma^{-1} x = \sigma_\nu \varrho'_\nu x \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \text{ } \textit{für alle} \text{ } x \in G \tag{23}$$

oder, was nach (4) dasselbe ist,

$$\sigma^{-1} x = F_n(\sigma_1 \varrho'_1 x, \ldots, \sigma_n \varrho'_n x) \quad \textit{für alle} \quad x \in G. \tag{24}$$

Genau wie vorher aus (21) und (22) für σ folgt jetzt aus (23) und (24), daß σ^{-1} ein P-Endomorphismus und damit σ ein P-Automorphismus ist. Aus (21), (23) folgt $\varrho'_\mu \sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = \sigma'_\mu \varrho_\mu \sigma_\nu \varrho'_\nu x$ und daraus weiter mittels (20_5) $\varrho'_\mu \sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = 0$ für $\mu \neq \nu$ sowie mittels (20_2), (19) und (20_3) $\varrho'_\nu \sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = \sigma'_\nu \sigma_\nu \varrho'_\nu x = \varrho'_\nu x$. Das besagt aber $\sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} x = \varrho'_\nu x$ für alle $x \in G$, also $\sigma \varrho_\nu \sigma^{-1} = \varrho'_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, w. z. b. w.

Sind statt der einen Relation in G mehrere zulässige Relationen $P_1, \ldots, P_n$ mit den zueinander fremden Indexmengen $I_1, \ldots, I_n$ gegeben, so kann man diese offenbar wieder zu einer einzigen zulässigen Relation P mit der Indexmenge $\bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$ zusammenfassen. Bei Ausdehnung dieses Verfahrens auf unendlich viele Relationen $\neq \{0\}$ besitzt dann allerdings — wie man leicht sieht — $\mathfrak{P}$ keine endliche Länge mehr, so daß die hier bewiesene Gestalt des Remakschen Satzes nicht anwendbar ist. In dieser Beziehung erhält man also hier für Gruppen mit Paarungen ein schwächeres Ergebnis als das mittels des Fittingschen Beweisverfahrens erreichte[1]).

Die Vertauschungsvoraussetzungen über die Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ sind nach einer am Schluß von 1 gemachten Bemerkung jedenfalls dann erfüllt, wenn G und P Loops bezüglich der Verknüpfung $+$ sind. Im Falle $P = \{0\}$ wird der Begriff der P-direkten Zerlegung zu dem der gewöhnlichen direkten Zerlegung. Da der Verband der zulässigen Normalteiler einer Gruppe mit Operatoren bekanntlich isomorph ist zum Verband der Kongruenzrelationen dieser algebraischen Struktur, so liefert mit $P = \{0\}$ der hier bewiesene Satz insbesondere den Remakschen Satz für Gruppen mit Operatoren in der üblichen Form — abgesehen natürlich von der darin vorkommenden Aussage, daß man sich auf die *normalen* Automorphismen σ beschränken kann.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. August 1952.)

RAJAGOPAL, C. T.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 405—414 (1953)

A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants.

By

C. T. RAJAGOPAL.

1. Introduction. R. P. AGNEW and H. HADWIGER ([1] and References in [1]) have obtained interesting generalizations of TAUBER's theorem for series $\sum a_n$ which are Abel-summable and such that $a_n = o(n^{-1})$, replacing the condition $a_n = o(n^{-1})$ by $a_n = O(n^{-1})$. These generalizations have been extended to include other processes of summability in a comprehensive paper written by DELANGE [2] and an independent note written by myself [5]. Theorem A of the present note is of the same type as the theorems in DELANGE's paper and my note just referred to. But it includes, besides a generalization of the AGNEW-HADWIGER theorems, an analogous result for BOREL summability, in much the same way as a theorem of KARAMATA ([3], § 13, Théorème B, and § 18; or [4], Satz VI) includes the HARDY-LITTLEWOOD converse theorem on BOREL summability as well as a similar theorem, on certain other processes of summability, due substantially to WIENER ([8], Theorem XV; [3], § 14, exemple I). Theorem A may be of some interest in that it suggests a unified approach to various "Tauberian constants", among them a new constant, $\sqrt{2/\pi}$, for BOREL summability, which is the best possible in the specific sense of Theorem 1b.

2. The main theorem. Theorem A. *Suppose that $A(u)$ is a function of bounded variation in every finite interval of $u \geq 0$. Suppose that*

(a) *in the Ψ-transform of $A(u)$:*

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, u)\, A(u)\, du,$$

$\psi(x, u) \geq 0$ for all large x and every $u \geq 0$;

(b) *$\Lambda(u)$ is a strictly increasing, unbounded, differentiable function of u such that*

(i) $$\psi\{x, V(y\,u)\} \frac{\partial V(y\,u)}{\partial u} \to N(u) \quad \text{for} \quad \text{every } u > 0,$$

as $x \to \infty$, $V(u)$ being the function which is the inverse of $\Lambda(u)$ and $y = f(x)$ being a continuous, strictly increasing, unbounded function;

(ii) $$\begin{cases} N_{x,y}(u) \text{ defined by} \\ N_{x,y}(u) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq u < \Lambda(0)/y, \\ \psi\{x, V(y\,u)\} \dfrac{\partial V(y\,u)}{\partial u} & \text{for} \quad u \geq \Lambda(0)/y, \end{cases} \end{cases}$$

is such that $N_{x,y}(u) \leq F(u)$ *for all large* x *and every* $u \geq 0$, *where* $F(u)$, $F(u)\,|\log u|$ *are integrable in* $(0, \infty)$. *Suppose finally that*

(c) $\overline{\lim_{u\to\infty}}\ \overline{\text{bound}}_{u\leq u'\leq U} |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda$ *for* $\Lambda(u) = \lambda A(u)$, $\lambda > 1$.

Then

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} |\Psi(x) - A\{V(f(x))\} \int_0^\infty \psi(x,u)\,du| \leq K \int_0^\infty N(u)\,|\log u|\,du.$$

Proof. From the definition of $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) - A\{V(f(x))\} \int_0^\infty \psi(x,u)\,du$$

$$= \int_0^\infty \psi(x,u)\,A(u)\,du - A\{V(y)\} \int_0^\infty \psi(x,u)\,du \qquad [y = f(x)]$$

$$= \int_{A(0)/y}^\infty \psi\{x, V(yu)\}\,A\{V(yu)\}\,\frac{\partial V(yu)}{\partial u}\,du - \int_{A(0)/y}^\infty A\{V(y)\}\,\psi\{x, V(yu)\}\,\frac{\partial V(yu)}{\partial u}\,du$$

$$= \int_0^\infty [A\{V(yu)\} - A\{V(y)\}]\,N_{x,y}(u)\,du.$$

Hence, for all large x,

$$(2.1)\qquad \left|\Psi(x) - A\{V(f(x))\} \int_0^\infty \psi(x,u)\,du\right| \leq \int_0^\infty N_{x,y}(u)\,|A\{V(yu)\} - A\{V(y)\}|\,du.$$

Now, hypothesis (c) gives

$$(2.2)\qquad \overline{\lim_{y\to\infty}} |A\{V(yu)\} - A\{V(y)\}| \leq K\,|\log u|.$$

When $x \to \infty$ and therefore $y = f(x) \to \infty$, we obtain from (2.1), (2.2) and hypotheses b, on appealing to a special form of the LEBESGUE theorem for taking limits under integral signs ([2], Lemme 2), the conclusion sought:

$$(2.3)\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} |\Psi(x) - A\{V(f(x))\} \int_0^\infty \psi(x,u)\,du| \leq \int_0^\infty N(u)\,K\,|\log u|\,du.$$

3. Application to Borel summability. $\psi(x,u)$ defined by

$$\psi(x,u) = \frac{e^{-x}x^u}{\Gamma(u+1)}$$

obviously satisfies the initial condition in hypothesis (a) of Theorem A; and furthermore it has been shown ([4], p. 9) to satisfy hypotheses (b) of Theorem A with

$$A(u) = e^{\sqrt{u}}, \qquad y \equiv f(x) = e^{\sqrt{x}},$$

$N_{x,y}(u)$, $N(u)$, $F(u)$ being defined as follows:

$$N_{x,y}(u) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq u\,y < 1, \\ \dfrac{2\log y\,u\,e^{-\log^2 y}\,(\log y)^{2\log^2 y\,u}}{u\,\Gamma(1+\log^2 y\,u)} & \text{for } u\,y \geq 1, \end{cases}$$

$$N(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-2\log^2 u}}{u}, \qquad F(u) = \frac{e^{-\log^2 u}}{u}.$$

Hence the following theorem is a deduction from Theorem A.

Theorem 1a. *If $A(u)$ is a function of bounded variation in every finite interval of $u \geq 0$ and such that*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\ \overline{\operatorname{bound}_{u\leq u'\leq U}}\ |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda \qquad \text{for} \qquad e^{V} = \lambda e^{u}, \qquad \lambda > 1, \tag{3.1}$$

then $A(u)$ is related to its transform

$$B_1(x) = e^{-x} \int_0^\infty \frac{x^u}{\Gamma(u+1)} A(u)\, du \tag{3.2}$$

by the inequality

$$\left\{ \begin{aligned} &\overline{\lim_{x\to\infty}} \left| B_1(x) - A(x)\, e^{-x} \int_0^\infty \frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\, du \right| \\ &\qquad \leq K \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-2\log^2 u}}{u} |\log u|\, du = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \right. \tag{3.3}$$

Theorem 1a can be made to yield the following theorem on BOREL summability whose "best-possible" character is established by an example kindly supplied to me by Dr. T. VIJAYARAGHAVAN.

Theorem 1b. *If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is such that*

$$\overline{\lim} \sqrt{n}\, |a_n| = L < \infty, \tag{3.4}$$

then the BOREL *transform of $\sum a_n$, namely,*

$$B(x) = \int_0^\infty \varphi(x, u)\, d A(u), \tag{3.5}$$

where

$$\varphi(x, n) = e^{-x} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x e^{-u} u^{n-1} du,$$

$$A(u) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{for} \quad n \leq u < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.6}$$

satisfies the inequality

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} |B(x) - A(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L, \tag{3.7}$$

which is the best possible under the conditions assumed in the sense that $\sqrt{2/\pi}$ cannot be replaced by a smaller positive number.

Proof. The condition (3.4) implies that the step function $A(u)$ in (3.6) is such that, if

$$n \leq u < n+1, \qquad n' \leq u' < n'+1,$$

then, for every $\varepsilon > 0$ and all large $n < n'$,

$$\begin{aligned} &|A(u') - A(u)| \\ &\qquad \leq 2(L+\varepsilon)\left(\sqrt{n'} - \sqrt{n}\right) < 2(L+\varepsilon)\left(\sqrt{u'} - \sqrt{u}\right) + (L+\varepsilon)\left(\frac{1}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

so that

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\ \overline{\operatorname{bound}_{\sqrt{u} \leq \sqrt{u'} \leq \sqrt{u} + \log\lambda}}\ |A(u') - A(u)| \leq 2L \log \lambda.$$

Thus (3.4) implies (3.1) with $A(u)$ defined as in (3.6) and $K=2L$. Hence we deduce from (3.3), taking $A(u)$ as in (3.6), (3.4), and then $B_1(x)$ as in (3.2),

$$(3.8)\quad \overline{\lim_{x\to\infty}}\,|B_1(x)-A_1(x)|\leq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,L,\quad \text{where}\quad A_1(x)=A(x)\,e^{-x}\int_0^{\infty}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du.$$

Now it is plain that $B(x)$ in (3.5) may be connected with $A(x)$ in (3.6) by the inequality

$$(3.9)\quad |B(x)-A(x)|\leq|B_1(x)-A_1(x)|+|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|.$$

And so the conclusion of Theorem 1b, as stated in (3.7), will follow from (3.8) and (3.9) provided that

$$(3.10)\qquad \lim_{x\to\infty}|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|=0.$$

To prove (3.10) we first observe that, if $m\leq x<m+1$, then

$$A(x)=A(m)=A(m)\,e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!},\qquad A_1(x)=A(m)\,e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_\nu^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du,$$

$$B(x)=e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}A(\nu),\qquad B_1(x)=e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_\nu^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}A(\nu)\,du;$$

and consequently

$$(3.11)\quad \begin{cases} B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x) \\ \qquad =e^{-x}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\{A(m)-A(\nu)\}\left\{\int_\nu^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du-\frac{x^\nu}{\nu!}\right\}. \end{cases}$$

Now $x^u/\Gamma(u+1)$, considered as a function of u, increases steadily to its maximum at $u=u_0$, $x-1<u_0<x$, and then decreases steadily. Since

$$(3.12)\qquad m-1\leq x-1<u_0<x<m+1,$$

we have, from (3.11),

$$|B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)|\leq e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}|A(m)-A(\nu)|\cdot\left|\int_\nu^{\nu+1}\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\,du-\frac{x^\nu}{\nu!}\right|<$$

$$<e^{-x}\sum_{\nu=0}^{m-2}|A(m)-A(\nu)|\left(\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}-\frac{x^\nu}{\nu!}\right)+$$

$$+e^{-x}|A(m)-A(m-1)|\left(\frac{x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right)+$$

$$+e^{-x}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}|A(m)-A(\nu)|\left(\frac{x^\nu}{\nu!}-\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right)$$

Hence we get, using (3.4),

$$(3.13)\quad \left\{\begin{aligned} |B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)| &< \\ &< 2C\,e^{-x}\sum_{\nu=0}^{m-2}\left(\sqrt{m}-\sqrt{\nu}\right)\left(\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}-\frac{x^{\nu}}{\nu!}\right)+ \\ &+ 2C\,e^{-x}\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\left(\frac{x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right)+ \\ &+ 2C\,e^{-x}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\left(\sqrt{\nu}-\sqrt{m}\right)\left(\frac{x^{\nu}}{\nu!}-\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right) \end{aligned}\right.$$

where C is a constant. (3.13) gives, when we rearrange the terms in its right-hand member,

$$(3.14)\quad \left\{\begin{aligned} |B(x)-B_1(x)+A_1(x)-A(x)| &< -2C\,e^{-x}\sqrt{m}+ \\ &+ 2C\,e^{-x}\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)\left(\frac{x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}-\frac{x^{m}}{m!}\right)+ \\ &+ 2C\,e^{-x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu-1}\right)\frac{x^{\nu}}{\nu!}. \end{aligned}\right.$$

The first term on the right side of (3.14) tends to 0 as $x\to\infty$ since $m\leq x<m+1$; the last term also tends to 0 since it can be regarded as the BOREL transform of the null sequence $2C\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; while each of the two terms composing the middle term tends to 0 as $x\to\infty$ since, by (3.12) and Stirling's approximation,

$$e^{-x}\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)x^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}<\frac{1}{2\sqrt{m-1}}\,\frac{e^{-u_0}(u_0+1)^{u_0}}{\Gamma(u_0+1)}\sim\frac{e}{2\sqrt{m-1}\,\sqrt{2\pi u_0}}$$

and there are exactly similar relations with m in place of u_0. Thus the right side of (3.14) tends to 0 as $x\to\infty$, and (3.10) follows from (3.14). This completes the proof of (3.7) as we have already observed.

To show that the relation (3.7) is the best possible in the sense that it can become an equality, we consider the *example*:

$$(3.15)\quad a_n=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2^{m-1}} & \text{if}\quad 4^{m-1}<n\leq 4^{m-1}+m\,2^{m-1} \\ -\dfrac{1}{2^m} & \text{if}\quad 4^m-m\,2^m<n\leq 4^m \\ 0 & \text{otherwise,} \end{array}\right\}\ m=1,2,\ldots$$

in which (3.4) *holds with* $L=1$ *and, as* $k\to\infty$ *through integral values,*

$$(3.16)\qquad B(4^k)-A(4^k)=B(4^k)\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

To prove (3.16) we write

$$B(4^k)=\sum_{\nu=0}^{4^k-k\,2^k}e^{-4^k}\frac{(4^k)^{\nu}}{\nu!}A(\nu)+\sum_{\nu=4^k-k\,2^k+1}^{4^k+(k+1)\,2^k}\cdots+\sum_{\nu=4^k+(k+1)\,2^k+1}^{\infty}\cdots$$
$$=S_1+S_2+S_3\quad\text{say,}$$

and show that, as $k \to \infty$,

$$S_1 \to 0, \qquad S_2 \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad S_3 \to 0. \tag{3.17}$$

In S_1, $0 \leq A(\nu) \leq k$ as a result of (3.15). $(4^k)^\nu/\nu!$ monotonically increases with ν, the increase constinuing up to $\nu = 4^k$. Hence we get

$$\begin{aligned} 0 < S_1 &< e^{-4^k} \frac{(4^k)^{4^k - k2^k}}{(4^k - k\,2^k)!}\, k\,(4^k - k\,2^k + 1) \\ &\sim e^{-4^k} \frac{(4^k)^{4^k - k2^k}\, k\,(4^k - k\,2^k + 1)}{\sqrt{2\pi}\, e^{-(4^k - k2^k)}\, (4^k - k\,2^k)^{4^k - k2^k + \frac{1}{2}}} \qquad (k \to \infty) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k\, 4^{k/2}}{e^{k^2/2}} \to 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

using Stirling's approximation in the step preceding (3.18).

Again

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{r \geq k} \left[\sum_{\nu = 4^r + (r+1)2^{r+1}}^{4^{r+1} - (r+1)2^{r+1}} e^{-4^k} \frac{(4^k)^\nu}{\nu!} A(\nu) + \sum_{\nu = 4^{r+1} - (r+1)2^{r+1} + 1}^{4^{r+1} + (r+2)2^{r+1}} \cdots \right] \\ &= \sum_{r \geq k} [s_1(r) + s_2(r)] \quad \text{say.} \end{aligned}$$

We know that

$$\frac{x^m}{m!} < \frac{x^n}{n!} \exp\left\{ - \frac{(m-n)^2}{2m} \right\} \quad \text{for} \quad m > n \geq x \quad ([7], \text{p. } 317).$$

Hence, in $s_1(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{(4^k)^\nu}{\nu!} &< \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \frac{(\nu - 4^k)^2}{2\nu} \right\} \\ &< \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \frac{(4^r + \overline{r+1}\, 2^r + 1 - 4^k)^2}{2(4^{r+1} - \overline{r+1}\, 2^{r+1})} \right\} \\ &< \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \frac{(r+1)^2\, 4^r}{4 \cdot 4^{r+1}} \right\} \end{aligned}$$

for all sufficiently large k. Since, in $s_1(r)$, $A(\nu) = r + 1$ by (3.15) and the number of terms is $O(4^r)$, we have

$$0 < s_1(r) < e^{-4^k} \frac{(4^k)^{4^k}}{(4^k)!} \exp\left\{ - \left(\frac{r+1}{4} \right)^2 \right\} \cdot (r+1)\, O(4^r) \qquad (r \geq k \to \infty).$$

Now using Stirling's approximation for $(4^k)!$, we get

$$\sum_{r \geq k} s_1(r) = O(4^{-k/2}) \sum_{r \geq k} \exp\left\{ - \left(\frac{r+1}{4} \right)^2 \right\} \cdot (r+1)\, O(4^r) \to 0.$$

Similarly $\sum_{r \geq k} s_2(r) \to 0$ and so, from (3.19),

$$S_3 \to 0. \tag{3.20}$$

Finally

$$S_2 = \sum_{\nu=4^k-k2^k+1}^{4^k} e^{-4^k}\frac{(4^k)^\nu}{\nu!}A(\nu) + \sum_{\nu=4^k+1}^{4^k+(k+1)2^k} \cdots$$

$$= s_3 + s_4 \text{ say}$$

where

$$s_4 = e^{-4^k}\sum_{r=1}^{(k+1)2^k}\frac{(4^k)^{4^k+r}}{(4^k+r)!}\frac{r}{2^k}$$

$$= \frac{e^{-N}N^{N+\frac{1}{2}}}{N!}\sum_{r=1}^{(\log N/\log 4+1)\sqrt{N}}\frac{rN^{-1}}{(1+N^{-1})(1+2N^{-1})\dots(1+rN^{-1})},$$

$$N = 4^k.$$

Writing $N^{-1} = \delta^2$, letting $N \to \infty$ and using Stirling's approximation, we find that

$$s_4 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta}\frac{r\delta^2}{(1+\delta^2)(1+2\delta^2)\dots(1+r\delta^2)} \qquad \left[\Delta = \left(\frac{\log\delta^{-2}}{\log 4}+1\right)\delta^{-1},\quad \delta\to 0\right]$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta} r\delta\exp\{-(1+2+\cdots+r)\delta^2 + (1^2+2^2+\cdots+r^2)O(\delta^4)\}$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta} r\delta\exp\left\{-\frac{r^2\delta^2}{2}+O(\Delta\delta^2)+O(\Delta^3\delta^4)\right\}$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=1}^{\Delta} r\delta\exp(-r^2\delta^2/2)\{1+O(\Delta^3\delta^4)\}$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

For,

$$\delta\sum_{r=1}^{\Delta} r\delta\exp(-r^2\delta^2/2) = \delta\sum_{\delta\le r\delta<1+\delta}\cdots + \delta\sum_{1+\delta\le r\delta\le\Delta\delta}\cdots = I_1 + I_2 \text{ say,}$$

where

$$I_1 \to \int_0^1 x e^{-x^2/2}dx \quad \text{as} \quad \delta\to 0,$$

and, since $x e^{-x^2/2}$ is monotonic decreasing for $x \ge 1$,

$$I_2\left\{\begin{array}{l} < \int_1^{(\Delta-1)\delta} x e^{-x^2/2}dx \\ > \int_{1+2\delta}^{(\Delta+1)\delta} x e^{-x^2/2}dx \end{array}\right\} \to \int_1^\infty x e^{-x^2/2}dx \quad \text{as} \quad \delta\to 0.$$

Therefore (3.22) is proved, and in the same way it can be prooved that

(3.23) $$s_3 \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Using (3.22) and (3.23) in (3.21), we obtain

$$S_2 \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad k \to \infty, \tag{3.24}$$

and finally, from (3.18), (3.20), (3.24) we get (3.17) and thence (3.16).

The following result, implicit in Theorem 1b, extends to BOREL summability TAUBER's theorem on series $\sum a_n$ which are ABEL-summable and such that $n a_n = o(1)$.

Corollary 1b. *Suppose that $\sum a_n$ satisfies (3.4) and $B(x)$ is defined as in (3.5). Suppose that $\mathfrak{L}$ denotes the set of limit points of $A(x)$ as $x \to \infty$ and $\mathfrak{L}_B$ the set of limit points of $B(x)$ as $x \to \infty$. Then, to each $\xi' \in \mathfrak{L}$ corresponds a $\xi'' \in \mathfrak{L}_B$, and conversely, such that*

$$|\xi' - \xi''| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L.$$

The constant $\sqrt{2/\pi}$ in the above inequality will probably turn out to be the best (i.e. the least) possible for the passage from ξ' to ξ''.

In particular, when $L = 0$, the limit points of $A(x)$ and $B(x)$ are identical.

4. Applications to Riesz, Laplace-Abel, Lambert and Stieltjes summabilities. The next theorem is an immediate consequence of Theorem A.

Theorem 2a. *Suppose that $A(u)$ is a function of bounded variation in every finite interval of $u \geq 0$ and that hypothesis* (c) *of Theorem A is satisfied with $\Lambda(u) = u$, i.e.*

$$\overline{\lim_{u \to \infty}}\ \overline{\underset{u \leq u' \leq \lambda u}{\text{bound}}}\ |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda, \qquad \lambda > 1.$$

Suppose also that, in Theorem A,

$$\psi(x, u) = \frac{1}{x}\, \psi^*\left(\frac{u}{x}\right)$$

where $\psi^*(u)$ satisfies the conditions

$$\psi^*(u) \geq 0, \qquad \int_0^\infty \psi^*(u)\, |\log u|\, du \text{ exists}, \qquad \int_0^\infty \psi^*(u)\, du = 1 \tag{4.1}$$

with the result that hypotheses (b) *of Theorem A are satisfied with $\Lambda(u) = u$, $y = \alpha x$,*

$$N_{x,y}(u) = \alpha \psi^*(\alpha u), \qquad N(u) = F(u) = \alpha \psi^*(\alpha u).$$

Then $\Psi^*(x)$ defined by

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \psi^*\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du$$

satisfies the inequality

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\ |\Psi^*(x) - A(\alpha x)| \leq K \int_0^\infty \alpha \psi^*(\alpha u)\, |\log u|\, du. \tag{4.2}$$

Remark. If, in Theorem 2a, $A(0) = 0$ and we write

$$\varphi^*(u) = \int_u^\infty \psi^*(x)\, dx, \tag{4.3}$$

then

$$\Psi^*(x) \equiv \Phi^*(x) = \int_0^\infty \varphi^*\left(\frac{u}{x}\right) d A(u),$$

and consequently the conclusion (4.2) of Theorem 2a can be written in the form

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\left|\Phi^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)-A(y)\right|\leq K\,\tau(\alpha) \tag{4.2'}$$

where

$$\tau(\alpha)=\int_0^1\frac{1-\varphi^*(\alpha u)}{u}\,du+\int_1^\infty\frac{\varphi^*(\alpha u)}{u}\,du.$$

Theorem 2a with conclusion in the form (4.2') is a simplified version of a theorem of DELANGE ([2], Théorème 3) and it covers the summability processes of RIESZ, LAPLACE-ABEL, STIELTJES and LAMBERT in which

$$\begin{cases}\varphi^*(u)=(1-u)^k, & k>0, \quad \text{for} \quad u\leq 1, \quad \text{and} \quad \varphi^*(u)=0 \quad \text{for} \quad u>1,\\ \varphi^*(u)=e^{-u}, \quad \varphi^*(u)=(1+u)^{-\varrho}, & \varrho>0,\\ \varphi^*(u)=u/(e^u-1) \quad \text{for} \quad u\neq 0, & \varphi^*(0)=1,\end{cases} \tag{4.4}$$

respectively and $\psi^*(u)$ satisfies (4.1).

There are consequences of Theorem 2a analogous to Theorem 1b and Corollary 1b. These are known but stated below for the sake of completeness.

Theorem 2b. *Let*

$$\Phi_\lambda^*(x)=\sum_{n=1}^\infty a_n\,\varphi^*(\lambda_n/x), \qquad x>0, \qquad 0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots, \qquad \lambda_n\to\infty,$$

where $\varphi^*(u)$ is defined as in (4.3) *and $\psi^*(u)$ satisfies* (4.1). *Let*

$$a_n=O\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \qquad \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\sim 1, \qquad n\to\infty.$$

Then

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\Phi_\lambda^*\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\sum_{\lambda_n\leq x}a_n\right|\leq\tau(\alpha)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|a_n|\,\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}$$

where $\tau(\alpha)$ is the same as the constant in (4.2').

The conclusion stated above is the best possible on our suppositions since the equality sign in it cannot be omitted.

The reader may refer to DELANGE's paper ([2], §§ 3.5.1, 3.5.2) for the complete details of the proof of Theorem 2b.

Corollary 2b. *In Theorem* 2b, *suppose that $\varphi^*(u)$ is monotonic decreasing in the strict sense so that the inverse function $\varphi^{-1*}(u)$ exists for $0<u\leq 1$. Then*

$$\min\tau(\alpha)=\tau(\alpha_0), \qquad \alpha_0=\varphi^{-1*}(1/2),$$

and $\tau(\alpha_0)$ has the property stated below.

Let $\mathfrak{L}$ denote the set of limit points of $\sum_{\lambda_n\leq x}a_n$ as $x\to\infty$ and $\mathfrak{L}_{\Phi^*}$ the set of limit points of $\Phi_\lambda^*(x)$ as $x\to\infty$. Then, to each $\xi'\in\mathfrak{L}$ corresponds a $\xi''\in\mathfrak{L}_{\Phi^*}$, and conversely, such that

$$|\xi'-\xi''|\leq\tau(\alpha_0)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|a_n|\,\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}.$$

Corollary 2b was first proved by AGNEW in the case $\varphi^*(u)=e^{-u}$, $\lambda_n=n$ (Reference in [1]). The extension of AGNEW's result to the other $\varphi^*(u)$ in (4.4) was subsequently indicated by me ([5], Corollary 1.1).

To make the list of references complete, I may add that I have recently obtained [6] a complement of Theorem 2b in the case of the $\varphi^*(u)$ in (4.4), with $k \geq 1$ in the case of the RIESZ kernel, assuming a one-sided Tauberian hypothesis on a_n instead of the two-sided hypothesis $a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$.

5. Conclusion. This note has aimed at bringing together some absolute constants which emerge when the familiar processes of summability are applied to a function $A(u)$ satisfying a Tauberian condition in the standard O-form of either SCHMIDT or HARDY. In closing the note I wish to acknowledge my indebtedness to Dr. T. VIJAYARAGHAVAN who obtained Theorem 1b independently after I had mentioned to him the possibility of an absolute constant connected with BOREL summability, constructing the particular example reproduced by me in the proof of that theorem.

Added November 3, 1952. After writing the preceding paper, I was able to prove that $\tau(\alpha_0)$ *is the best (or least) possible constant in the inequality of Corollary* 2b *between* ξ' *and* ξ'', *for the passage from* ξ' *to* ξ''. My proof is built on the same idea as a similar proof of R. P. AGNEW in his recent paper *Integral transformations and Tauberian constants*, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 501–518 (1952), though it was completed before I saw AGNEW's paper. The chief difference between the two proofs is as follows. AGNEW's proof is concerned with the transform

$$\Phi^*(x) = \int_0^\infty \varphi^*\left(\frac{u}{x}\right) dA(u) \qquad \text{where} \qquad A(u) = \int_0^u a(x)\, dx$$

and $a(x)$ is a real and continuous function of $x \geq 0$. But my proof involves the transform $\Phi_\lambda^*(x)$ of Theorem 2b in which we have a sequence $\{a_n\}$ and a λ-step function, $A(u) = \sum_{\lambda_n \leq u} a_n$ instead of $a(x)$ and its integral over $(0, u)$. Consequently, AGNEW's proof runs more smoothly than mine.

References.

[1] AGNEW, R. P.: Abel transforms and partial sums of Tauberian series. Ann. of Math. **50**, 110—117 (1949). — [2] DELANGE, H.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergents (Premier mémoir). Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **67**, 99—160 (1950). — [3] KARAMATA, J.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Actual. sci. industr. No. **450**, VI (1937). — [4] KARAMATA, J.: Über allgemeine O-Umkehrsätze. Bull. int. Acad. Yougosl. Sci. **32**, 1—9 (1939). — [5] RAJAGOPAL, C. T.: On a generalization of Tauber's theorem. Comm. Math. Helv. **24**, 219—231 (1950). — [6] RAJAGOPAL, C. T.: Two one-sided Tauberian theorems. Archiv der Math. **3**, 108—113 (1952). — [7] VIJAYARAGHAVAN, T.: A theorem concerning the summability of series by Borel's method. Proc. London Math. Soc. (2) **27**, 316—326 (1926). — [8] WIENER, N.: Tauberian theorems. Ann. of Math. **33**, 1—100 (1932).

Ramanujan Institute of Mathematics Madras (India).

(Eingegangen am 20. Juli 1952.)

DAVIES, E. T.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 415—427 (1953)

On the Invariant Theory of Contact Transformations.

By
EVAN T. DAVIES.

The application of tensor methods to the study of contact transformations has been carried out by several authors[1]). EISENHART and KNEBELMAN were the first to put the study on a systematic basis by their introduction of a set of "contact frames" which enabled them to decompose a "configuration" A of $2n$ components in the phase space of $2n$ coordinates x^i and p_i into two "vectors" λ and μ of n components each. Their decomposition is not however satisfactory in respect of one of the components. This partial decomposition was completed independently by DOYLE on the one hand, and by MUTO and YANO on the other. The method used in each case was that of introducing a second set of contact frames. DOYLE introduces the notion of non-holonomic subspaces of the phase spaces with projection tensors in these subspaces. In introducing an affine connection in these subspaces however, he imposes a severe restriction which is equivalent to assuming that all the Eulerian Curvature tensors vanish, so that the subspaces are all "planes".

In this paper we follow DOYLE in his use of non-holonomic subspaces, making systematic use of the works of VRANCEANU [5][2]), SCHOUTEN [6], and DIENES [7] on non-holonomic spaces. We shall show that (i) the "connecting quantities" of SCHOUTEN lead naturally to the two sets of contact frames, (ii) the restrictions imposed by DOYLE in determining the connection coefficients are not necessary, (iii) a generalization of geometries involving a covariant vector as *element of support* [8] occurs naturally by considering the non-holonomic subspaces of a space whose tensors are functions of position only.

§ 1.

We start with an affinely related space V_N with a Euclidean connection. We take its dimension to be $N = 2n$. Our convention with regard to indices will be that DIENES [7], that Greek indices shall apply to functions (tensors, coefficient of connection etc) under ordinary changes of variables and the rules of the classical Ricci Calculus. Latin indices will apply to quantities which are to be called tensors etc, under a more general "change of base". The indices will run as follows

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, N; \qquad \lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, n; \qquad \varrho, \sigma, \tau = n+1, \ldots, N$$
$$a, b, c = 1, \ldots, N; \quad i, j, k, l, m, n = 1, \ldots, n; \quad p, q, r, s = n+1, \ldots, N.$$

[1]) See papers [1], [2], [3], [4] in the list at the end.
[2]) These numbers refer to the list of papers at the end.

The V_N will have a metric tensor $g_{\alpha\beta}(x^\alpha)$ and a torsion tensor $S^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma}(x^\alpha)$ so that the coefficients of affine connection $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\alpha)$ can be expressed in terms of these two tensors.

If a submanifold V_n of V_N is characterized by n equations $\Phi^\sigma(x', \ldots, x^N) = 0$ having a Jacobian of rank n, this can be used to obtain parametric equations of V_n in the form

$$x^\alpha = \psi^\alpha(u', \ldots, u^n) = \psi^\alpha(u^\lambda)$$

and the connecting quantities, or projection factors

$$B^\alpha_\lambda = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^\lambda}, \qquad C^\sigma_\alpha = \frac{\partial \Phi^\sigma}{\partial x^\alpha}$$

and their reciprocals can be used to define subordinate quantities in the V_n such as the metric coefficients $g_{\lambda\mu} = g_{\alpha\beta} B^\alpha_\lambda B^\beta_\mu$ and the coefficients of affine connection

$$l^\lambda_{\mu\nu} = B^\lambda_\alpha \left(\frac{\partial B^\alpha_\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} B^\beta_\mu B^\gamma_\nu \right).$$

In the study of non-holonomic subspaces the projection factors are no longer partial derivatives but general functions of x^α. The ordinary RICCI tensors are replaced by *geometrical* tensors such as $g_{ab} = g_{\alpha\beta} A^\alpha_a A^\beta_b$ which obey more general laws of transformation $g_{a'b'} = g_{ab} A^a_{a'} A^b_{b'}$ where $A^a_{a'}$ are not partial derivatives. Another difference is that instead of having a unique submanifold at which vectors will be divided into tangential and normal vectors we shall have a splitting up of vectors into these two classes at every point of the $2n$-dimensional space so that a v^α (in V_N) will have two components

(1.1) (a) $v^i = B^i_\alpha v^\alpha$ (in V^n_N); (b) $v^\rho = C^\rho_\alpha v^\alpha$ (in V^{N-n}_N).

Each component will be a *geometrical* tensor in the sense that for a change of base (as distinct from a change of coordinates) they will obey laws of transformation

(1.2) (a) $v^{i'} = v^i B^{i'}_i$ (b) $v^{\rho'} = v^\rho C^{\rho'}_\rho$

where the $B^{i'}_i$ and $C^{\rho'}_\rho$ are not partial derivatives.

Covariant derivation of such geometrical tensors will be defined by the four sets of connection parameters appearing in the following table

(1.3) $\nabla_k v^i = X_k v^i + l^i_{jk} v^j, \qquad \nabla_k v^\rho = X_k v^\rho + \lambda^\rho_{\tau k} v^\tau; \qquad X_k = B^\alpha_k \partial_\alpha$

(1.4) $\nabla_s v^i = X_s v^i + s^i_{js} v^j, \qquad \nabla_s v^\rho = X_s v^\rho + \sigma^\rho_{\tau s} v^\tau; \qquad X_s = C^\alpha_s \partial_\alpha$

the connection parameters are determined in terms of those of the general V_N by the formulae

(1.5) $l^i_{jk} = B^i_\alpha \nabla_k B^\alpha_{(j)}, \quad \lambda^\rho_{\tau k} = C^\rho_\alpha \nabla_k C^\alpha_{(\tau)}, \quad s^i_{js} = B^i_\alpha \nabla_s B^\alpha_{(j)}, \quad \sigma^\rho_{\tau s} = C^\rho_\alpha \nabla_s C^\alpha_{(\tau)}.$

The Eulerian Curvature tensors in such a geometry are given by

(1.6) $F^\rho_{jk} = C^\rho_\alpha \nabla_k B^\alpha_{(j)}, \quad G^i_{\tau k} = B^i_\alpha \nabla_k C^\alpha_{(\tau)}, \quad J^\rho_{js} = C^\rho_\alpha \nabla_s B^\alpha_{(j)}, \quad K^i_{\tau s} = B^i_\alpha \nabla_s C^\alpha_{(\tau)}.$

The laws of transformation of the quantities (1.5) are given by the general rules

$$(1.7)\qquad \nabla_k B_i^{i'} = 0, \qquad \nabla_k C_p^{p'} = 0, \qquad \nabla_s B_i^{i'} = 0, \qquad \nabla_s C_p^{p'} = 0,$$

so that

$$(1.8)\qquad X_k B_i^{i'} + l_{j'k'}^{i'} B_j^{j'k'} - l_{jk}^{i} B_i^{i'} = 0, \ldots, X_s C_p^{p'} + \sigma_{r's'}^{p'} C_{rs}^{r's'} - \sigma_{rs}^{p} C_p^{p'} = 0$$

and the quantities (1.6) are geometrical tensors, i.e.

$$(1.9)\qquad F_{j'k'}^{p'} = F_{jk}^{p} C_p^{p'} B_{j'k'}^{jk}, \ldots, K_{r's'}^{i'} = K_{rs}^{i} B_i^{i'} C_{r's'}^{rs}.$$

We shall need to use the following relations satisfied by the projection factors:

$$(1.10)\qquad \begin{cases} B_i^\alpha B_\alpha^j = \delta_i^j; & C_p^\alpha C_\alpha^r = \delta_p^r; & B_i^\alpha C_p^\alpha = 0; & B_\alpha^i C_p^\alpha = 0 \\ B_\alpha^a = B_i^a B_\alpha^i; & C_\beta^\alpha = C_p^\alpha C_\alpha^p; & B_\alpha^a + C_\alpha^a = A_\alpha^a & \\ B_\beta^\alpha = B_i^\alpha B_\beta^i; & C_\beta^\alpha = C_r^\alpha C_\beta^r; & B_\beta^\alpha + C_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha & \end{cases}$$

and the following alternation formulae

$$(1.11)\qquad \nabla_{[l}\nabla_{k]} v^i = -\{l_{[kl]}^m + B_\alpha^m X_{[l} B_{k]}^\alpha\} \nabla_m v^i + C_\alpha^p X_{[l} B_{k]}^q \nabla_p v^i + C_{mkl}^i v^m$$

$$(1.12)\qquad \nabla_{[t}\nabla_{s]} v^i = -\{\sigma_{[st]}^q + C_\alpha^q X_{[t} C_{s]}^\alpha\} \nabla_q v^i + B_\alpha^i X_{[t} C_{s]}^\alpha \nabla_j v^i + C_{mst}^i v^m$$

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \nabla_s\nabla_k v^i - \nabla_k\nabla_s v^i = -\{s_{ks}^m + B_\alpha^m X_k C_s^\alpha - B_\alpha^m X_s B_k^\alpha\} \nabla_m v^i + \\ \qquad + \{\lambda_{st}^q + C_\alpha^q X_s B_q^\alpha - C_\alpha^q X_k C_s^\alpha\} \nabla_q v^i + 2C_{mks}^i v^m \end{cases}$$

where

$$(1.14)\qquad C_{mkl}^i = X_{[l} l_{|m|k]}^i + l_{n[l}^i l_{|m|k]}^n - B_\alpha^n X_{[l} B_{k]}^\alpha l_{mn}^i - C_\alpha^q X_{[l} B_{k]}^\alpha s_{mq}^i$$

$$(1.15)\qquad C_{mst}^i = X_{[t} s_{|m|s]}^i + s_{n[t}^i s_{|m|s]}^n - B_\alpha^i X_{[t} C_{s]}^\alpha l_{mj}^i - C_\alpha^q X_{[t} C_{s]}^\alpha s_{mq}^i$$

$$(1.16)\qquad \begin{cases} 2C_{mks}^i = X_s l_{mk}^i - X_k s_{ms}^i + s_{ns}^i l_{mk}^n - l_{nk}^i s_{ms}^n - \\ \qquad - l_{mj}^i (B_\alpha^j X_s B_k^\alpha - B_\alpha^j X_k C_s^\alpha) + s_{mq}^i (C_\alpha^q X_k C_s^\alpha - C_\alpha^q X_s B_k^\alpha). \end{cases}$$

The metric coefficients in the facet V_N^n and in the span V_N^{N-n} are given respectively by

$$(1.17)\qquad \text{(a)}\quad g_{ij} = g_{\alpha\beta} B_{ij}^{\alpha\beta} \qquad \text{(b)}\quad g_{pq} = g_{\alpha\beta} C_{pq}^{\alpha\beta}.$$

We assume that the span vectors C_p^α are orthogonal to the facet, so that

$$(1.18)\qquad g_{\alpha\beta} B_i^\alpha C_p^\beta = 0.$$

The ds^2 for the general space V_N can then be written in the form

$$(1.19)\qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = g_{ij} (dx)^i (dx)^j + g_{pq} (dx)^p (dx)^q$$

where $(dx)^i = B_\alpha^i dx^\alpha$ and $(dx)^p = C_\alpha^p dx^\alpha$ are of course not exact differentials and hence have a bracket round the dx to indicate the fact.

Two near points in the same facet will be characterized by

$$(1.20)\qquad (dx)^p = 0.$$

The upper index g's defined by

(1.21) (a) $g^{ij} = g^{\alpha\beta} B^{ij}_{\alpha\beta}$ (b) $g^{pq} = g^{\alpha\beta} C^{pq}_{\alpha\beta}$

are also the reciprocals of the corresponding lower index g's (assuming that the relevant determinants do not vanish), so that if

$$\xi^i = B^i_\alpha X^\alpha, \quad \xi_i = B^\alpha_i X_\alpha, \quad \xi^p = C^p_\alpha X^\alpha, \quad \xi_p = C^\alpha_p X_\alpha$$

then

$$\xi_i = g_{ij}\xi^j; \qquad \xi_p = g_{pq}\xi^q.$$

Finally, with the definitions given of the various projected connections, we can easily prove that

$$\nabla_k g_{ij} = B^\gamma_k B^{\alpha\beta}_{ij} (\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}) \qquad \nabla_s g_{ij} = C^\gamma_s B^{\alpha\beta}_{ij} (\nabla_\gamma g_{\alpha\beta})$$

$$\nabla_k g_{rs} = B^\gamma_k C^{\alpha\beta}_{rs} (\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}) \qquad \nabla_p g_{rs} = C^\gamma_p C^{\beta\gamma}_{rs} (\nabla_\gamma g_{\alpha\beta})$$

and hence they all vanish since V_N is assumed to have a Euclidean connection.

§ 2.

Let us now consider what particular form the quantities $B^{i'}_i$, $C^{p'}_p$ representing a general change of base must have in order that the expressions

(a) $X_i f = B^\alpha_i \partial_\alpha f$ (b) $X_p f = C^\alpha_p \partial_\alpha f$

may transform according to the rules

(a) $X_i f = B^{i'}_i X_{i'} f$ (b) $X_p f = C^{p'}_p X_{p'} f$.

These written out in full mean respectively

(a) $B^\alpha_i \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = B^{i'}_i B^{\alpha'}_{i'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ (b) $C^\alpha_p \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = C^{p'}_p C^{\alpha'}_{p'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$

so that

(2.1) (a) $B^\alpha_i = B^{i'}_i B^{\alpha'}_{i'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = B^{i'}_i X_{i'} x^\alpha$, (b) $C^\alpha_p = C^{p'}_p C^{\alpha'}_{p'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = C^{p'}_p X_{p'} x^\alpha$.

Again, if we write

(a) $(dx)^i = B^i_\alpha dx^\alpha$ (b) $(dx)^p = C^p_\alpha dx^\alpha$

the bracket round the dx indicating that $(dx)^i$ is *not* an exact differential, and consider the transformations

(a) $(dx)^{i'} = B^{i'}_i (dx)^i$ (b) $(dx)^{p'} = C^{p'}_p (dx)^p$

we shall get

(2.2) (a) $B^{i'}_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = B^{i'}_i B^i_\alpha$ (b) $C^{p'}_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = C^{p'}_p C^p_\alpha$.

The basic systems of partial differential equations appearing in DOYLE's work ([3], equations 1.1 and 1.2) are

$$(2.3) \qquad (a)\quad X_i f = 0 \qquad (b)\quad X_p f = 0$$

for the case in which the projection factors B_i^α and C_p^α take the special forms in which $B_i^\lambda = \delta_i^\lambda$, $C_p^\varrho = \delta_p^\varrho$ so that (2.3) becomes

$$(2.4) \quad (a)\quad X_i f = \delta_i^\lambda \partial_\lambda f + B_i^\varrho \partial_\varrho f = 0, \qquad (b)\quad X_p f = \delta_p^\varrho \partial_\varrho f + C_p^\lambda \partial_\lambda f = 0.$$

At this stage the distinction between Latin and Greek indices will not be required, and the existence of the two sets of indices running over the same ranges becomes inconvenient, so that henceforth only Latin indices will be used.

With the projection factors modifying as follows

$$B_i^\alpha \to (\delta_i^j, B_i^p) \qquad C_p^\alpha \to (\delta_p^q, C_p^j)$$

the relations (1.9) become

$$(2.5) \quad (a)\ B_i^p B_p^j = 0 \quad (b)\ C_p^j C_j^r = 0 \quad (c)\ C_i^p + B_i^p = 0\,. \quad (d)\ C_p^i + B_p^i = 0.$$

If we use (2.5) (c) and (d) we can in future always replace C_i^p by $-B_i^p$ and B_p^i by $-C_p^i$, and (2.5) (a) and (b) become

$$(2.6) \qquad (a)\quad B_i^p C_p^j = 0 \qquad (b)\quad C_p^j B_j^r = 0.$$

We now examine the special forms which the relations (2.1) take for these special values of the projection factors. Putting $\alpha = j$ in (2.1) (a) and $\alpha = q$ in (2.1) (b) we get

$$(2.7) \qquad (a)\quad \delta_i^j = B_i^{i'} X_{i'} x^j \qquad (b)\quad \delta_p^q = C_p^{p'} X_{p'} x^q$$

from which we immediately deduce

$$(2.8) \qquad (a)\quad B_i^{i'} = X_i x^{i'} \qquad (b)\quad C_p^{p'} = X_p x^{p'}$$

which are the special forms of any transformations of the form (1.2) which we consider for the remainder of the paper. With these particular values for $B_i^{i'}$ and $C_p^{p'}$ the equations giving the transformation of the connection parameters in (1.8) coincide with those given by DOYLE ([3], eqns. 5.3).

Again putting $\alpha = q$ in (2.1) (a) and $\alpha = j$ in (2.1) (b) we get, on using (2.8)

$$(2.9) \qquad (a)\quad B_i^q = X_i x^{i'} \cdot X_{i'} x^q \qquad (b)\quad C_p^j = X_p x^{p'} \cdot X_{p'} x^j$$

which we shall retain in the form

$$(2.10) \qquad (a)\quad B_i^p X_{j'} x^i = X_{j'} x^p \qquad (b)\quad C_q^j X_{p'} x^q = X_{p'} x^j.$$

We shall also need some relations deducible from (2.2). On putting $\alpha = j$ in (2.2) (a) and $\alpha = p$ in (2.2) (b) we get

$$(2.11) \quad (a)\ X_i x^{i'} \cdot \delta_j^i = \delta_{j'}^{i'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} + B_{p'}^{i'} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \quad (b)\ X_q x^{p'} \delta_p^q = \delta_{q'}^{p'} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^p} + C_{j'}^{p'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^p}$$

which, on using (2.5) (c) and (d) and expanding give

$$(2.12)\qquad (a)\quad B^{\dot p}_{j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\dot p}}=-C^{i'}_{\dot p'}\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^{j}}\qquad (b)\quad C^{j}_{\dot p}\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^{j}}=-B^{\dot p'}_{j'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\dot p}}.$$

With the above conventions about the projection factors the components of the projection in the V_N^n and in the V_N^{N-n} of any contravariant vector Λ^α of V_N become

$$(2.13)\qquad (a)\quad \lambda^{i}=\Lambda^{i}-C^{i}_{\dot p}\Lambda^{\dot p}\qquad (b)\quad \lambda^{\dot p}=\Lambda^{\dot p}-B^{\dot p}_{j}\Lambda^{j}$$

and the components of the projections of any covariant vector Π_α become

$$(2.14)\qquad (a)\quad \pi_{i}=\Pi_{i}+B^{\dot p}_{j}\Pi_{\dot p}\qquad (b)\quad \pi_{\dot p}=\Pi_{\dot p}+C^{j}_{\dot p}\Pi_{j}.$$

It will follow immediately that

$$(2.15)\qquad \lambda^{i}\pi_{i}+\lambda^{\dot p}\pi_{\dot p}=\Lambda^{\alpha}\Pi_{\alpha}=\Lambda^{i}\Pi_{i}+\Lambda^{\dot p}\Pi_{\dot p}$$

and in particular the differential df of a function of x^α can be written

$$(2.16)\qquad df=\partial_{i}f\,dx^{i}+\partial_{\dot p}f\,dx^{\dot p}=X_{i}f\,(dx)^{i}+X_{\dot p}f\cdot(dx)^{\dot p}.$$

§ 3. Contact Transformations.

If the $2n$ coordinates are those appropriate to the study of contact transformations (x^i, p_i) we follow EISENHART and DOYLE in the convention that the $(n+i)$ th components of a general contravariant (covariant) vector in V_{2n} shall be given a lower (upper) index i, and we similarly make the convention indicated by writing B^{n+i}_{j} and C^{j}_{n+i} as B_{ji} and C^{ji} respectively so that the equations (2.10) and (2.11) become

$$(3.1)\qquad (a)\quad \lambda^{i}=\Lambda^{i}-C^{ij}\Lambda_{j}\qquad (b)\quad \lambda_{i}=\Lambda_{i}-B_{ji}\Lambda^{j}$$

$$(3.2)\qquad (a)\quad \pi_{i}=\Pi_{i}+B_{ij}\Pi^{j}\qquad (b)\quad \pi^{i}=\Pi^{i}+C^{ji}\Pi_{j}.$$

In order to use the symmetry of the B_{ij} and C_{ij} we make the hypothesis that the fundamental invariant of the contact group $dx^i\,\delta p_i-dp_i\,\delta x^i$ ([1], p. 751) shall satisfy

$$(3.3)\qquad dx^{i}\,\delta p_{i}-dp_{i}\,\delta x^{i}=(dx)^{i}\,(\delta p)_{i}-(dp)_{i}\,(\delta x)^{i}$$

which demands the symmetry required. Under these conditions the relations (2.6) reduce to the single one

$$(3.4)\qquad B_{ik}C^{jk}=0.$$

The functions occurring in the transformation laws for span components $\lambda^{\dot p'}=\lambda^{\dot p}X_{\dot p}x^{\dot p'}$ must also be modified, for $\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^{\dot p}}+C^{j}_{\dot p}\frac{\partial x^{\dot p'}}{\partial x^{j}}$ becomes

$$(3.5)\qquad \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{i}}+C^{ij}\frac{\partial p_{i'}}{\partial x^{j}}=X^{i}p_{i'}.$$

If we now take account of the fundamental equations defining a contact transformation, namely

$$(3.6)\quad \partial^{i'} p_i = \partial_i x^{i'}, \qquad \partial^{i'} x^i + \partial^i x^{i'} = 0, \qquad \partial_{i'} p_i + \partial_i p_{i'} = 0; \qquad \partial^i = \frac{\partial}{\partial p_i}$$

and of the forms which (2.14) and (2.15) now take, namely

$$(3.7)\quad \text{(a)}\quad B_{i\,j}\,\partial^j x^{i'} = -\,C^{i'j'}\,\partial_i p_{j'} \qquad \text{(b)}\quad C^{j\,i}\,\partial_j p_{i'} = -\,B_{i'j'}\,\partial^i x^{j'}$$

we get

$$(3.8)\qquad X^i p_{i'} = X_{i'} x^i.$$

The projections of a vector v^α of V_N upon the facet V_N^n and on the span V_N^{N-n}, namely v^i and v^p of (1.1) each constitute a *geometrical* tensor as indicated in (1.2). The corresponding terminology for the particular values of $B_i^{i'}$ and $C_p^{p'}$ now taken will be that the projections $(\lambda^i, \lambda^{n+i} = \lambda_i)$ of a contravariant vector Λ^α of V_N will each constitute a *contact* tensor, with laws of transformation

$$(3.9)\qquad \text{(a)}\quad \lambda^{i'} = \lambda^i X_i x^{i'} \qquad \text{(b)}\quad \lambda_{i'} = \lambda_i X^i p_{i'}.$$

Similarly for the projections $(\pi_i, \pi_{n+i} = \pi^i)$ of a covariant vector Π_α of V_N

$$(3.10)\qquad \text{(a)}\quad \pi_{i'} = \pi_i X_{i'} x^i \qquad \text{(b)}\quad \pi^{i'} = \pi^i X^{i'} p_i.$$

But (3.8) shows the identity of the laws of transformation of a quantity with a lower (upper) index whether it is associated with Λ^α or with Π_α. A lower (upper) index will therefore indicate a covariant (contravariant) *contact* tensor.

In view of the identification $C_p^{p'} \to C_{n+i}^{n+i'} \to B_i^{i'}$ in the case of contact transformations, the four sets of connection parameters whose laws of transformation are given in (1.7) merge into two sets according to the rules $\lambda_{n+i,\,n+k}^{n+j} \to -\,l_{j\,k}^i$ $\sigma_{n+j,\,n+k}^{n+i} \to -\,s_i^{jk}$ so that for the remainder of the paper we shall have just two sets of connection parameters which we shall denote by $\Gamma_{j\,k}^i(x, p)$ and $C_i^{jk}(x, p)$. We shall assume that the $\Gamma_{j\,k}^i$ and C_i^{jk} are homogeneous of degree 0 and -1 respectively in the p. The two sets of contact frames will have laws of transformation obtained by modifying (2.10) into

$$(3.11)\quad \text{(a)}\quad B_{i\,j} X_{j'} x^i = X_{j'} p_j \qquad \text{(b)}\quad C^{ij} X^{j'} p_j = X^{i'} x^i.$$

We must now give the form taken on by the various "non-holonomity" objects occurring in the formulae (1.10) — (1.15), they are

$$B_\alpha^m X_{[l} B_{k]}^\alpha \to -\,C^{mn} X_{[l} B_{k]n}; \qquad C_\alpha^p X_{[l} B_{k]}^\alpha \to X_{[l} B_{k]i}$$

$$C_\alpha^q X_{[l} C_{s]}^\alpha \to -\,B_{mj} X^{[l} C^{k]m}; \qquad B_\alpha^j X_{[l} C_{s]}^\alpha \to X^{[l} C^{k]i}$$

$$B_\alpha^m X_k C_s^\alpha \to X_k C^{mj}; \qquad B_\alpha^m X_s B_k^\alpha \to -\,C^{mj} X^l B_{kj}$$

$$C_\alpha^q X_k C_s^\alpha \to -\,B_{im} X_k C^{ml}; \qquad C_\alpha^q X_s B_k^\alpha \to X^j B_{kl}.$$

The three alternation formulae already given in § 1 will now become

$$(3.12)\qquad \nabla_{[l}\nabla_{k]}v^i = -\{\Gamma^m_{[lk]} - C^{mn}X_{[l}B_{k]n}\}\nabla_m v^i + X_{[l}B_{k]m}\nabla^m v^i + v^m R^i_{mkl}$$

$$(3.13)\qquad \nabla^{[l}\nabla^{k]}v^i = -\{C^{[kl]}_m - B_{jm}X^{[l}C^{k]j}\}\nabla^m v^i + X^{[l}C^{k]m}\nabla_m v^i + v^m S^{ikl}_m$$

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \nabla^l\nabla_k v^i - \nabla_k\nabla^l v^i = -\{C^{ml}_k + X_k C^{ml} + C^{mj}X^l B_{kj}\}\nabla_m v^i + \\ \qquad + \{-\Gamma^l_{mk} + X^l B_{mk} + B_{mj}X_k C^{jl}\}\nabla^m v^i + 2v^m P^{il}_{mk} \end{cases}$$

with

$$(3.15)\qquad R^i_{mkl} = X_{[l}\Gamma^i_{|m|k]} + \Gamma^i_{n[l}\Gamma^n_{|m|k]} + X_{[l}B_{k]j}(\Gamma^i_{mn}C^{nj} - C^{ij}_m)$$

$$(3.16)\qquad S^{ikl}_m = X^{[l}C^{|i|k]}_m + C^{i[l}_n C^{n|k]}_m - X^{[l}C^{k]j}(\Gamma^i_{mj} - B_{jn}C^{in}_m)$$

and

$$(3.17)\qquad \begin{cases} 2P^{il}_{mk} = X^l\Gamma^i_{mk} - X_k C^{il}_m + C^{il}_n\Gamma^n_{mk} - \Gamma^i_{nk}C^{nl}_m + \\ \qquad + X^l B_{nk}(\Gamma^i_{mj}C^{nj} - C^{in}_m) + X_k C^{jl}(\Gamma^i_{mj} - B_{jn}C^{in}_m). \end{cases}$$

In dealing with the metric coefficients in the phase space of the (x, p) we notice that the convention of writing $g_{n+i,\,n+j}$ as g^{ij} would lead to confusion with the reciprocal of g_{ij} defined by $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$. To avoid this we write $g_{n+i,\,n+j}$ as $\bar{g}^{ij}$. The "distance" between two elements (x, p) and $(x+dx, p+dp)$ would then be

$$(3.18)\qquad ds^2 = g_{ij}(x,p)(dx)^i(dx)^j + \bar{g}^{ij}(x,p)(dp)_i(dp)_j.$$

Corresponding to the restriction of having two near points in the same "facet" as expressed by (1.20) we now have

$$(3.19)\qquad (dp)_i = dp_i - B_{ij}dx^j = 0.$$

The interpretation of this is given by EISENHART and KNEBELMAN, which is that two points will be regarded as lying on the same curve provided $x^i = x^i(t)$, $p_i = p_i(t)$ satisfy the condition

$$(3.20)\qquad \frac{(dp)_i}{dt} = 0$$

which is invariant for contact transformations.

We now have the necessary elements of a geometry in which the quantities (tensors etc) involve the position together with a covariant vector as element of support. We have not needed to make the assumption made by DOYLE that all the corresponding tensors to the Eulerian curvature tensors given in (1.6) vanish. The geometry thus introduced constitutes a generalization of the geometry based on a covariant vector [8] in that the transformations which it admits are not point transformations but contact transformations. The fundamental data are the metric and torsion tensors of the original V_N, together with the projection factors which enable us to define the quantities of the non-holonomic submanifold. The formulae corresponding to (1.22) prove that all the connections so obtained are Euclidean. Written in the present

notation, this would mean

$$(3.21)\qquad \nabla_k g_{ij} = X_k g_{ij} - \Gamma^m_{ik} g_{mj} - \Gamma^m_{jk} g_{im} = X_k g_{ij} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} = 0$$

$$(3.22)\qquad \nabla^k g_{ij} = X^k g_{ij} - C^{mk}_i g_{mj} - C^{mk}_j g_{im} = X^k g_{ij} - C^k_{ij} - C^k_{ji} = 0.$$

If we make the hypothesis that normal coordinates exist for which we have the conditions ([3], theorem 10.1)

$$(3.23)\qquad p_i C^{ij} = 0, \qquad X^k C^{ij} - X^j C^{ik} = 0$$

and consequently p_i is a covariant vector both in the RICCI sense and with respect to contact transformations.

So far we have shown how the coefficients of affine connections can be determined in terms of those of the originally given V_N and the projection factors (ultimately the contact frames). We can now relate the connection coefficients and the contact frames still further by making the hypothesis

$$(3.24)\qquad \text{(a)}\quad \nabla_j p_i = 0 \qquad \text{(b)}\quad \nabla^j p_i = \delta^j_i$$

which give

$$(3.25)\qquad \text{(a)}\quad B_{ij} - \Gamma^m_{ij} p_m = 0 \qquad \text{(b)}\quad C^{mj}_i p_m = 0$$

and consequently also

$$(3.26)\qquad Dp_i = (\nabla_k p_i)(dx)^k + (\nabla^k p_i)(dp)_k = (dp)_k = dp_k - \Gamma^m_{ki} p_m dx^i.$$

Let us restrict ourselves still further by assuming that we are dealing with normal coordinates for which

$$(3.27)\qquad C^{km} = 0$$

and that we consider only transformations which transform normal coordinates to normal coordinates, i.e. extended point transformations. This will make $(dx)^k$ become dx^k, and the absolute differential of any contravariant vector V^i becomes

$$(3.28)\qquad DV^i = dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j dx^k + C^{ik}_j (dp_k - p_r \Gamma^r_{km} dx^m).$$

In order to make comparison with existing theories we introduce

$$(3.29)\qquad L^2 = g^{ij} p_i p_j, \qquad l_i = \frac{p_i}{L}, \qquad L C^{ik}_j = A^{ik}_j$$

and the restriction

$$(3.30)\qquad C^k_{ij} = C^k_{ji}$$

so that using (3.27) and (3.22) we have

$$(3.31)\qquad C^k_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_k}.$$

From the homogeneity of degree zero of the g_{ij} we get

$$(3.32)\qquad C^k_{ij} p_k = A^k_{ij} l_k = A^0_{ij} = 0$$

and hence using (3.25 b)

$$A^k_{0j} = A^k_{i0} = A^0_{ij} = 0. \tag{3.33}$$

Writing

$$\omega_i = Dl_i = dl_i - l_n \Gamma^n_{im}\, dx^m = dl_i - \Gamma_{i0m}\, dx^m \tag{3.34}$$

the (3.28) may be written

$$D V^i = d V^i + \Gamma^i_{jk} V^j dx^k + A^{ik}_j \omega_k. \tag{3.31}$$

In the RICCI tensor theory of these spaces [8] the Γ^i_{jk} occurring in the (3.35) form of the absolute differential of a vector are assumed to be symmetrical in order that they may be determined in terms of the function L and its derivatives. Making the corresponding assumption in this case leads immediately to a very simple determination of the Γ functions in terms of the g and their derivatives. From (3.21) it follows immediately that if $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ or $\Gamma_{jik} = \Gamma_{kij}$ then Γ_{ijk} are the threeindex symbols of CHRISTOFFEL

$$\Gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}\{X_k g_{ij} + X_i g_{jk} - X_j g_{ik}\} \tag{3.36}$$

formed with the X_k instead of the ordinary derivative, the corresponding expression in the classical case being

$$\gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}\{\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}\}. \tag{3.37}$$

On using

$$X_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + B_{kr} \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_r} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{k0r} A^r_{ij}$$

we get

$$\Gamma_{ijk} = \gamma_{ijk} + A^r_{ij} \Gamma_{k0r} + A^r_{jk} \Gamma_{i0r} - A^r_{ik} \Gamma_{j0r} \tag{3.38}$$

and using (3.33), we have

$$\Gamma_{i0k} = \gamma_{i0k} - A^r_{ik} \Gamma_{00r}, \qquad \Gamma_{00k} = \gamma_{00k} \tag{3.39}$$

so that (3.39) becomes

$$\Gamma_{i0k} = \gamma_{i0k} - A^r_{ik} \gamma_{00r} \tag{3.40}$$

and (3.38) becomes consequently

$$\begin{cases} \Gamma_{ijk} = \gamma_{ijk} + A^r_{ij}(\gamma_{k0r} - A^s_{kr}\gamma_{00s}) + \\ \qquad + A^r_{jk}(\gamma_{i0r} - A^s_{ir}\gamma_{00s}) - A^r_{ik}(\gamma_{j0r} - A^s_{jr}\gamma_{00s}) \end{cases} \tag{3.41}$$

giving the Γ_{ijk} entirely in terms of g's and their ordinary derivatives. All this will be generalized in the next paragraph.

With the assumptions now made the alternation formulae (3.12)–(3.14) become those appropriate to the geometry based on a covariant vector as element of support. We verify this easily in the case of (3.12). We note first of all that Γ^i_{jk} in this paragraph is written $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$ in the older theory. With the

meaning just given to B_{ij} we have

$$X_{[l}B_{k]j} = \overset{*}{R}{}^{n}_{kjl}p_n, \qquad \text{and hence} \qquad X_{[l}B_{k]j}C^{ij}_{m} = A^{ij}_{m}\overset{*}{R}_{k0jl}$$

so that the (3.15) can be rewritten

$$R^{i}_{mkl} = \overset{*}{R}{}^{i}_{mkl} - A^{ij}_{m}\overset{*}{R}_{k0jl}.$$

The (3.12) may consequently be simplified to

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]}v^i = \{\delta^i_n v^m + p_n \nabla^m v^i\} R^{n}_{mkl}$$

or to

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]}v^i = \{\delta^i_n v^m + l_n v^i\|^m\} \overset{*}{R}{}^{n}_{mkl}$$

which coincides with the corresponding formula given previously ([8], eq. 6.2). Similarly we may make comparisons with the other alternation formulae.

§ 4.

We can also construct a geometry which shall be a generalization of the geometries based on a covariant vector by considering a fundamental function $L(x, p)$ which is positively homogeneous of degree one in the p. We again introduce the hypothesis expressed in (3.23) about the existence of normal coordinates in which the C^{ij} vanish, but we consider homogeneous contact transformations rather than extended point transformations. The contact tensor defined by

$$g^{ij} = X^j X^i (\tfrac{1}{2}L^2) \tag{4.1}$$

is symmetrical in its two indices, and may therefore be used to define metric in the space. We assume that B_{ij}, C^{ij} are homogeneous of degree 1 and -1 respectively in the p, and hence the g^{ij} will be homogeneous of degree zero in the p.

The right-hand side of (4.1) may be rewritten as

$$g^{ij} = L X^j X^i L + (X^i L)(X^j L) \tag{4.2}$$

and using the homogeneity of the L of degree 1 in the p, we get

$$g^{ij}p_j = L X^i L, \qquad g^{ij}p_i p_j = L^2 \tag{4.3}$$

so that we can define a unit vector

$$\text{(a)} \quad l_i = \frac{p_i}{L} \qquad \text{(b)} \quad l^i = g^{ij}l_j = X^i L \tag{4.4}$$

associated with the element of support. We shall assume that the relevant determinant does not vanish so that a reciprocal system g_{ij} can be uniquely defined.

If we introduce two sets of functions $\Gamma^{i}_{jk}(x, p)$ and $C^{ik}_{j}(x, p)$ homogeneous in the p of degree 0 and -1 respectively, we can define absolute derivation by

$$DV^i = dV^i + \Gamma^{*}_{jk}V^j (dx)^k + C^{ik}_{j}V^j (dp)_k. \tag{4.5}$$

We shall determine Γ^i_{jk} and C^{ik}_j in terms of L and its X_k and X^k derivatives by making hypotheses exactly parallel to those made by CARTAN [9]. First of all, the assumption

$$Dg_{ij} = 0 \tag{4.6}$$

leads to equations corresponding to (3.21) and (3.22).

If we assume the symmetry of the C^k_{ij} in the first two indices, and write

$$A^k_{ij} = L\,C^k_{ij} = \frac{1}{2} L \frac{\partial g_{ij}}{\partial p_k}, \qquad \omega_k = Dl_k$$

the (4.5) may be rewritten as

$$DV^i = dV^i + \overset{\bullet}{\Gamma}{}^i_{jk} V^j (dx)^k + A^{ik}_j V^j \omega_k \tag{4.7}$$

with

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + A^{ir}_j \Gamma_{r0k}. \tag{4.8}$$

The symmetry of $\overset{\bullet}{\Gamma}{}^i_{jk}$ and the equations (4.6) suffice to determine the Γ^i_{jk}. To prove this let us introduce the generalized symbols of CHRISTOFFEL

$$\gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}\{X_k g_{ij} + X_i g_{jk} - X_j g_{ik}\} \tag{4.9}$$

which satisfy

$$\gamma_{ijk} - \gamma_{kji} = 0 \tag{4.10}$$

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = X_k g_{ij}. \tag{4.11}$$

The corresponding equations for the Γ are

$$\overset{\bullet}{\Gamma}_{ijk} - \overset{\bullet}{\Gamma}_{kji} = 0 \tag{4.12}$$

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = X_k g_{ij}. \tag{4.13}$$

The (4.12) may be rewritten

$$\Gamma_{ijk} - \Gamma_{kji} = A^r_{kj}\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\Gamma_{r0k}. \tag{4.14}$$

If we put

$$\Gamma_{ijk} = \gamma_{ijk} + S_{ijk} \tag{4.15}$$

the S_{ijk} will be a contact tensor, and it will follow from (4.11) and (4.13) that

$$S_{ijk} + S_{jik} = 0. \tag{4.16}$$

Hence from (4.14) we have

$$S_{ijk} - S_{kji} = A^r_{kj}\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\Gamma_{r0k} \tag{4.17}$$

so that using (4.16) we get

$$S_{ijk} + S_{jki} = A^r_{kj}\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\Gamma_{r0k}. \tag{4.18}$$

By writing two similar expressions by cyclic interchange of the letters i, j, h we get

$$S_{ijk} + S_{jki} + S_{kij} = 0 \tag{4.19}$$

so that using (4.18) gives

$$\begin{cases} S_{ihj} = A^r_{hj}\,\Gamma_{r0i} - A^r_{ij}\,\Gamma_{r0h} \\ \qquad = A^r_{hj}(\gamma_{r0i} + S_{r0i}) - A^r_{ij}(\gamma_{r0h} + S_{r0h}). \end{cases} \tag{4.20}$$

Contracting with the unit vector we have

$$S_{ih0} = 0, \qquad S_{i0j} = -A^r_{ij}\gamma_{r00} \tag{4.21}$$

so that we get immediately

$$S_{ihj} = A^r_{hj}(\gamma_{r0i} - A^q_{ri}\gamma_{q00}) - A^r_{ij}(\gamma_{r0h} - A^q_{rh}\gamma_{q00}). \tag{4.22}$$

It follows that Γ_{ijh} is expressible entirely in terms of the X_h and X^h derivatives of g. In this notation the Γ_{ijh} occurring in (3.41) should be written $\overset{\bullet}{\Gamma}_{ijh}$. The expression for $\overset{\bullet}{\Gamma}_{ijh}$ becomes identical with the right hand side of (3.41). The results of this paragraph however constitute a generalization because the derivatives occurring in (3.41) are ordinary derivatives, and here they are X_h and X^h operators.

References.

[1] Eisenhart, L. P., and M. S. Knebelman: Invariant theory of homogeneous contact transformations. Ann. of Math. **37**, 747—765 (1936). — [2] Schouten, J. A.: Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. Proc. Akad. Amsterdam **40**, 100—107, 236—245, 470—480 (1937). — [3] Doyle, T. C.: Tensor decomposition with applications to the contact and complex groups. Ann. of Math. **42**, 698—721 (1941). — [4] Muto, Y., and K. Yano: Sur les transformations de contact et les espaces de Finsler. Tohoku Math. J. **45**, 295—307 (1939). — [5] Vranceanu, G.: Studio geometrica dei sistemi anolonomi. Ann. Mat. pura appl., VI. ser. **4**, 9—43 (1928). — [6] Schouten, J. A., u. E. R. van Kampen: Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nicht holonomer Gebilde. Math. Ann. **103**, 752—783 (1930). — [7] Dienes, P.: On the fundamental formulae of the geometry of tensor submanifolds. J. Math. pures appl., IX. ser. **2**, 255—282 (1932). — [8] Davies, E. T.: On metric spaces based on a vector density. Proc. London Math. Soc., II. ser. **49**, 241—259 (1947). — [9] Cartan, E.: Les espaces de Finsler. Actual. sci. industr. **79** (1934).

Math. Dept., University, Southampton (England).

(Eingegangen am 18. September 1952.)

FORSTER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 428—455 (1953)

Über eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 k \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Von

HERBERT FORSTER.

Kap. I. Die Ergebnisse.

§ 1. Vorbemerkung.

Wenn man die Temperaturverhältnisse in einem sonnenbeschienenen, langen, zylindrischen Baumstamm berechnen will und dabei Zylinderkoordinaten einführt, erhält man die Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot k \cdot \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet t die Zeit, $f(r;\varphi;t)$ die Übertemperatur über das Temperaturminimum, und es ist

$$q^2 = \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_r} \quad \text{und} \quad k = \frac{\varkappa}{\lambda_r},$$

wobei λ_φ die Wärmeleitzahl in Richtung der Kreislinien $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ und λ_r die Wärmeleitzahl in radialer Richtung bedeutet; wegen des Einflusses der Jahresringe und der Markstrahlen sind beide voneinander verschieden. $\varkappa$ ist die Wärmekapazität der Volumeneinheit. Die Gl. (1) unterscheidet sich von der Wärmeleitungsgleichung für homogene zylindrische Körper [6, S. 106] durch den Faktor q^2, der verursacht, daß sich die linke Seite nicht in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ überführen läßt. [Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.]

Die Randbedingung, die in dem an der Oberfläche herrschenden Gleichgewicht von Wärmeeinstrahlung, Wärmeausstrahlung, Wärmeabgabe an die Luft und Wärmeableitung ins Innere des Baums besteht, läßt sich auf die Form bringen

$$\zeta \cdot f + \frac{\partial f}{\partial r} = S(\varphi;t) \quad \text{für} \quad r = R. \tag{2}$$

Dabei ist ζ eine Konstante, $S(\varphi;t)$ eine Funktion von φ und t, die periodisch in φ ist, und R der Radius des Zylinders. Da sich die Sonneneinstrahlung und die Temperaturen nur langsam ändern, so ändern sich S und f nur wenig mit t und vor allem der Ausdruck $k \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$, der von der Wahl der Zeiteinheit nicht abhängt, bleibt immer klein. Es liegt deshalb die Annahme nahe, daß sich die Funktion $f(r;\varphi;t)$ nur wenig von der Funktion $g(r;\varphi;t)$ unter-

scheidet, die die Lösung der beiden Gleichungen ist:

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0; \tag{3}$$

$$\zeta g + \frac{\partial g}{\partial r} = S(\varphi; t) \quad \text{für} \quad r = R. \tag{4}$$

Deshalb wurde die Lösung von (1), (2) in der Form

$$f(r; \varphi; t) = g(r; \varphi; t) + \delta(r; \varphi; t) \tag{5}$$

entwickelt, wobei dann $|\delta(r; \varphi; t)|$ klein ist, wenn k klein ist und $S(\varphi; t)$ sich nur langsam mit t ändert; während man normalerweise $f(r; \varphi; t)$ in Form einer Doppelreihe $\sum_n \sum_m a_{n,m} J_n(\lambda_{n,m} r)\, e^{in\varphi} \cdot e^{-\lambda_{n,m}^2 kt}$ anzusetzen pflegt [6, S. 106].

Diese Entwicklung (5) soll im folgenden mitgeteilt werden, wobei wir die Frage rein mathematisch behandeln wollen, ohne auf ihren physikalischen Hintergrund Bezug zu nehmen. Es sollen zwei Fälle ins Auge gefaßt werden:

I. daß für $t \leq t_0$ sowohl $f = 0$ als auch $S = 0$ ist (Kap. II),

II. daß $S(\varphi; t)$ auch in t periodisch ist (Kap. IV).

§ 2. Bezeichnungen und Abkürzungen.

Wir führen im folgenden einige Abkürzungen und Bezeichnungen ein. Die Konvergenz bzw. Existenz der dabei vorkommenden Reihenentwicklungen und die dazu nötigen Voraussetzungen werden später behandelt. Wir setzen:

$$\frac{\partial S(\varphi; t)}{\partial t} = H(\varphi; t); \tag{6}$$

$$H(\varphi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A'_n(t) \cos n\varphi + B'_n(t) \cdot \sin n\varphi\right); \tag{7}$$

$$S(\varphi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n(t) \cos n\varphi + B_n(t) \sin n\varphi\right); \tag{8}$$

$$\vartheta_n = \zeta + \frac{q\, n}{R} \qquad (q > 0;\ n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J_\nu(x) = 0 \cdot (\nu \geq 0), \tag{10}$$

wobei $J_\nu(x)$ die Besselsche Funktion darstellt, bezeichnen wir, nach wachsender Größe geordnet, mit $x_1(\nu)$, $x_2(\nu) \ldots$; da für $\nu > 0$ auch $J_\nu(0) = 0$ ist, sei $x_0(\nu) = 0$ für $\nu > 0$. Die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J'_\nu(x) = 0 \quad (\nu \geq 0) \tag{11}$$

bezeichnen wir, nach wachsender Größe geordnet, mit $X_1(\nu), X_2(\nu), \ldots$. Die Gleichung

$$\zeta R \cdot J_\nu(x) + x \cdot J'_\nu(x) = 0 \quad (\nu \geq 0) \tag{12}$$

hat, wenn $\zeta R > -\nu$ ist, keine rein imaginären Wurzeln (Hilfssatz I, § 10). In diesem Fall bezeichnen wir die positiven Wurzeln, nach wachsender Größe geordnet, mit $\Lambda_1(\nu), \Lambda_2(\nu), \ldots$. Wenn $\zeta R < -\nu$ ist, hat (12) ein Paar rein

imaginärer Wurzeln; wir bezeichnen sie mit $\pm \Lambda_1(\nu)$ und die positiven Wurzeln bezeichnen wir, der Größe nach geordnet, mit $\Lambda_2(\nu), \Lambda_3(\nu) \ldots$. Wir setzen

$$\sigma_{n\mu} = \frac{\Lambda_\mu^2(q\,n)}{k\,R^2}, \tag{13}$$

$$C_{n\mu} = J_{q\,n}\left(\Lambda_\mu(q\,n)\right) \cdot \left(\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2\right). \tag{14}$$

Im Falle II, wenn also $S(\varphi; t)$ auch eine periodische Funktion von t ist, setzen wir (8)

$$\begin{cases} A_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\alpha_{n\,m} \cos(m\,\omega\,t) + \beta_{n\,m} \sin(m\,\omega\,t)\right); \\ B_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\gamma_{n\,m} \cos(m\,\omega\,t) + \delta_{n\,m} \sin(m\,\omega\,t)\right). \end{cases} \tag{15}$$

Ferner bilden wir die Funktionen:

$$\begin{cases} A_{n\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\,\omega}{m^2\omega^2 + \sigma_{n\mu}^2} \times \\ \times \left[(m\,\omega\,\alpha_{n\,m} + \sigma_{n\mu}\beta_{n\,m}) \cos(m\,\omega\,t) + (m\,\omega\,\beta_{n\,m} - \sigma_{n\mu}\alpha_{n\,m}) \sin(m\,\omega\,t)\right]; \\ B_{n\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\,\omega}{m^2\omega^2 + \sigma_{n\mu}^2} \times \\ \times \left[(m\,\omega\,\gamma_{n\,m} + \sigma_{n\mu}\,\delta_{n\,m}) \cos(m\,\omega\,t) + (m\,\omega\,\delta_{n\,m} - \sigma_{n\mu}\cdot\gamma_{n\,m}) \sin(m\,\omega\,t)\right]. \end{cases} \tag{16}$$

§ 3. Die Ergebnisse.

I. (17) Wir setzen von $\frac{\partial S(\varphi; t)}{\partial t} = H(\varphi; t)$ voraus, daß es für $t \geq t_0$ eine stetige und beschränkte Funktion von φ und t und eine periodische Funktion von φ mit der Periode 2π ist. Ferner sollen $\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial \varphi}$, $\frac{\partial^3 S}{\partial t\,\partial \varphi^2}$ und $\frac{\partial^4 S}{\partial t\,\partial \varphi^3}$ existieren und beschränkt sein; $\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial \varphi}$ soll außerdem stetig sein, während $\frac{\partial^3 S}{\partial t\,\partial \varphi^2}$ und $\frac{\partial^4 S}{\partial t\,\partial \varphi^3}$ als Funktionen von φ endlich viele Sprungstellen haben dürfen.

(18) Für $t \leq t_0$ soll $S(\varphi; t) = 0$ sein.

Bezüglich R, ζ und q setzen wir voraus, daß

$$\vartheta_n = \zeta + \frac{q\,n}{R} \neq 0 \quad \text{für} \quad n = 0; 1; 2; \ldots \tag{19}$$

ist. Die Funktion $f(r; \varphi; t)$ soll die Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot k \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \tag{20}$$

lösen und folgende Randbedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} 1.\ \text{für } t \leq t_0 \text{ soll } f(r; \varphi; t) = 0 \text{ sein}; \\ 2.\ \text{für } t > t_0 \text{ und } r = 0 \text{ soll } f(0; \varphi; t) \text{ endlich und } \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein}; \\ 3.\ \text{für } t > t_0 \text{ und } r = R \text{ soll } \zeta \cdot f + \frac{\partial f}{\partial r} = S(\varphi; t) \text{ sein}. \end{cases} \tag{21}$$

Unter obigen Voraussetzungen ist

$$(22)\quad \begin{cases} f(r;\varphi;t) = g(r;\varphi;t) + \delta(r;\varphi;t) \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_n} \left(\frac{r}{R}\right)^{q_n} \left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right) \\ \qquad - 2R \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{J_{q_n}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(q\,n)\right)}{C_{n\mu}} \times \\ \qquad \times \left\{\cos n\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} A_n'(\tau)\, e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}}\, d\tau + \sin n\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} B_n'(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}}\, d\tau\right\} \end{cases}$$

für $t \geq t_0$ *und* $f(r;\varphi;t) = 0$ *für* $t \leq t_0$ *eine Lösung von* (20) *unter den Randbedingungen* (21). (Über die Bedeutung von $A_n(t)$, $B_n(t)$ vgl. (8))

$\delta(r;\varphi;t)$ *ist also durch* $-2R\sum\sum \ldots$ *gegeben.*

II. Von $S(\varphi;t)$ setzen wir jetzt voraus, daß es eine in φ und t stetige und in φ und t periodische Funktion mit der Periode 2π bzw. $\frac{2\pi}{\omega}$ ist. Es sollen ferner die Ableitungen $\frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial\varphi}$, $\frac{\partial^3 S}{\partial t\,\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial^4 S}{\partial t^2\,\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial^5 S}{\partial t^2\,\partial\varphi^3}$ und $\frac{\partial^6 S}{\partial t^3\,\partial\varphi^3}$ existieren, stetig und beschränkt sein. Statt (19) soll hier gelten: $\zeta R > 0$.

Die Funktion $f(r;\varphi;t)$ soll eine Lösung von (1) mit folgenden Randbedingungen sein:

$$(23)\quad \begin{cases} 1.\ \text{für } r = 0 \text{ soll } f(0;\varphi;t) \text{ endlich und } \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein;} \\ 2.\ \text{für } r = R \text{ soll } \zeta f + \frac{\partial f}{\partial r} = S(\varphi;t) \text{ sein.} \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$(24)\quad \begin{cases} f(r;\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_n} \left(\frac{r}{R}\right)^{q_n} \left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\cdot\sin n\varphi\right) \\ -2R\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{J_{q_n}\left(\frac{r}{R}\cdot\Lambda_\mu(q\,n)\right)}{C_{n\mu}} \{\cos n\varphi \cdot A_{n\mu}(t) + \sin n\varphi \cdot B_{n\mu}(t)\} \end{cases}$$

eine Lösung von (1) *mit den Randbedingungen* (23).

III. Im Laufe der Arbeit (§§ 10–12) werden einige Hilfssätze über die Lösungen $\Lambda_\mu(\nu)$ der Gleichung

$$(12a)\qquad \alpha \cdot J_\nu(x) + x \cdot J_\nu'(x) = 0 \qquad (\nu \geq 0;\ \alpha \neq -\nu)$$

und die Werte $J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))$ bewiesen werden, die wohl auch sonst von Interesse sind; es möge hier genügen, auf sie zu verweisen [S. 441, S. 444, S. 447 und die Ungleichungen (119), (120)].

Kap. II. Für $t \leq t_0$ soll $S(\varphi; t) = f(r; \varphi; t) = 0$ sein.

In diesem Kapitel soll unter den Voraussetzungen (17), (18) und (19) eine Lösung der Differentialgleichung (20) mit den Randbedingungen (21) entwickelt werden. Das Ergebnis ist (22).

§ 4. Der Gedankengang der Lösung.

Es soll zunächst der Gedankengang der Lösung dargestellt werden. Die Durchführung der einzelnen Schritte und der Beweis wird dann in den folgenden Paragraphen nachgetragen.

I. Wir denken uns $f(r; \varphi; t)$ durch Superposition von Funktionen $F(r; \varphi; t; \tau)$ aufgebaut in der Form

$$f(r; \varphi; t) = \int_{t_0}^{t} F(r; \varphi; t; \tau)\, d\tau. \tag{25}$$

Dabei fordern wir von $F(r; \varphi; t; \tau)$, daß es eine Lösung von

$$r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot k \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \tag{26}$$

ist und folgende Randbedingungen erfüllt:

1. für $t \leq \tau$ soll

$$F(r; \varphi; t; \tau) = 0, \text{ speziell } F(r; \varphi; t; t) = 0 \text{ sein;} \tag{27}$$

2. für $t > \tau$ soll

$$\begin{cases} \text{für } r = R \quad \zeta F + \dfrac{\partial F}{\partial r} = H(\varphi; \tau) \quad \text{und} \\ \text{für } r = 0 \quad F \text{ endlich und } \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein.} \end{cases} \tag{28}$$

Dann ist (25) eine Lösung von (20) und (21).

II. $G(r; \varphi; \tau)$ sei die Lösung der Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + r \frac{\partial G}{\partial r} + q^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{29}$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{cases} 1.\ \text{Für } r = R \text{ soll } \zeta G + \dfrac{\partial G}{\partial r} = H(\varphi; \tau) \text{ und} \\ 2.\ \text{für } r = 0 \text{ soll } G \text{ endlich und } \dfrac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \text{ sein.} \end{cases} \tag{30}$$

Die Funktion

$$g(r; \varphi; t) = \int_{t_0}^{t} G(r; \varphi; \tau)\, d\tau \tag{31a}$$

erfüllt dann wegen (6) und (18) die Gleichungen

$$\begin{cases} \text{a)} \quad r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \dfrac{\partial g}{\partial r} + q^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0, \\ \text{b)} \quad \zeta g + \dfrac{\partial g}{\partial r} = S(\varphi; t) \quad \text{für } r = R \quad \text{und} \\ \text{c)} \quad \dfrac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{und } g \text{ endlich für } \quad r = 0. \end{cases} \tag{31b}$$

Wir nennen sie „die zu $f(r; \varphi; t)$ gehörige stationäre Lösung".

III. Setzt man nun

$$F(r;\varphi;t;\tau) = G(r;\varphi;\tau) - \Delta(r;\varphi;t;\tau), \tag{32}$$

so erhält man für Δ aus (26) und (29) die Gleichung

$$r^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2} + r\frac{\partial\Delta}{\partial r} + q^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial\varphi^2} = k\cdot r^2\frac{\partial\Delta}{\partial t} \tag{33}$$

und aus (27), (28) und (30) die Randbedingungen:

1. für $t \leq \tau$ soll

$$\begin{cases} \Delta(r;\varphi;t;\tau) = G(r;\varphi;\tau) & \text{(von } t \text{ unabhängig!)}, \\ \text{speziell} \quad \Delta(r;\varphi;\tau;\tau) = G(r;\varphi;\tau) & \text{sein}, \end{cases} \tag{34}$$

2. für $t > \tau$ soll

$$\text{an } r = R \qquad \zeta\cdot\Delta + \frac{\partial\Delta}{\partial r} = 0 \qquad \text{und} \tag{35}$$

$$\text{an } r = 0 \qquad \Delta \text{ endlich} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{sein.} \tag{36}$$

Die Randbedingungen (35) und (36) sind nun *homogen* geworden.

Setzen wir nun (32) in (25) ein und berücksichtigen wir (31a), so erhalten wir:

$$\begin{cases} f(r;\varphi;t) = \int\limits_{t_0}^{t} G(r;\varphi;\tau)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} \Delta(r;\varphi;t;\tau)\,d\tau \\ \qquad\qquad = g(r;\varphi;t) - \int\limits_{t_0}^{t} \Delta(r;\varphi;t;\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{37}$$

Es ist also der gesuchte (5) Unterschied zwischen $f(r;\varphi;t)$ und $g(r;\varphi;t)$ gegeben durch

$$\delta(r;\varphi;t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \Delta(r;\varphi;t;\tau)\,d\tau. \tag{38}$$

Es sei bemerkt, daß von den Randbedingungen (34) nur die für $t=\tau$ zur Geltung kommt, da ja $\tau \leq t$ ist.

§ 5. Die stationäre Lösung.

Nach den Voraussetzungen (17) läßt sich $S(\varphi;t)$ in eine FOURIERsche Reihe nach φ entwickeln

$$S(\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right).$$

Außerdem dürfen wir gliedweise nach t differenzieren. Dann wird:

$$H(\varphi;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n'(t)\cdot\cos n\varphi + B_n'(t)\sin n\varphi\right),$$

wobei $A_n'(t)$ und $B_n'(t)$ stetig und beschränkt sind.

Die Lösung von (29) und (30) erhält man dann in bekannter Weise [2; S. 272], indem man

$$G(r;\varphi;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\left(\alpha_n(\tau)\cos n\varphi+\beta_n(\tau)\cdot\sin n\varphi\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-qn}\left(\gamma_n(\tau)\cdot\cos n\varphi+\delta_n(\tau)\cdot\sin n\varphi\right)$$

setzt. $\alpha_n(\tau)$, $\beta_n(\tau)$, $\gamma_n(\tau)$ und $\delta_n(\tau)$ erhält man aus den Randbedingungen (30).

(30; 2) ergibt: $\gamma_n=\delta_n=0$;

(30; 1) ergibt: $\alpha_n(\tau)\left(\zeta+\frac{qn}{R}\right)=A'_n(\tau)$;

$$\beta_n(\tau)\cdot\left(\zeta+\frac{qn}{R}\right)=B'_n(\tau).$$

Unter Verwendung der Abkürzung (9) erhält man:

$$G(r;\varphi;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\left(A'_n(\tau)\cdot\cos n\varphi+B'_n(\tau)\cdot\sin n\varphi\right). \tag{39}$$

Analog erhält man als Lösung von (31b):

$$g(r;\varphi;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\left(A_n(t)\cos n\varphi+B_n(t)\sin n\varphi\right). \tag{40}$$

§ 6. Die Funktion $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$.

Wir machen für $t\geq\tau$ den Ansatz

$$\Delta(r;\varphi;t;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Gamma_n(r;t;\tau)\cos n\varphi+E_n(r;t;\tau)\cdot\sin n\varphi\right) \tag{41}$$

mit

$$\begin{cases}\Gamma_n(r;t;\tau)=\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}h_{n\mu}(r)\,e^{-\sigma_{n\mu}(t-\tau)},\\ E_n(r;t;\tau)=\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}l_{n\mu}(r)\,e^{-\varrho_{n\mu}(t-\tau)}.\end{cases} \tag{42}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (33) für $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ ein, so erhalten wir für $h_{n\mu}(r)$ und $l_{n\mu}(r)$ die Gleichungen:

$$\begin{cases}r^2\frac{d^2h}{dr^2}+r\frac{dh}{dr}-(qn)^2h+\sigma_{n\mu}kr^2h=0;\\ r^2\frac{d^2l}{dr^2}+r\frac{dl}{dr}-(qn)^2l+\varrho_{n\mu}kr^2l=0.\end{cases} \tag{43}$$

Da die Funktionen für $r=0$ endlich sein sollen (36), lauten die Lösungen [2; S. 261]:

$$h_{n\mu}(r)=c_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\sigma_{n\mu}k}\right);\qquad l_{n\mu}(r)=e_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\varrho_{n\mu}k}\right). \tag{44}$$

Dabei bedeutet $J_{qn}(x)$ die BESSELsche Funktion mit dem Index qn.

Die Konstanten $\sigma_{n\mu}, \varrho_{n\mu}, c_{n\mu}, e_{n\mu}$ werden nun aus den Grenzbedingungen bestimmt:

A. Aus der Bedingung (35) erhalten wir:

$$\begin{cases} \zeta J_{qn}\left(R\sqrt{\sigma_{n\mu}}k\right) + \frac{d}{dr} J_{qn}\left(r\sqrt{\sigma_{n\mu}}k\right)_{r=R} = 0; \\ \zeta J_{qn}\left(R\cdot\sqrt{\varrho_{n\mu}}k\right) + \frac{d}{dr} J_{qn}\left(r\sqrt{\varrho_{n\mu}}k\right)_{r=R} = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Dies sind Bestimmungsgleichungen für $\varrho_{n\mu}$ und $\sigma_{n\mu}$. Da sie für beide gleich lauten, können wir $\varrho_{n\mu} = \sigma_{n\mu}$ setzen. Wir wollen die Bestimmungsgleichung (45) für $\sigma_{n\mu}$ noch etwas umformen und setzen

$$\Lambda_\mu(qn) = R\cdot\sqrt{\sigma_{n\mu}}k. \tag{46a}$$

Dann wird

$$J_{qn}\left(r\sqrt{\sigma_{n\mu}}k\right) = J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right) \tag{46b}$$

und (45) erhält die Form:

$$R\zeta\cdot J_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\right) + \Lambda_\mu(qn)\, J'_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\right) = 0. \tag{47}$$

Dies ist die Gl. (12), wenn man $\nu = qn$ setzt.

Es liegt hier eine STURM-LIOUVILLEsche Eigenwertaufgabe vor. Sie ergibt sich in ihrer geläufigen Form [1; S. 158], wenn wir

$$\lambda_{n\mu} = \sigma_{n\mu}k = \varrho_{n\mu}k, \quad \text{also} \quad \Lambda^2_\mu(qn) = \lambda_{n\mu}\cdot R^2 \tag{48}$$

setzen, und lautet dann:

„Die Differentialgleichung

$$r\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{dh}{dr} - \frac{(qn)^2}{r}h + \lambda r h = 0 \tag{49a}$$

ist so zu lösen, daß

$$\begin{cases} \text{für} \quad r = R \qquad \zeta h + \frac{dh}{dr} = 0 \quad \text{und} \\ \text{für} \quad r = 0 \qquad h(0) = 0 \quad \text{bzw. im Falle} \\ \qquad\qquad\qquad n = 0 \quad h(0) \text{ endlich ist.}" \end{cases} \tag{49b}$$

Im Falle $\lambda = 0$ existiert keine Lösung; denn das allgemeine Integral lautet dann $c_1 r^{qn} + c_2 r^{-qn}$ und erfüllt nicht beide Randbedingungen (49b) gleichzeitig, da nach (19) $\zeta R + qn \neq 0$ ist. Da für $\lambda = 0$ keine Lösung existiert, gibt es eine GREENsche Funktion [2; S. 306]. Davon werden wir später Gebrauch machen.

Fassen wir nun (41) bis (44) zusammen, so erhält $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ für $t \geq \tau$ die Form:

$$\begin{cases} \Delta(r;\varphi;t;\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\cos n\varphi \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{n\mu}\, J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}} \\ \qquad\qquad + \sin n\varphi \sum_{\mu=1}^{\infty} e_{n\mu}\, J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) e^{-(t-\tau)\sigma_{n\mu}}\Big\} \end{cases} \tag{50}$$

B. Die Koeffizienten $c_{n\mu}$ und $e_{n\mu}$ in (50) bestimmen wir aus der Randbedingung (34). Wir erhalten aus ihr für $t=\tau$:

$$(51)\quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\cos n\varphi \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{qn}\big(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\big)\,c_{n\mu} + \sin n\varphi \sum_{\mu=1}^{\infty} e_{n\mu}\,J_{qn}\big(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\big)\Big] \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\cos n\varphi \cdot \frac{A'_n(\tau)}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} + \sin n\varphi \cdot \frac{B'_n(\tau)}{\vartheta_n}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{qn}\Big]. \end{cases}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\frac{A'_n(\tau)}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{n\mu}\,J_{qn}\big(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\big),$$

$$\frac{B'_n(\tau)}{\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} e_{n\mu}\,J_{qn}\big(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\big),$$

Hieraus folgt, daß wir $(r/R)^{qn}$ nach den Eigenfunktionen $J_{qn}\big(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\big)$ zu entwickeln haben:

$$(52a)\qquad \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \eta_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(\Lambda_\mu(qn)\cdot\frac{r}{R}\right).$$

Dann ist

$$(52b)\qquad c_{n\mu} = \eta_{n\mu}\cdot\frac{A'_n(\tau)}{\vartheta_n} \quad\text{und}\quad e_{n\mu} = \eta_{n\mu}\cdot\frac{B'_n(\tau)}{\vartheta_n}.$$

§ 7. Die Entwicklung $\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\eta_{n\mu}\cdot J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)$.

A. Wir stellen zunächst die GREENsche Funktion $G(r;\varrho)$ für unsere Randwertaufgabe (49a, b) auf. $G(r;\varrho)$ hat folgende Bedingungen zu erfüllen [2; S. 304].

1. Es muß bei festem ϱ eine stetige Funktion von r sein und die Randbedingungen (49b) erfüllen.

2. Die Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach r müssen überall außer für $r=\varrho$ stetig sein; an der Stelle $r=\varrho$ muß

$$\left(\frac{\partial G(r;\varrho)}{\partial r}\right)_{r=\varrho+0} - \left(\frac{\partial G(r;\varrho)}{\partial r}\right)_{r=\varrho-0} = -\frac{1}{\varrho} \quad\text{sein.}$$

3. Außer für $r=\varrho$ muß im ganzen Bereich $0\le r\le R$

$$r\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{(qn)^2}{r}\cdot G = 0 \quad\text{sein.}$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich

$$(53)\qquad G_n(r;\varrho) = \begin{cases} \frac{1}{2qn}\cdot\left[\frac{\delta_n}{\vartheta_n}\left(\frac{r\varrho}{R^2}\right)^{qn} + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{qn}\right] & \text{für } 0\le r\le\varrho\le R, \\ \frac{1}{2qn}\cdot\left[\frac{\delta_n}{\vartheta_n}\left(\frac{r\varrho}{R^2}\right)^{qn} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{qn}\right] & \text{für } 0\le\varrho\le r\le R; \end{cases}$$

dabei ist

$$(54)\qquad \delta_n = \frac{qn}{R} - \zeta; \qquad \vartheta_n = \frac{qn}{R} + \zeta; \qquad n>0.$$

B. Da in (49a) bei $\lambda \cdot h$ der Faktor r steht, stellt

$$K_n(r;\varrho) = \sqrt{r\varrho} \cdot G_n(r;\varrho) \tag{55}$$

den Kern der Integralgleichung dar, die unserer STURM-LIOUVILLEschen Randwertaufgabe (49a, b) entspricht [2; S. 309]. Die Integralgleichung lautet

$$v(r) = \lambda \cdot \int_0^R K_n(r;\varrho) \cdot v(\varrho)\, d\varrho . \tag{56}$$

Zwischen der Lösung $v(r)$ von (56) und der Lösung $h(r)$ von (49) besteht die Beziehung

$$v(r) = \sqrt{r} \cdot h(r) .$$

Die Eigenwerte der Integralgleichung sind unsere $\lambda_{n\mu}$ und die normierten Eigenfunktionen sind

$$\varphi_{n\mu}(r) = \sqrt{r} \cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) \cdot \tau_{n\mu}; \quad \text{dabei ist} \tag{57}$$

$$\frac{1}{\tau_{n\mu}^2} = \int_0^R r\, J_{qn}^2\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) dr . \tag{58}$$

Nach dem Hilfssatz I, § 10 und (48) sind die Eigenwerte $\lambda_{n\mu}$ $(\mu = 1; 2; \ldots)$ entweder alle positiv, oder nur ein einziger ist negativ und die anderen sind alle positiv; dann ist nach einem Satz von MERCER [2; S. 117]

$$K_n(r;\varrho) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n\mu}(r) \cdot \varphi_{n\mu}(\varrho)}{\lambda_{n\mu}} ; \tag{59}$$

und zwar konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig für $0 \leq r \leq R$ und $0 \leq \varrho \leq R$.

Wir setzen in (59) speziell $\varrho = R$ ein, dann ersetzen wir $K_n(r;R)$ nach (55) durch $\sqrt{rR}\, G(r;R)$ und verwenden (53); die rechte Seite von (59) formen wir mittels (57) um. So erhalten wir, wenn wir die entstandene Gleichung noch durch $\sqrt{rR}$ dividieren:

$$\frac{1}{R\vartheta_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) \cdot \frac{J_{qn}\left(R\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) \cdot \tau_{n\mu}^2}{\lambda_{n\mu}} . \tag{60}$$

Für $n = 0$ zeigt man die Gültigkeit von (60), indem man die Gleichung mit $r \cdot J_0\left(r\sqrt{\lambda_{0\mu}}\right)$ multipliziert und von 0 bis R integriert.

§ 8. Die Berechnung von $\frac{1}{\tau_{n\mu}^2} = \int_0^R r\, J_{qn}^2\left(r\sqrt{\lambda_{n\mu}}\right) dr .$

Das folgende Verfahren ist BIEBERBACH nachgebildet [1; S. 187]. λ sei ein beliebiger, nicht verschwindender, reeller Wert des Parameters, braucht also zunächst noch kein Eigenwert zu sein. Wir setzen:

$$\sqrt{r} \cdot J_{qn}\left(r\sqrt{\lambda}\right) = \psi_{n,\lambda}(r) = \lambda^{\frac{qn}{2}} \cdot r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{qn}\left(r\sqrt{\lambda}\right), \quad \text{wobei} \tag{61}$$

$$\Phi_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \text{ ist.} \tag{62}$$

Dann gilt für $\psi_{n,\lambda}(r)$ die Differentialgleichung:

$$\psi''_{n,\lambda}(r) + \psi_{n,\lambda}(r) \cdot \left(\lambda - \frac{4(qn)^2 - 1}{4r^2}\right) = 0. \tag{63}$$

Ebenso für $\psi_{n,\lambda+\delta}(r)$:

$$\psi''_{n,\lambda+\delta} + \psi_{n,\lambda+\delta} \cdot \left(\lambda + \delta - \frac{4(qn)^2 - 1}{4r^2}\right) = 0. \tag{64}$$

Wir multiplizieren (63) mit $\psi_{n,\lambda+\delta}$ und (64) mit $\psi_{n,\lambda}$, subtrahieren dann die erstere von der zweiten und integrieren nach r von ε bis R, wobei ε klein aber positiv sein soll. Dann ergibt sich:

$$\begin{cases} \delta \cdot \int_\varepsilon^R \psi_{n,\lambda+\delta} \cdot \psi_{n,\lambda}\, dr = -\int_\varepsilon^R (\psi''_{n,\lambda+\delta}\psi_{n,\lambda} - \psi''_{n,\lambda} \cdot \psi_{n,\lambda+\delta})\, dr \\ \qquad = [\psi'_{n,\lambda} \cdot \psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda} \cdot \psi'_{n,\lambda+\delta}]_\varepsilon^R = \Psi(R) - \Psi(\varepsilon). \end{cases} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &= [\psi'_{n,\lambda} \cdot \psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda} \cdot \psi'_{n,\lambda+\delta}]_{r=\varepsilon} \\ &= \Big[\Big(\lambda^{\frac{qn}{2}-\frac{1}{2}} r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi'_{qn}(r\sqrt{\lambda}) + (qn+\tfrac{1}{2}) \cdot r^{qn-\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{\frac{qn}{2}} \cdot \Phi_{qn}(r\sqrt{\lambda})\Big) \times \\ &\quad \times (\lambda+\delta)^{\frac{qn}{2}} r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{qn}(r\sqrt{\lambda+\delta}) \\ &\quad - \lambda^{\frac{qn}{2}} \cdot r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{qn}(r\sqrt{\lambda}) \cdot \Big((\lambda+\delta)^{\frac{qn+1}{2}} r^{qn+\frac{1}{2}} \cdot \Phi'_{qn}(r\sqrt{\lambda+\delta}) + \\ &\quad + (qn+\tfrac{1}{2}) \cdot r^{qn-\frac{1}{2}} (\lambda+\delta)^{\frac{qn}{2}} \cdot \Phi_{qn}(r\sqrt{\lambda+\delta})\Big)\Big]_{r=\varepsilon} \\ &= \lambda^{\frac{qn}{2}} (\lambda+\delta)^{\frac{qn}{2}} \cdot \varepsilon^{2qn+1} \times \\ &\quad \times \left(\lambda^{\frac{1}{2}} \Phi'_{qn}(\varepsilon\sqrt{\lambda}) \cdot \Phi_{qn}(\varepsilon\sqrt{\lambda+\delta}) - (\lambda+\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot \Phi'_{qn}(\varepsilon\sqrt{\lambda+\delta}) \cdot \Phi_{qn}(\varepsilon\sqrt{\lambda})\right). \end{aligned}$$

Wenn nun $\varepsilon \to 0$ geht, so geht nach (62) $\Phi_{qn} \to \frac{1}{2^{qn}\Gamma(qn+1)}$ und $\Phi'_{qn} \to 0$; also ist $\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi(\varepsilon) = 0$. Lassen wir in (65) $\varepsilon \to 0$ gehen, so erhalten wir:

$$\int_0^R \psi_{n,\lambda+\delta} \cdot \psi_{n\lambda}\, dr = \left[\psi'_{n,\lambda} \frac{\psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda}}{\delta} - \psi_{n,\lambda} \frac{\psi'_{n,\lambda+\delta} - \psi'_{n,\lambda}}{\delta}\right]_{r=R}. \tag{66}$$

Nach (61) ist:

$$\psi_{n\lambda}(R) = \sqrt{R} \cdot J_{qn}(R\sqrt{\lambda}),$$

$$\psi'_{n\lambda}(R) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R}} J_{qn}(R\sqrt{\lambda}) + \sqrt{R\lambda}\, J'_{qn}(R\sqrt{\lambda}),$$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\psi_{n,\lambda+\delta} - \psi_{n,\lambda}}{\delta}\right)_{r=R} = \frac{1}{2}\frac{R^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \cdot J'_{qn}(R\sqrt{\lambda}),$$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\psi'_{n,\lambda+\delta} - \psi'_{n,\lambda}}{\delta}\right)_{r=R} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{R}{\lambda}} \cdot J'_{qn}(R\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{2} \cdot R^{\frac{3}{2}} J''_{qn}(R\sqrt{\lambda}).$$

Setzt man dies in (66) ein, so erhält man für $\delta \to 0$:

$$(67)\quad \begin{cases} \int_0^R \psi_{n,\lambda}^2(r)\,dr \\ \quad = \left[\frac{1}{2}R^2 J_{qn}'^2(x) - \frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{\lambda}} J_{qn}(x)\,J_{qn}'(x) - \frac{1}{2}R^2 J_{qn}(x)\,J_{qn}''(x)\right]_{x=R\sqrt{\lambda}}. \end{cases}$$

Nun wollen wir unter λ wieder einen Eigenwert verstehen und mit Hilfe der Differentialgleichung

$$(68)\qquad J_{qn}''(x) = -\frac{1}{x}\cdot J_{qn}'(x) + \left(\frac{(qn)^2}{x^2} - 1\right) J_{qn}(x)$$

J_{qn}'' durch J_{qn}' und J_{qn} ausdrücken. Mit Hilfe von (48) und der Eigenwertsgleichung (47) drücken wir dann $J_{qn}'(\Lambda_\mu(qn))$ durch $J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))$ aus und erhalten:

$$(69)\qquad \frac{1}{\tau_{n\mu}^2} = \frac{1}{2\lambda_{n\mu}}\cdot\left(\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2\right)\cdot J_{qn}^2(\Lambda_\mu(qn)).$$

Daraus ergibt sich nebenbei, daß

$$(70)\qquad \Lambda_\mu^2(qn) > (qn)^2 - \zeta^2 R^2, \qquad \text{wenn} \qquad \lambda_{n\mu} > 0 \quad \text{ist.}$$

Setzen wir nun (69) in unsere Entwicklung (60) von $(r/R)^{qn}$ ein, so erhalten wir:

$$(71\,a)\qquad \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = 2R\vartheta_n\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2R^2 - (qn)^2}\cdot\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))}.$$

Unter Verwendung der Abkürzung (14) ergibt sich

$$(71\,b)\qquad \left(\frac{r}{R}\right)^{qn} = 2R\vartheta_n\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{C_{n\mu}}.$$

Die Koeffizienten $\eta_{n\mu}$, $c_{n\mu}$ und $e_{n\mu}$ der Gln. (52a und b) bzw. (50) lauten also

$$(72)\qquad \eta_{n\mu} = 2R\vartheta_n\cdot\frac{1}{\left(\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2R^2 - (qn)^2\right)\cdot J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))} = \frac{2R\vartheta_n}{C_{n\mu}};$$

$$(73)\qquad c_{n\mu} = \frac{2R}{C_{n\mu}}\cdot A_n'(\tau); \qquad e_{n\mu} = \frac{2R}{C_{n\mu}}\,B_n'(\tau).$$

Fassen wir nun die Gln. (73), (48) und (50) zusammen, so erhalten wir:

$$(74)\quad \begin{cases} \Delta(r;\varphi;t;\tau) \\ \quad = 2R\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\cos n\varphi\cdot A_n'(\tau)\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{C_{n\mu}}\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}} + \\ \quad + \sin n\varphi\cdot B_n'(\tau)\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{C_{n\mu}}\,e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}}\Bigg\} \end{cases}$$

und nach (38)

$$(75)\qquad \delta(r;\varphi;t) = -2R\int_{t_0}^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\{\cdots\}\,d\tau.$$

Nun erfüllen die einzelnen Reihenglieder von (74) und (40) ihre Differentialgleichungen und Randbedingungen. Der Schluß, daß dann auch $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$, $g(r;\varphi;t)$ und $f(r;\varphi;t)$ dies tuen, ist ebenso wie der Übergang von (75) auf (22) aber erst dann möglich, wenn die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihen (74) und (39) bzw. (40) und der aus ihnen bei gliedweiser Differentiation entstehenden Reihen bewiesen wurde. Dieser Beweis soll nun erbracht werden.

Kap. III. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz und die gliedweise Differenzierbarkeit der Reihen $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$, $\delta(r;\varphi;t)$, $G(r;\varphi;\tau)$, $g(r;\varphi;t)$.

§ 9. Bezeichnungen und Formeln.

Es werden auch im folgenden die in § 2 unter (6) bis (16) eingeführten Bezeichnungen und Abkürzungen benützt; speziell sei an die Bezeichnungen (10) bis (12) erinnert. Wir wollen nun einige im folgenden gebrauchte Formeln für die BESSELsche Funktion zusammenstellen [4; S. 148f.], [5; S. 16], [6; S. 99]:

(76) $$J_\nu''(x) = -\frac{1}{x} J_\nu'(x) + \frac{\nu^2 - x^2}{x^2} \cdot J_\nu(x);$$

(77) $$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \cdot J_\nu(x);$$

(78) $$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 \cdot J_\nu'(x).$$

Aus (77) und (78) erhält man:

(79) $$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} \cdot J_\nu(x) - J_\nu'(x);$$

(80) $$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x).$$

Mit Hilfe von (76) erhält man daraus:

(81) $$J_{\nu+1}'(x) = J_\nu(x) \frac{x^2 - \nu(\nu+1)}{x^2} + J_\nu'(x) \cdot \frac{\nu+1}{x};$$

(82) $$J_{\nu-1}'(x) = J_\nu(x) \frac{\nu(\nu-1) - x^2}{x^2} + J_\nu'(x) \frac{\nu-1}{x}.$$

Setzt man

(83) $$J_\nu(x) = x^\nu \cdot \Phi_\nu(x),$$

dann ist [2; S. 420f.], [5; S. 16], [6; S. 114]:

(84) $$\Phi_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

(85) $$\Phi_\nu'(x) = -x \cdot \Phi_{\nu+1}(x).$$

Für die erste positive Extremstelle $X_1(\nu)$ [vgl. (11)] der BESSELschen Funktion gilt [7; S. 486]:

$$X_1^2(\nu) > \nu(\nu+2), \quad \text{wenn} \quad \nu > 0; \tag{86}$$

$$x_1(\nu) > X_1(\nu) \quad \text{für} \quad \nu > 0 \quad \text{und} \tag{87}$$

$$x_1(\nu+1) > x_1(\nu) \quad \text{für} \quad \nu \geq 0. \tag{88}$$

§ 10.

Hilfssatz I. *a) Für $\mu \geq 2$ hat die Gl. (12) in jedem Bereich $x_{\mu-1}(\nu) < x < x_\mu(\nu)$ genau eine Lösung $\Lambda_\mu(\nu)$, und zwar ist*

$$x_{\mu-1}(\nu) < \Lambda_\mu(\nu) < X_\mu(\nu) < x_\mu(\nu), \quad \text{wenn} \quad \zeta \cdot R < 0 \quad \text{ist},$$
$$x_{\mu-1}(\nu) < X_\mu(\nu) < \Lambda_\mu(\nu) < x_\mu(\nu), \quad \text{wenn} \quad \zeta \cdot R > 0 \quad \text{ist}.$$

b) Wenn $-\zeta R < \nu$ ist, dann befindet sich auch im Bereich $0 < x < x_1(\nu)$ eine Lösung $\Lambda_1(\nu)$ von (12) und zwar ist

$$0 < \Lambda_1(\nu) < X_1(\nu) < x_1(\nu), \quad \text{wenn} \quad \zeta \cdot R < 0 \quad \text{ist und}$$
$$0 < X_1(\nu) < \Lambda_1(\nu) < x_1(\nu), \quad \text{wenn} \quad \zeta \cdot R > 0 \quad \text{ist}.$$

Wenn $-\zeta R > \nu$ ist, dann existiert im Bereich $0 < x < x_1(\nu)$ keine Lösung von (12).

c) Wenn $-\zeta R < \nu$ ist, dann hat (12) keine rein imaginären Lösungen.

Wenn $-\zeta R > \nu$ ist, dann hat (12) ein Paar rein imaginärer Lösungen $\pm \Lambda_1(\nu)$.

Beweis. a) Wir setzen

$$H_\nu(x) = \frac{x \cdot J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}. \quad \text{Dann ist} \tag{89}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_\mu(\nu)+0} H_\nu(x) = \infty; & H_\nu(\Lambda_\mu(\nu)) = -\zeta \cdot R; \\ H_\nu(X_\mu(\nu)) = 0, & \lim\limits_{x \to x_\mu(\nu)-0} H_\nu(x) = -\infty. \end{cases} \tag{90}$$

Für $H_\nu'(x)$ erhält man mit Hilfe von (76):

$$H_\nu' = \frac{-1}{x \cdot J_\nu^2(x)} \cdot [x^2 \cdot (J_\nu^2 + J_\nu'^2) - \nu^2 \cdot J_\nu^2]. \tag{91}$$

Wir beweisen nun, daß für $x > 0$ und $\nu \geq 0$ immer

$$H_\nu'(x) < 0 \quad \text{ist}. \tag{92}$$

1. Für $\nu = 0$ ist (92) evident.
2. Ebenso für $\nu > 0$ und $x > \nu$.
3. Es sei $0 < x \leq \nu$.

Wir setzen $J_\nu(x) = x^\nu \cdot \Phi_\nu(x)$; dann ist $x \cdot J_\nu' = \nu \cdot J_\nu + x^{\nu+1} \cdot \Phi_\nu'$. Unter Benützung von (85) ergibt sich:

$$\nu \cdot J_\nu = x \cdot J_\nu' + x^{\nu+2} \cdot \Phi_{\nu+1}. \tag{93}$$

Aus (88), (87) und (86) folgt, daß für $0 < x \leq \nu$

$$\Phi_{\nu+1} > 0 \quad \text{und} \quad J_\nu' > 0 \quad \text{ist}.$$

Also ergibt sich aus (93):

$$\nu^2 J_\nu^2 > x^2 \cdot J_\nu'^2 \quad \text{für} \quad 0 < x \leq \nu.$$

Daraus folgt weiterhin

$$-\frac{1}{x} \cdot J_\nu'^2 > -\frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2;$$

$$J_\nu \cdot J_\nu' - \frac{1}{x} \cdot J_\nu'^2 + \frac{\nu^2 - x^2}{x^2} \cdot J_\nu \cdot J_\nu' > \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu \cdot J_\nu' - \frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2.$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung (76) ergibt sich daraus:

$$2 \cdot J_\nu J_\nu' + 2 J_\nu' \cdot J_\nu'' > 2 \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu \cdot J_\nu' - 2 \frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2.$$

Wenn nun $0 < a_1 < a_2 < b \leq \nu$ ist, folgt daraus:

$$\int_{a_2}^{b} (2 J_\nu J_\nu' + 2 J_\nu' J_\nu'')\, dx > \int_{a_2}^{b} \left(2 \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu J_\nu' - 2 \frac{\nu^2}{x^3} \cdot J_\nu^2\right) dx;$$

also

$$[J_\nu^2 + J_\nu'^2]_{a_2}^{b} > \left[\frac{\nu^2}{x^2} J_\nu^2\right]_{a_2}^{b}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt:

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=b} > \left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} J_\nu^2\right)_{x=a_2}. \tag{94}$$

Analog erhalten wir

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=a_2} > \left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=a_1}. \tag{95}$$

Auf der rechten Seite dieser Ungleichung lassen wir $a_1 \to 0$ gehen und verwenden (83) und (85); so erhalten wir

$$\lim_{x \to 0} \left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (2\nu \cdot x^{2\nu+1} \cdot \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu' + x^{2\nu+2} \cdot \Phi_\nu'^2)$$

$$= \lim_{x \to 0} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (-2\nu \cdot x^{2\nu+2} \cdot \Phi_\nu \cdot \Phi_{\nu+1} + x^{2\nu+4} \Phi_{\nu+1}^2) = 0 \quad (\text{da} \quad \nu > 0).$$

Aus (95) und (94) ergibt sich vermittels dieses Grenzübergangs zunächst

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=a_2} \geq 0; \quad \text{und dann}$$

$$\left(J_\nu^2 + J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \cdot J_\nu^2\right)_{x=b} > 0. \tag{96}$$

Ersetzen wir b durch x, so besagt (96), daß

$$H_\nu'(x) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leq \nu.$$

Nach S. 441 gilt somit allgemein, daß

$$H_\nu'(x) < 0 \quad \text{ist für} \quad \nu \geq 0 \quad \text{und} \quad x > 0.$$

Beachten wir dazu noch (90), so können wir schließen, daß $H_\nu(x)$ eine monoton abnehmende Funktion von x ist, die in jedem der Bereiche $x_\mu(\nu) \leq x \leq x_{\mu+1}(\nu)$ $(\mu = 1; 2; \ldots)$ von $+\infty$ nach $-\infty$ läuft und dabei jeden Wert speziell auch die Werte $-\zeta R$ und 0 genau einmal erreicht, und zwar den größeren zuerst. Damit ist Absatz a) unseres Hilfssatzes I bewiesen.

b) Auch im Bereich $0 < x \leq x_1(\nu)$ ist $H_\nu(x)$ eine monoton abnehmende Funktion von x. Ferner ist

$$\lim_{x \to x_1(\nu)-0} H_\nu(x) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to 0} H_\nu(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\nu \cdot x^\nu \cdot \Phi_\nu + x^{\nu+1} \cdot \Phi_\nu'}{x^\nu \cdot \Phi_\nu} = \nu. \tag{97}$$

Also hat die Gleichung $H_\nu(x) = -\zeta R$, die gleichbedeutend mit (12) ist, dann und nur dann eine Lösung Λ_1 im Bereich $0 < x < x_1(\nu)$, wenn $\nu > -\zeta R$ ist. Damit ist Absatz b) des Hilfssatzes I bewiesen.

c) Um die rein imaginären Lösungen von (12) zu erhalten, setzen wir $x = i \cdot \xi$. Wir können uns dann auf nicht negative, reelle Werte von ξ beschränken. Eine Differentiation nach ξ bezeichnen wir mit $\dot{}$, eine nach x mit $'$; also

$$\frac{df}{dx} = f'; \quad \frac{df}{d\xi} = \dot{f}.$$

Es ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{i} \frac{df}{d\xi}.$$

Wir setzen wieder $J_\nu = x^\nu \cdot \Phi_\nu(x)$, dann gilt

$$x \cdot \Phi_\nu'' + (2\nu + 1) \cdot \Phi_\nu' + x \cdot \Phi_\nu = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\xi \cdot \Phi_\nu'' + (2\nu + 1) \cdot \Phi_\nu' - \xi \Phi_\nu = 0. \tag{98}$$

Die Reihenentwicklung für Φ_ν lautet (84):

$$\Phi_\nu(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)} \cdot \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m}, \tag{99}$$

$\Phi_\nu(\xi)$ ist also eine stets positive, monoton wachsende Funktion von ξ; dasselbe gilt von sämtlichen Ableitungen nach ξ, mit der einzigen Einschränkung, daß die ungeraden Ableitungen für $\xi = 0$ verschwinden. Nun ist:

$$H_\nu(x) = \frac{x \cdot J_\nu'(x)}{J_\nu(x)} = \nu + \frac{x \cdot \Phi_\nu'}{\Phi_\nu} = \nu + \frac{\xi \dot{\Phi}_\nu}{\Phi_\nu}, \tag{100}$$

$$\frac{d}{d\xi} H_\nu = \frac{1}{\Phi_\nu^2} \cdot (\Phi_\nu \cdot \dot{\Phi}_\nu + \xi \Phi_\nu \cdot \dot{\Phi}_\nu' - \xi \dot{\Phi}_\nu^2)$$

$$= \frac{1}{\Phi_\nu^2} \cdot (\xi \Phi_\nu^2 - 2\nu \Phi_\nu \dot{\Phi}_\nu - \xi \dot{\Phi}_\nu^2) \quad [\text{nach (98)}].$$

Wir wollen nun zeigen, daß für $\xi > 0$ immer

$$\Psi(\xi) = \xi \Phi_\nu^2 - 2\nu \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu' - \xi \Phi_\nu'^2 > 0 \quad \text{ist.} \tag{101}$$

Auf Grund der Reihenentwicklung (99) erhält man als erstes Glied der Reihenentwicklung von $\Psi(\xi)$

$$\Psi(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \left(\frac{1}{\Gamma^2(\nu+1)} - \frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\cdot\Gamma(\nu+2)} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \xi + \xi^2 \cdot (\cdots)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\cdot\Gamma(\nu+2)} \cdot \xi + \xi^2 \cdot (\cdots).$$

Es gilt also (101) jedenfalls für kleine ξ. Nehmen wir nun an, die Ungleichung (101) gilt nicht für alle $\xi > 0$, dann muß es ein $\xi_0 > 0$ geben, so daß

(102a) für $\xi = \xi_0$ 1. $\Psi(\xi_0) = 0$;

(102b) 2. $\left(\frac{d}{d\xi}\Psi(\xi)\right)_{\xi=\xi_0} \leq 0$ ist.

Mit Hilfe von (98) erhält man

$$\frac{d}{d\xi}\Psi'(\xi) = \frac{2\nu+1}{\xi}\left(2\nu \Phi_\nu \cdot \Phi_\nu' + \xi \cdot \Phi_\nu'^2 - \frac{2\nu-1}{2\nu+1}\xi \Phi_\nu^2\right).$$

An der Stelle $\xi = \xi_0$ ist nach (102a) und (101)

$$2\nu \Phi_\nu \Phi_\nu' + \xi_0 \Phi_\nu'^2 = \xi_0 \Phi_\nu^2.$$

Daraus ergibt sich, daß an $\xi = \xi_0$

$$\frac{d}{d\xi}\Psi(\xi_0) = \frac{2\nu+1}{\xi_0}\xi_0 \Phi_\nu^2 \cdot \left(1 - \frac{2\nu-1}{2\nu+1}\right) = 2 \cdot \Phi_\nu^2 > 0$$

im Widerspruch zu (102b). Also ist für $\xi > 0$ immer $\Psi(\xi) > 0$. Das heißt: Es ist

$$\frac{d}{d\xi} H_\nu > 0, \quad \text{wenn} \quad \xi > 0. \tag{103}$$

Nun ist nach (97) bzw. (100)

$$\lim_{\xi \to 0} H_\nu = \nu. \tag{104}$$

Ferner ist

$$\lim_{\xi \to \infty} H_\nu = \infty. \tag{105}$$

Aus (103), (104) und (105) folgt, daß für $\xi > 0$ $H_\nu > \nu$ ist und jeden Wert, der größer als ν ist, genau einmal annimmt. Damit ist Absatz c unseres Hilfssatzes I bewiesen.

§ 11.

Hilfssatz II. *Es gibt eine positive Zahl C, die nur von ζR abhängt, so daß*

$$|J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))| \geq C \cdot |J_\nu(X_\mu(\nu))| \tag{106}$$

ist für alle μ und $\nu \geq 0$, für die nicht gleichzeitig $\mu = 1$ und $\nu \leq \operatorname{Max}(2; -2\zeta R)$ ist.

Es lassen sich verschiedene Abschätzungen für C geben; beispielsweise kann

$$C = \operatorname{Min}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\zeta R|};\ \frac{1}{1+\frac{2\zeta^2 R^2}{2{,}4^2}}\right)$$

gesetzt werden.

Für C lassen sich auch Ausdrücke aufstellen, in denen μ und ν vorkommt. Nach (108) und (111) ist z.B.

$$|J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))| > \frac{1}{1+\frac{8\zeta^2 R^2}{\mu^2+4\mu\nu}} \cdot |J_\nu(X_\mu(\nu))|$$

für $\mu \geq 2$ und $\nu \geq \nu_0$, wobei $\nu_0 > 0$, aber sonst beliebig, ist. Man sieht, daß *für großes μ und $\nu \geq \nu_0$ oder für großes ν und $\mu \geq 2$* $\frac{|J_\nu(\Lambda_\mu)|}{|J_\nu(X_\mu)|} \sim 1$ *ist.*

Beweis.

I. Es sei $\nu > 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R > 0$ und $J_\nu(x) > 0$ für $X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu$.

Dann ist für $X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu$ nach (90) und (92):

$$0 \geq \frac{x \cdot J'_\nu}{J_\nu} \geq -\zeta R; \quad \text{also} \quad \frac{-\zeta R}{x} \leq \frac{J'_\nu}{J_\nu}.$$

Daraus folgt durch Integration von X_μ bis Λ_μ:

$$-\zeta R \lg \frac{\Lambda_\mu}{X_\mu} \leq \lg \frac{J_\nu(\Lambda_\mu)}{J_\nu(X_\mu)};$$

also

$$J_\nu(\Lambda_\mu) \geq \left(\frac{X_\mu}{\Lambda_\mu}\right)^{\zeta R} \cdot J_\nu(X_\mu). \tag{107}$$

Nun ist für $\nu > 0$, $\mu \geq 2$ [3; S. 219f., Gl. (C), (E) und (M)]:

$$\pi\mu - \frac{3\pi}{2} + \nu < x_{\mu-1} < X_\mu < \Lambda_\mu < \pi\mu + \frac{\pi}{2}\nu. \tag{108}$$

Daraus erhält man (wegen $\mu \geq 2$)

$$\frac{X_\mu}{\Lambda_\mu} \geq \frac{\pi\mu - \frac{3\pi}{2} + \nu}{\pi\mu + \frac{\pi}{2}\nu} \geq \frac{\frac{\pi}{2} + \nu}{2\pi + \frac{\pi}{2}\nu} \geq \frac{1}{4}; \tag{109}$$

also

$$J_\nu(\Lambda_\mu) \geq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{\zeta R} \cdot J_\nu(X_\mu).$$

II. Ganz analog läßt sich für die Fälle:

1. $\nu > 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R > 0$; $J_\nu(x) < 0$,
2. $\nu > 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R < 0$; $J_\nu(x) > 0$ und
3. $\nu > 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R < 0$; $J_\nu(x) < 0$

beweisen, daß

$$|J_\nu(\Lambda_\mu)| \geq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{|\zeta R|} \cdot |J_\nu(X_\mu)| \quad \text{ist.}$$

III. $\nu > 2;\ \mu = 1;\ \zeta R > 0$.

In diesem Falle ist $0 < X_1(\nu) < \Lambda_1(\nu) < x_1(\nu)$ und für $0 < x < x_1(\nu)$ ist $J_\nu(x) > 0$.

Nun ist $\nu \cdot (\nu + 2) < X_1^2(\nu) < \Lambda_1^2(\nu)$ und $x_1(\nu) < \pi + \frac{\pi}{2}\nu$ [3; (E), (M)].

Daraus ergibt sich:

$$\frac{X_1}{\Lambda_1} > \frac{\nu}{\pi + \frac{\pi}{2}\nu} > \frac{1}{\pi}.$$

Eingesetzt in (107): $J_\nu(\Lambda_1) > \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\zeta R} \cdot J_\nu(X_1)$.

IV. $\nu > \mathrm{Max}\,(2;\ -2\zeta R);\ \mu = 1;\ \zeta R < 0$.

Nach (70) ist

$$\Lambda_1^2 > \nu^2 - \zeta^2 R^2; \quad \text{also} \quad \Lambda_1 > \nu + \zeta R.$$

Somit wird

$$\frac{\Lambda_1}{X_1} > \frac{\nu + \zeta R}{\pi + \frac{\pi}{2}\nu} = \frac{2\nu + 2\zeta R}{2\pi + \pi\nu} > \frac{\nu}{2\pi + \pi\nu} > \frac{1}{2\pi} \quad \text{und}$$

$$J_\nu(\Lambda_1) \geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\zeta R|} \cdot J_\nu(X_1).$$

V. $\nu = 0;\ \mu \geq 2;\ \zeta R > 0$.

Die Abschätzung (108) gilt nur für $\nu > 0$. Man könnte sie wohl durch Stetigkeitsüberlegungen bis $\nu = 0$ ausdehnen; dann würde (109) auch für $\nu = 0$ gelten. Wir wollen aber lieber einen anderen Weg gehen, der auch für $\nu > 0$ anwendbar ist und Abschätzungen anderer Form für C liefert.

(110) Es sei $J_\nu(x) > 0$ für $x_{\mu-1} < x < x_\mu$.

Wir setzen $K_\nu(x) = a \cdot J_\nu + b \cdot x \cdot J_\nu'$; dann ist

$$K_\nu'(x) = a \cdot J_\nu' + b \cdot \frac{\nu^2 - x^2}{x} \cdot J_\nu.$$

Nun ist wegen (90), (92) und (110):

$$x \cdot J_\nu' \geq -\zeta R \cdot J_\nu \quad \text{für} \quad X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu; \quad \text{also}$$

$$K_\nu'(x) \geq \frac{J_\nu}{x} \cdot (-b \cdot (x^2 - \nu^2) - a\,\zeta R) \quad (\text{wenn} \quad a \geq 0).$$

Wählt man nun $a > 0$ und $b < 0$ geeignet, so kann man erreichen, daß

$$K_\nu'(x) > 0 \quad \text{für} \quad X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu.$$

Je nach Wahl von a und b erhält man dann verschiedene Abschätzungen für $\left|\frac{J_\nu(\Lambda)}{J_\nu(X)}\right|$.

Wir setzen beispielsweise: $a = \frac{1}{\zeta R}$ und $b = \frac{-2}{x_{\mu-1}^2(\nu) - \nu^2}$ (NB! $\mu \geq 2$).

Dann wird $K_\nu'(x) > \frac{J_\nu(x)}{x} > 0$ für $X_\mu \leq x \leq \Lambda_\mu$.

Infolgedessen ist $K_\nu(\Lambda_\mu) > K_\nu(X_\mu)$; also

$$a \cdot J_\nu(\Lambda_\mu) + b \cdot J'_\nu(\Lambda_\mu) \cdot \Lambda_\mu > a \cdot J_\nu(X_\mu)$$

und nach (12)

$$(a - b \cdot \zeta R) \cdot J_\nu(\Lambda_\mu) > a \cdot J_\nu(X_\mu)$$

$$\left(\frac{1}{\zeta R} + \frac{2}{x^2_{\mu-1} - \nu^2} \cdot \zeta R\right) \cdot J_\nu(\Lambda_\mu) > \frac{1}{\zeta R} \cdot J_\nu(X_\mu).$$

$$J_\nu(\Lambda_\mu) > \frac{1}{1 + \frac{2}{x^2_{\mu-1}(\nu) - \nu^2} \cdot \zeta^2 R^2} \cdot J_\nu(X_\mu). \tag{111}$$

Hier darf $\nu = 0$ sein. Beachtet man, daß $x_{\mu-1}(0) \geq x_1(0) \approx 2{,}4$ ist [4; S. 166], so erhält man für $\nu = 0$, $\mu \geq 2$; $\zeta R > 0$ und $J_0(x) > 0$, daß

$$C = \frac{1}{1 + \frac{2\,\zeta^2 R^2}{2{,}4^2}}$$

gesetzt werden kann.

VI. Ganz analog ergibt sich die Gültigkeit von (111) auch für die Fälle

1. $\nu = 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R > 0$; $J_0(x) < 0$
2. $\nu = 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R < 0$; $J_0(x) > 0$ und
3. $\nu = 0$; $\mu \geq 2$; $\zeta R < 0$; $J_0(x) < 0$.

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

§ 12.

Hilfssatz III. *q sei irgendeine positive Zahl und ζR sei fest gegeben, jedoch so, daß es keine ganze positive Zahl m gibt, so daß $q\,m = -\zeta R$ ist. Dann gibt es eine positive Zahl k', so daß*

$$|J_{q\,n}(\Lambda_\mu(q\,n))| > \frac{k'}{(q\,n + \mu)^{\frac{1}{6}} \mu^{\frac{1}{3}}} \tag{112}$$

ist für $n = 0; 1; 2; \ldots$; $\mu = 1; 2; 3; \ldots$.

Beweis.

I. Nach Hilfssatz II gibt es eine positive Zahl C, so daß

$$|J_\nu(\Lambda_\mu(\nu))| > C\,|J_\nu(X_\mu(\nu))|,$$

wenn nicht gleichzeitig $\mu = 1$ und $\nu \leq \mathrm{Max}\,(2; -2\zeta R)$ ist. Nun gibt es nur endlich viele Werte $q\,n$, für die $q\,n \leq \mathrm{Max}\,(2; -2\zeta R)$ ist. Ihre Anzahl sei $n_0 + 1$. Setzen wir

$$\mathrm{Min}\left(\left|\frac{J_0(\Lambda_1(0))}{J_0(X_1(0))}\right|; \left|\frac{J_q(\Lambda_1(q))}{J_q(X_1(q))}\right|; \ldots \left|\frac{J_{q\,n_0}(\Lambda_1(q\,n_0))}{J_{q\,n_0}(X_1(q\,n_0))}\right|\right) = C',$$

so ist $C' > 0$ und für $C'' = \mathrm{Min}\,(C; C')$ gilt dann

$$\begin{cases} 1.\ C'' > 0 \\ 2.\ |J_{q\,n}(\Lambda_\mu(q\,n))| \geq C'' \cdot |J_{q\,n}(X_\mu(q\,n))| \\ \quad \text{für} \quad n = 0; 1; 2; \ldots; \mu = 1; 2; 3; \ldots. \end{cases} \tag{113}$$

II. Die $J_\nu(X_\mu(\nu))$ sind die Extremwerte, die die BESSELsche Funktion auf den Wellenbergen bzw. in den Wellentälern annimmt. Für sie gilt, soferne $\nu > \nu_0$ (wir können $\nu_0 = q/2$ setzen) und $x \geq x_1(\nu)$ ist [3; S. 219 (F_2)]:

$$|J_\nu(X_\mu(\nu))| > \frac{k'}{(\nu+m)^{\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{3}}},$$

wobei $k' > 0$ ist und von ν, μ und m nicht abhängt. μ und m hängen so zusammen, daß entweder $\mu = 2m-1$ oder $\mu = 2m$ ist; somit ist $m \leq (\mu+1):2$. Da außerdem $\mu > 1$ ist, ist $m < \mu$. Also

$$|J_{qn}(X_\mu(qn))| > \frac{k'}{(qn+\mu)^{\frac{1}{3}} \mu^{\frac{1}{3}}}. \tag{114}$$

Diese Ungleichung gilt wegen der Voraussetzung „$\nu > \nu_0 = q/2$ und $x > x_1(\nu)$" für $n \geq 1$ und $\mu \geq 2$. Dagegen muß sie für $n = 0$; $\mu \geq 1$ und für $\mu = 1$; $n \geq 1$ noch bewiesen werden.

a) $\mu = 1$; $n \geq 1$.

Es ist $X_1(\nu) > \nu$. Da $J'_\nu(x) > 0$ ist für $0 < x < X_1(\nu)$, ist $J_\nu(X_1(\nu)) > J_\nu(\nu)$. Nun ist $\nu^{\frac{1}{3}} \cdot J_\nu(\nu)$ eine monoton wachsende beschränkte Funktion von ν, die für $\nu > 0$ positiv ist [7; S. 260]; somit ist bei geeigneter Wahl von $k' > 0$ für $n \geq 1$

$$J_{qn}(X_1(qn)) > J_{qn}(qn) > \frac{1}{(qn)^{\frac{1}{3}}} \cdot J_{q/2}\left(\frac{q}{2}\right) \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \frac{k'}{(qn+1)^{\frac{1}{3}}}. \tag{115}$$

b) $qn = 0$.

Es gilt die asymptotische Entwicklung [2; S. 288]:

$$J_0(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} \sin(x+b) + 0\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{116}$$

Daraus folgt, daß bei geeigneter Wahl von M, $k'' > 0$ und $k''' > 0$ für $\mu \geq M$

$$|J_0(X_\mu(0))| > \frac{k''}{\sqrt{x}} > \frac{k'''}{\sqrt{\mu}} \quad \text{ist.}$$

Da die $(M-1)$ Werte $|J_0(X_\mu(0))|$, für die $1 \leq \mu \leq M-1$ ist, alle positiv sind, so läßt sich $k' > 0$ so wählen, daß allgemein für $\mu \geq 1$

$$|J_0(X_\mu(0))| > \frac{k'}{\sqrt{\mu}}. \tag{117}$$

Aus (115) und (117) folgt, daß die Ungleichung (114) nicht nur für $n \geq 1$, $\mu \geq 2$ gilt, sondern allgemein für $n = 0; 1; 2; \ldots$ $\mu = 1; 2; 3; \ldots$ bei geeigneter Wahl von $k' > 0$.

III. Durch Zusammenfassung von (114) und (113) ergibt sich der Hilfssatz III.

§ 13. Abschätzung von $\Lambda_\mu^2(qn) + \zeta^2 R^2 - (qn)^2$.

Aus (91) und (92) folgt, daß für $x > 0$ und $\nu \geq 0$ gilt:

$$x^2(J_\nu^2 + J_\nu'^2) - \nu^2 \cdot J_\nu^2 > 0.$$

Setzen wir $\nu = q\,n$, $x = \Lambda_\mu(q\,n)$ und verwenden wir, daß $\Lambda \cdot J'_{q\,n}(\Lambda) = -\zeta R \times J_{q\,n}(\Lambda)$ ist, so erhalten wir daraus:

$$\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > 0 \quad \text{für} \quad \Lambda_\mu(q\,n) > 0.$$

Nach Hilfssatz I sind aber nur die endlich vielen Werte $\Lambda_1(q\,n)$ nicht positiv, für die $q\,n < -\zeta R$ ist.

I. Für $\mu \geq 2$; $n \geq 1$ ist nach (108)

$$\pi\,(\mu - \tfrac{3}{2}) + q\,n < x_{\mu-1}(q\,n) < \Lambda_\mu(q\,n); \quad \text{also} \tag{118}$$

$$\Lambda_\mu(q\,n) > \tfrac{1}{2}\,\mu + q\,n \quad \text{und} \quad \Lambda^2 + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > \tfrac{1}{4}\,\mu\,(\mu + q\,n). \tag{119a, b}$$

II. $\mu = 1$; $q\,n > \begin{cases} 0 \\ -2\zeta R. \end{cases}$

Setzen wir in (71a) $r = R$, so erhalten wir

$$1 = 2 \cdot (q\,n + \zeta R) \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2} > q\,n \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \cdots.$$

Da alle Glieder der Summe positiv sind, folgt daraus

$$\Lambda_1^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > q\,n \geq (q\,n + 1) \cdot c, \tag{119c}$$

wenn $c = \frac{q}{q+1}$ gesetzt wird.

III. $n = 0$; $\mu \geq 2$.

Nach (116) gibt es eine positive Zahl c', so daß

$$\Lambda_\mu(0) > x_{\mu-1}(0) > c' \cdot \mu \quad \text{für} \quad \mu \geq 2. \tag{119d}$$

Faßt man I., II. und III. zusammen, so erhält man: *Es ist*

$$\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2 > c'' \cdot \mu \cdot (\mu + q\,n), \tag{120}$$

wobei $c'' > 0$ ist und von n und μ nicht abhängt, für alle Wertepaare $(\mu; n)$, außer wenn $(\mu; n) = (1; 0)$ oder gleichzeitig $\mu = 1$ und $n < -2\zeta R$ ist. Es sind also nur endlich viele Wertepaare $(\mu; n)$ von der Ungleichung (120) ausgenommen.

§ 14. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihenentwicklungen von $\Delta(r; \varphi; t; \tau)$ und $G(r; \varphi; \tau)$ und ihre gliedweise Differenzierbarkeit.

Auf Grund der Voraussetzungen (17) über $S(\varphi; t)$ und $\partial S/\partial t$ gibt es eine Zahl M, so daß für die Koeffizienten der FOURIERschen Reihenentwicklungen dieser beiden Funktionen nach φ gilt [2; S. 62]:

$$\begin{cases} |A_n(t)| < \frac{M}{(n+1)^3}; & |B_n(t)| < \frac{M}{(n+1)^3}; \\ |A'_n(t)| < \frac{M}{(n+1)^3}; & |B'_n(t)| < \frac{M}{(n+1)^3}; \qquad n = 0; 1; 2; \ldots. \end{cases} \tag{121}$$

Aus (39), (40), (9) und (121) entnimmt man, daß bei geeigneter Wahl von $C_1 > 0$ die Reihe

$$C_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}$$

eine Majorante von $G(r;\varphi;t)$ und $g(r;\varphi;t)$ ist.

Differenziert man die Reihen für G bzw. g gliedweise einmal oder zweimal nach r bzw. zweimal nach φ, so tritt zum allgemeinen Glied der Faktor

$$\frac{q\,n}{r}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{q\,n\,(q\,n-1)}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad n^2.$$

Man sieht, daß für die differenzierten Reihen sich bzw. folgende Majoranten ergeben:

$$\frac{1}{r} \cdot (q\,C_1) \sum \frac{1}{(n+1)^3}; \quad \frac{1}{r^2}\,(q^2\,C_1) \sum \frac{1}{(n+1)^2}; \quad C_1 \cdot \sum \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Daraus folgt, daß die gliedweise differenzierten Reihen für $r \geq r_0$ absolut und gleichmäßig konvergieren, wobei $r_0 > 0$ sein muß, aber beliebig nahe an 0 liegen darf; d.h. die gliedweise Differentiation ist gestattet in der Umgebung jedes Wertes $r > 0$.

Setzen wir $\Delta(r;\varphi;t;\tau) = \sum_{\substack{n=0 \\ \mu=1}}^{\infty} d_{n\mu}(r;\varphi;t;\tau)$, so ist nach (74)

$$(122)\quad d_{n\mu} = 2R\left(A'_n(\tau)\cos n\varphi + B'_n(\tau)\cdot\sin n\varphi\right) \frac{J_{qn}\left(\Lambda_\mu(q\,n)\,\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda_\mu^2}{k\,R^2}}}{J_{qn}(\Lambda_\mu(q\,n))\,(\Lambda_\mu^2(q\,n) + \zeta^2 R^2 - (q\,n)^2)}.$$

Für $\nu \geq 0$, $x \geq 0$ ist die BESSELsche Funktion beschränkt, so daß wir

$$(123)\qquad |J_\nu(x)| < K$$

setzen können.

Auf Grund der Ungleichungen (121), (123), (120) und (112) gilt nun mit nur endlich vielen Ausnahmen, die durch die beschränkte Gültigkeit von (120) bedingt sind:

$$|d_{n\mu}| < \frac{4RM}{(n+1)^3} \cdot \frac{K\,(q\,n+\mu)^{\frac{1}{2}}\,\mu^{\frac{1}{2}}}{k' \cdot c''\,(\mu + q\,n)\,\mu}$$

$$< C_2 \cdot \frac{1}{(n+1)^3\,(q\,n+\mu)^{\frac{1}{2}}\,\mu^{\frac{1}{2}}} \leq C_2 \cdot \frac{1}{(n+1)^3 \cdot \mu^{\frac{3}{2}}}.$$

Da diese Ungleichung nur für endlich viele $d_{n\mu}$ nicht gilt und diese beschränkt sind, kann man durch Änderung von C_2 erreichen, daß sie allgemein gilt. Die neue Konstante heiße C'. Es ist dann

$$\sum_{\substack{n=0 \\ \mu=1}}^{\infty} \frac{C'}{(n+1)^3\,\mu^{\frac{3}{2}}} = C' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante von $\Delta(r;\varphi;t;\tau)=\sum d_{n\mu}$. Da diese Majorante konvergiert, konvergiert $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ absolut und gleichmäßig.

Daraus folgt, daß bei der Berechnung von

$$\delta(r;\varphi;t)=-\int_{t_0}^{t}\Delta(r;\varphi;t;\tau)\,d\tau$$

die Reihe für $\Delta(r;\varphi;t;\tau)$ gliedweise nach τ integriert werden darf, so daß

$$\delta(r;\varphi;t)=-2R\sum\sum\frac{J_{qn}\left(\frac{r}{R}\Lambda_\mu(qn)\right)}{J_{qn}(\Lambda_\mu(qn))\cdot(\Lambda_\mu^2+\zeta^2R^2-(qn)^2)}\times$$

$$\times\left(\cos n\varphi\int_{t_0}^{t}A_n'(\tau)\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}}d\tau+\sin n\varphi\cdot\int_{t_0}^{t}B_n'(\tau)\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda_\mu^2(qn)}{kR^2}}d\tau\right)$$

gesetzt werden kann.

Nach (121) ist

$$\int_{t_0}^{t}A_n'(\tau)\cdot e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}d\tau<\frac{M}{(n+1)^3}\cdot\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{(t-\tau)\cdot\Lambda^2}{kR^2}}d\tau$$

$$=\frac{Mk R^2}{(n+1)^3\Lambda^2}\left(1-e^{-\frac{(t-t_0)\Lambda^2}{kR^2}}\right)<\frac{Mk\cdot R^2}{(n+1)^3\Lambda^2}.$$

Ebenso gilt:

$$\left|\int_{t_0}^{t}B_n'(\tau)\,e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}d\tau\right|<\frac{Mk R^2}{(n+1)^3\Lambda^2}.$$

Aus den Ungleichungen (119a), (119c) und (119d) kann man schließen, daß

$$\Lambda_\mu(qn)>c_2\cdot(qn+\mu),\quad\text{wobei}\quad c_2>0,$$

für alle Wertepaare $(n;\mu)$ außer wenn $(\mu;n)=(1;0)$ und wenn gleichzeitig $\mu=1$ und $qn<-2\zeta R$ ist.

Es ist also bei geeigneter Wahl von $C_3>0$ die Reihe

$$(124)\qquad C_3\cdot\sum\sum\frac{1}{(n+1)^3(qn+\mu)^{2+\frac{3}{2}}\mu^{\frac{3}{2}}}<C_3\sum\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\sum\frac{1}{\mu^{3+\frac{1}{2}}}$$

eine Majorante von $\delta(r;\varphi;t)$.

Differenziert man $\delta(r;\varphi;t)$ einmal bzw. zweimal gliedweise nach r, so tritt an Stelle von $J_{qn}\left(\frac{r}{R}\cdot\Lambda\right)$ jeweils $\frac{\Lambda}{R}\cdot J_{qn}'\left(\frac{r}{R}\cdot\Lambda\right)$ bzw. $J_{qn}''\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{\Lambda^2}{R^2}$. Nun ist nach (79) und (123)

$$\left|\frac{\Lambda}{R}\cdot J_{qn}'\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)\right|=\frac{\Lambda}{R}\cdot\left|\left(\frac{qn}{\Lambda\frac{r}{R}}J_{qn}-J_{qn+1}\right)\right|<$$

$$<\left(\frac{qn}{r}+\frac{\Lambda}{R}\right)K<c_3\frac{\Lambda}{r}K,\quad\text{wobei}\quad c_3>0.$$

Analog erhält man:

$$\left|\frac{\Lambda^2}{R^2}\cdot J''_{qn}\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)\right| = \left|\frac{\Lambda^2}{R^2}\left(\left(\frac{(qn)^2}{\Lambda^2\frac{r^2}{R^2}}-1\right)\cdot J_{qn}\left(\Lambda\frac{r}{R}\right)-\frac{1}{\Lambda\frac{r}{R}}\cdot J'_{qn}\right)\right|$$

$$< c_4\cdot\frac{\Lambda^2}{r^2}\cdot K, \quad \text{wobei} \quad c_4>0.$$

Das heißt: Für die einmal bzw. zweimal gliedweise nach r differenzierte Reihe $\delta(r;\varphi;t)$ ist

$$\frac{C_4}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{C_5}{r^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante. Da diese Majoranten für $r\geq r_0$, wobei $r_0>0$ sein muß, aber beliebig nahe an 0 liegen darf, gleichmäßig konvergieren, konvergieren die gliedweise differenzierten Reihen für $r\geq r_0$ absolut und gleichmäßig.

Differenziert man die Reihe für $\delta(r;\varphi;t)$ gliedweise zweimal nach φ, so multiplizieren sich die einzelnen Glieder mit $-n^2$ und nach (124) ist

$$\frac{C_3}{q^2}\sum\sum\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante.

Differenziert man die $\delta(r;\varphi;t)$-Reihe gliedweise nach t, so erhält man aus der Ungleichung

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t}A'_n(\tau)e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}d\tau\right| = \left|A'_n(t)-\frac{\Lambda^2}{kR^2}\cdot\int_{t_0}^{t}A'_n(\tau)\,e^{-\frac{(t-\tau)\Lambda^2}{kR^2}}d\tau\right|$$

$$\leq\frac{M}{(n+1)^3}+\frac{\Lambda^2}{kR^2}\cdot\frac{MkR^2}{(n+1)^3\Lambda^2}=\frac{2M}{(n+1)^3},$$

daß die Reihe

$$C_6\sum\sum\frac{(qn+\mu)^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}{\mu(qn+\mu)\cdot(n+1)^3}<C_6\sum\sum\frac{1}{(n+1)^3\mu^{\frac{3}{2}}}$$

eine Majorante ist.

Damit ist gezeigt, daß man für $r>0$ die Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ von $\delta(r;\varphi;t)$ und $g(r;\varphi;t)$ erhält, indem man die Reihen gliedweise differenziert. Aus den Entwicklungen von Kap. I ergibt sich aber, daß die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt sind, wenn die gliedweise Differentiation gestattet ist und die Reihenglieder umgeordnet werden dürfen; dies ist aber wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz gestattet.

Kap. IV. $S(\varphi;t)$ und $f(r;\varphi;t)$ sollen für $-\infty<t<\infty$ periodische Funktionen von t sein.

A. Um unser Ergebnis (22) auf periodische Funktionen $S(\varphi;t)$ übertragen zu können, wollen wir es zunächst etwas erweitern, indem wir folgende Randwertaufgabe stellen.

Die Funktion $f_1(r;\varphi;t)$ soll folgenden Gleichungen genügen:

(125) 1. $$r^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}+r\frac{\partial f_1}{\partial r}+q^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2}=r^2 k\cdot\frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

(126) 2. für $r=0$ soll $f_1(0;\varphi;t)$ endlich und $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=0$ sein.

(127) 3. für $r=R$ soll $\zeta f_1+\frac{\partial f_1}{\partial r}=S_1(\varphi;t)$ sein.

Dabei sei $S_1(\varphi;t)$ eine stetige Funktion von φ und t und eine periodische Funktion von φ. Ferner sei

(128)
a) für $t\leq t_0$ $\qquad S_1(\varphi;t)=S_1(\varphi;t_0)$.

b) Es soll $S_1(\varphi;t)$ dieselben Voraussetzungen (17) erfüllen, die in Kap. II für $S(\varphi;t)$ gemacht wurden, so daß wir

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}=H(\varphi;t) \quad \text{und} \quad S_1(\varphi;t)=S_1(\varphi;t_0)+\int_{t_0}^{t}H(\varphi;\tau)\,d\tau$$

setzen können.

(129) 4. für $t\leq t_0$ sei $f_1(r;\varphi;t)$ von t unabhängig.

Wir bestimmen zunächst eine Funktion $h(r;\varphi)$ aus folgenden Gleichungen:

(130) 1. $$r^2\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+r\frac{\partial h}{\partial r}+q^2\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}=0;$$

(131) 2. für $r=0$ sei $h(r;\varphi)$ endlich und $\frac{\partial h}{\partial \varphi}=0$;

(132) 3. für $r=R$ soll $\zeta\cdot h+\frac{\partial h}{\partial r}=S_1(\varphi;t_0)$ sein.

Setzen wir nun:

(133) $$f_1(r;\varphi;t)-h(r;\varphi)=f(r;\varphi;t); \qquad S_1(\varphi;t)-S_1(\varphi;t_0)=S(\varphi;t),$$

so gelten für $f(r;\varphi;t)$ und $S(\varphi;t)$ die Bedingungen (17), (18), (20) und (21). Eine Lösung für $f(r;\varphi;t)$ erhält man also aus (22).

Entwickeln wir $S_1(\varphi;t_0)$ in eine FOURIERsche Reihe

(134) $$S_1(\varphi;t_0)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\sin\nu\varphi),$$

so erhalten wir

(135) $$h(r;\varphi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{q\nu}(\alpha_\nu\cos\nu\varphi+\beta_\nu\cdot\sin\nu\varphi).$$

Setzen wir in die Beziehung

$$f_1(r;\varphi;t)=h(r;\varphi)+f(r;\varphi;t)$$

den Wert für $f(r;\varphi;t)$ aus (22) ein, so erhalten wir:

(136)
$$f_1(r;\varphi;t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{q\nu}\cdot\big((\alpha_\nu+A_\nu(t))\cos\nu\varphi+(\beta_\nu+B_\nu(t))\sin\nu\varphi\big)$$
$$-2R\sum\sum\cdots.$$

Nun ist für $t \geq t_0$

$$(137)\quad S_1(\varphi;t) = S(\varphi;t) + S_1(\varphi;t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty}[(\alpha_\nu + A_\nu(t))\cos\nu\varphi + (\beta_\nu + B_\nu(t))\sin\nu\varphi].$$

Bezeichnen wir die erste $\sum$ in (136) mit $g_1(r;\varphi;t)$ also

$$g_1(r;\varphi;t) = \sum \frac{1}{\vartheta_\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{q\nu}[(\alpha_\nu + A_\nu(t))\cos\nu\varphi + (\beta_\nu + B_\nu(t))\sin\nu\varphi],$$

so ist $g_1(r;\varphi;t)$ die zu $f_1(r;\varphi;t)$ gehörige stationäre Lösung. Sie erfüllt nämlich die Differentialgleichung

$$(138)\qquad r^2\frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2} + r\frac{\partial g_1}{\partial r} + q^2\frac{\partial^2 g_1}{\partial\varphi^2} = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(139)\quad \begin{cases} \text{a) für } r = 0 \text{ ist } g_1(0;\varphi) \text{ endlich und } \dfrac{\partial g_1}{\partial\varphi} = 0; \\ \text{b) für } r = R \text{ ist } \zeta\cdot g_1 + \dfrac{\partial g_1}{\partial r} = S_1(\varphi;t) \end{cases}$$

mit t als Parameter.

Unsere Formel (22) gilt also auch, wenn die Randbedingungen (18) und (21; 1) durch (128 a) und (129) ersetzt werden.

B. Die Randwertaufgabe (125) bis (129) wollen wir nun spezialisieren, indem wir von $S_1(\varphi;t)$ voraussetzen, daß es für $t \geq t_0$ auch in t eine periodische Funktion ist mit der Periode $2\pi/\omega$. Da die $A'_\nu(\tau)$ und $B'_\nu(\tau)$ nun periodisch sind, ist in (22) die Integration nach $d\tau$ explizit durchführbar. Nachträglich erweitern wir den Periodizitätsbereich von $S_1(\varphi;t)$ nach negativen Werten von t, indem wir $t_0 \to -\infty$ gehen lassen.

Für $t \geq t_0$ gilt:

$$(140)\quad \begin{cases} \alpha_\nu + A_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_{\nu n}\cos n\omega t + \beta_{\nu n}\cdot\sin n\omega t), \\ \beta_\nu + B_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_{\nu n}\cos n\omega t + \delta_{\nu n}\cdot\sin n\omega t) \end{cases}$$

und also

$$(141)\quad \begin{cases} A'_\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\omega\beta_{\nu n}\cos n\omega t - n\omega\alpha_{\nu n}\sin n\omega t), \\ B'_\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\omega\delta_{\nu n}\cos n\omega t - n\omega\gamma_{\nu n}\sin n\omega t). \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (22) ein und integriert man gliedweise, so erhält man lauter Integrale vom Typus:

$$(142)\quad \begin{cases} \int_{t_0}^{t}\cos b\tau\cdot e^{-a(t-\tau)}d\tau \\ \quad = \dfrac{1}{a^2+b^2}[(a\cos bt + b\sin bt) - e^{-a(t-t_0)}(a\cos bt_0 + b\sin bt_0)]; \\ \int_{t_0}^{t}\sin b\tau\cdot e^{-a(t-\tau)}d\tau \\ \quad = \dfrac{1}{a^2+b^2}\cdot[(a\sin bt - b\cos bt) - e^{-a(t-t_0)}(a\cdot\sin bt_0 - b\cdot\cos bt_0)]. \end{cases}$$

Läßt man nun $t_0 \to -\infty$ gehen, so wird

$$(143)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \cos b\tau\, e^{-a(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{a^2+b^2}\,(a\cos bt + b\cdot \sin bt); \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \sin b\tau\cdot e^{-a(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{a^2+b^2}\,(a\cdot \sin bt - b\cdot \cos bt), \end{cases}$$

und zwar konvergieren die Ausdrücke $\frac{|a|+|b|}{a^2+b^2}\, e^{-a(t-t_0)}$ für sämtliche bei uns vorkommende Wertepaare (a, b) *gleichmäßig* nach 0, wenn $\zeta R > 0$.

Um das Resultat in einer übersichtlichen Form zu erhalten, benützen wir die Abkürzungen (13) bis (16) und erhalten mittels (141) und (143) aus (22) die Gl. (24).

Literatur.

[1] Bieberbach: Differentialgleichungen. Berlin 1930. — [2] Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I. Berlin 1931. — [3] Forster: Über das asymptotische Verhalten der Besselschen Funktionen. Math. Z. **54**, 217—253 (1951). — [4] Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen. Leipzig 1948. — [5] Magnus-Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943. — [6] Sommerfeld: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1947. — [7] Watson: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922.

München, Loristr. 30.

(Eingegangen am 1. Oktober 1952.)

THIMM, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 456—480 (1953)

Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung.

Von
WALTER THIMM.

Einleitung.

Es werden Abbildungen analytischer Mannigfaltigkeiten durch meromorphe Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen untersucht. Bei solchen meromorphen Abbildungen gibt es Punkte — sog. Unbestimmtheitspunkte —, denen höher als 0-dimensionale Bildpunktmengen entsprechen. Wir nennen die Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes singulär. Das Problem, die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung zu untersuchen, hat bereits eine längere Geschichte. AUTONNE behandelte in mehreren Arbeiten den Fall eines einzelnen Unbestimmtheitspunktes. In seiner Arbeit [1][1]) behauptet er, daß die Menge der singulären Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes algebraisch sei. Seine Beweise sind jedoch völlig unzureichend. Später tauchte das Problem in Arbeiten auf, die zum Ziele haben, einen lückenhaften Beweis von POINCARÉ über den WEIERSTRASSschen Satz, daß zwischen $n+1$ meromorphen $2n$-fach periodischen Funktionen von n Variablen eine algebraische Relation besteht, zu vervollständigen und diesen Satz zu verallgemeinern. Hierher gehören Arbeiten von BLUMENTHAL [2], OSGOOD ([3], S. 603) und des Verfassers [9]. Alle diese Arbeiten geben jedoch keine Lösung des Problems. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem für einen einzelnen Unbestimmtheitspunkt behandelt. Es wird die Vermutung von AUTONNE bewiesen. Über dieses Ergebnis hinaus wird die Struktur der Menge der singulären Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes aufgeklärt. Es zeigt sich[2]), daß alle singulären Bildpunkte eines Unbestimmtheitspunktes mittels endlich vieler Systeme von Polynomen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

in der Weise erhalten werden, daß die x_λ in die Abbildungsgleichungen eingesetzt werden und danach der Grenzübergang $t \to 0$ ausgeführt wird; dabei sind $a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots, a_{\lambda r}$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ als Variable aufzufassen, die noch bestimmten algebraischen Gleichungen genügen. Die Untersuchungsmethode legt es nahe, die betrachtete meromorphe Abbildung zu gewissen rationalen Abbildungen in Beziehung zu setzen. Daraus fließt eine Reihe von Sätzen

[1]) Vgl. Literaturverzeichnis.

[2]) Vgl. Hauptsatz, Nr. 8.7.

über gemeinsame singuläre Bildpunkte der meromorphen und rationalen Abbildungen. Bei der Ableitung der geschilderten Sätze wird als Raum der Bildpunkte der Raum der Funktionentheorie vorausgesetzt; zum Schluß wird gezeigt, daß die Ergebnisse richtig bleiben, wenn statt dessen der projektive Raum genommen wird.

§ 1. Singuläre Bildpunkte.

1.1. O sei der Punkt des $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x)_n$-Raumes mit den Koordinaten $x_\nu = 0$. Δ sei eine — nicht notwendig irreduzible — analytische Mannigfaltigkeit mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N); \tag{1}$$

φ_ν sei analytisch in O.

Die im Punkte O meromorphen Funktionen

$$z_j = \frac{p_j(x)_n}{q_j(x)_n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{2}$$

(p_j, q_j analytisch in O) bestimmen eine meromorphe Abbildung der Umgebung von O in den $(z)_k$-Raum. Dieser letztere Raum sei der k-dimensionale Raum der Funktionentheorie. Wir setzen überdies voraus:

a) $p_j(0)_n = q_j(0)_n = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

b) $|p_j| + |q_j|$ verschwinde für keinen Wert von j auf den isolierten irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten von Δ identisch.

Fernerhin betrachten wir die meromorphe Abbildung (2) lediglich auf Δ und bezeichnen sie als Abbildung von Δ mit $A_k(\Delta)$.

1.2. Definition I. Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung. Der Punkt (x^0) von Δ heiße *Unbestimmtheitspunkt* von $A_k(\Delta)$, wenn in (x^0) für einen Wert von j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ gleichzeitig $p_j(x^0)$ und $q_j(x^0)$ verschwinden.

Die Unbestimmtheitspunkte von $A_k(\Delta)$ erfüllen eine analytische Mannigfaltigkeit, die durch die Lösung der k Gleichungssysteme $(j = 1, 2, \ldots, k)$

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

$$p_j(x)_n = q_j(x)_n = 0$$

erhalten wird.

1.3. Definition II. $A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Der Punkt $Q = (\zeta)_k$ des $(z)_k$-Raumes heiße *singulärer Bildpunkt* von $A_k(\Delta)$, wenn es eine gegen Q strebende Folge von Bildpunkten von $A_k(\Delta)$ gibt, welche Urbilder auf Δ besitzen, die keine Unbestimmtheitspunkte sind und gegen den Unbestimmtheitspunkt (ξ) von $A_k(\Delta)$ streben. Der Punkt $\{(\xi), (\zeta)\}$ des $\{x, z\}$-Raumes werde als singuläres Punktepaar bezeichnet. Ferner heiße (ζ) singulärer Bildpunkt des Unbestimmtheitspunktes (ξ).

1.4. In dieser Arbeit wird die Menge der singulären Bildpunkte des Nullpunktes 0 untersucht. Den — an sich notwendigen — Zusatz: „des Punktes 0" lassen wir im folgenden weg, da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind.

§ 2. Lokale Eigenschaften der Menge der singulären Bildpunkte.

2.1. Satz 1. *Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung. Die Menge der singulären Bildpunkte ist abgeschlossen und daher kompakt.*

Beweis. Der Satz folgt leicht aus der Kompaktheit des z-Raumes und aus Definition II.

2.2. Satz 2. *Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung. Q sei ein singulärer Bildpunkt. Dann gibt es eine Umgebung $U(Q)$ des Punktes Q und endlich viele im Punkt Q irreduzible analytische Mannigfaltigkeiten*

$$M_1, M_2, \ldots, M_s, \tag{1}$$

die den Punkt Q enthalten, derart, daß jeder singuläre Bildpunkt aus $U(Q)$ zu einer Mannigfaltigkeit M_i gehört.

Jeder Punkt Q' von M_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ ist singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$.

Beweis. 1. Wir dürfen voraussetzen, daß $Q=(\zeta)$ ein endlicher Punkt des (z)-Raumes ist. Falls etwa die Koordinate ζ_ν von Q ∞ ist, ersetze man z_ν durch $z'_\nu = 1/z_\nu$.

2. Wir untersuchen die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x)_n = 0, & \nu = 1, 2, \ldots, N, \quad \text{vgl. Nr. 1.1.} \\ q_j(x)_n z_j - p_j(x)_n = 0, & j = 1, 2, \ldots, k, \end{cases} \tag{2}$$

in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{Q}=\{O, Q\}$. Nach dem zweiten Satz von WEIERSTRASS ([3], S. 104) gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$, derart, daß die Lösungen von (2) in $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$ zu endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten gehören, die den Punkt $\mathfrak{Q}$ enthalten und in diesem Punkte irreduzibel sind. Diejenigen unter diesen Mannigfaltigkeiten, auf denen für keinen Wert von j, $j=1, 2, \ldots, k$, gleichzeitig $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch verschwinden, seien

$$G_1, G_2, \ldots, G_\sigma. \tag{3}$$

Wir setzen voraus, daß keine Mannigfaltigkeit G_i ganz zu einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit der Reihe (3) gehöre. Es muß wenigstens eine Mannigfaltigkeit G_i geben, deren Dimension ≥ 1 ist, da Q singulärer Bildpunkt ist, also nach Definition II in beliebiger Umgebung von $\mathfrak{Q}$ Punktepaare $\{(x^{(\nu)}), (z^{(\nu)})\}$ liegen, welche den Gln. (2) genügen, ohne daß für einen Wert von j zugleich $p_j(x^{(\nu)})$ und $q_j(x^{(\nu)})$ verschwinden.

3. In die Gleichungen der Mannigfaltigkeiten (3) werde $(x)_n=(0)_n$ eingesetzt. Es gibt eine Umgebung $U(Q)$ von Q, derart, daß die auf $(x)_n=(0)_n$ und in $U(Q)$ liegenden Punkte der G_i zu endlich vielen in Q irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeiten gehören. Wir beweisen, daß $U(Q)$ und diese Mannigfaltigkeiten $M_1, M_2, \ldots, M_s$ die im Satz 2 behaupteten Eigenschaften haben.

4. $Q'=(z')$ sei ein singulärer Bildpunkt in $U(Q)$. Nach Definition II gibt es eine Folge $\mathfrak{Q}^{(\nu)}=\{\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}\}$, die gegen den Punkt $\{O, Q'\}$ konvergiert, derart, daß

a) $\alpha^{(\nu)}$ auf Δ liegt,

b) $\beta_j^{(\nu)} = \dfrac{p_j(\alpha^{(\nu)})}{q_j(\alpha^{(\nu)})}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ gilt,

c) für keinen Wert von j zugleich $p_j(\alpha^{(\nu)})$ und $q_j(\alpha^{(\nu)})$ verschwinden.

Fast alle Punkte $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ gehören zu $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$ und liegen daher auf den Mannigfaltigkeiten (3), von denen wenigstens eine unendlich viele Punkte $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ enthalten muß, etwa G_{s_0}. Auch der Grenzpunkt $\{O, Q'\}$ ist dann Punkt von G_{s_0}. Da nun Q' in $U(Q)$ liegt und $\{O, Q'\}$ auch $(x)_n = (0)_n$ befriedigt, muß Q' einer Mannigfaltigkeit (1) angehören.

5. Es sei Q' ein Punkt von M_i in $U(Q)$. Weil M_i im Durchschnitt einer Mannigfaltigkeit G_λ mit $(x)_n = (0)_n$ liegt, gehört $\mathfrak{Q}' = \{O, Q'\}$ wenigstens zu einer Mannigfaltigkeit G_λ. Die Dimension von G_λ ist ≥ 1. Wäre diese Dimension nämlich 0, so müßte G_λ der Punkt $\mathfrak{Q} = \{O, Q\}$ sein. Dieser Punkt liegt aber, wie wir in 2. sahen, auf einer Mannigfaltigkeit G_i mit einer Dimension ≥ 1. Nach unserer Vereinbarung, nur solche Mannigfaltigkeiten in die Reihe (3) aufzunehmen, die keiner höherdimensionalen Mannigfaltigkeit angehören, kann der Punkt $\mathfrak{Q}$ nicht unter den Mannigfaltigkeiten (3) sein. Da für keinen Wert von j $p_j(x)$ und $q_j(x)$ auf G_λ identisch verschwinden, ist jeder Punkt von G_λ Grenzpunkt einer Folge von solchen Punkten, in denen keines dieser k Funktionenpaare verschwindet. Insbesondere gilt das für den Punkt $\mathfrak{Q}'$. Es gibt also eine Folge von Punkten $\mathfrak{Q}^{(\nu)} = \{(x^{(\nu)}), (z^{(\nu)})\}$, die gegen den Punkt $\mathfrak{Q}'$ streben, die zu G_λ gehören, derart, daß für keinen Wert von j zugleich $p_j(x^{(\nu)})$ und $q_j(x^{(\nu)})$ Null sind. Da diese Punkte zu G_λ gehören, lösen sie das Gleichungssystem (2). Es gilt also

$$z_j^{(\nu)} = \frac{p_j(x^{(\nu)})}{q_j(x^{(\nu)})} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

und die Punkte $(x^{(\nu)})$ liegen auf Δ. Daraus folgt nach Definition II, daß Q' singulärer Bildpunkt ist.

2.3. Aus den obigen Beweisschlüssen ziehen wir noch eine Folgerung von grundlegender Bedeutung für die folgenden Überlegungen.

Satz 3. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung.*

1. *$\gamma = (x(t))_n$ sei eine analytische Kurve mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *γ liege ganz auf Δ, d.h. es gelten: $\varphi_\nu(x(t))_n = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, vgl. Nr. 1.1.*

(b) *Für keinen Wert von j seien $p_j(x(t))$ und $q_j(x(t))$ gleichzeitig identisch Null.*

(c) $(x(0))_n = (0)_n$.

Dann existieren die Grenzwerte:

$$\zeta_j = \lim_{t \to 0} \frac{p_j(x(t))}{q_j(x(t))}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Der Punkt $(\zeta)_k$ ist singulärer Bildpunkt.

2. *Jeder singuläre Bildpunkt kann auf die unter 1 beschriebene Weise erhalten werden.*

3. Definition. *Die Kurve γ nennen wir „eine den singulären Bildpunkt $(\zeta)_k$ erzeugende Kurve".*

Beweis. Zu 1. klar. Zu 2. Q sei der singuläre Bildpunkt $(\zeta)_k$. Es sei $\mathfrak{Q}=\{O, Q\}$. Nach dem Beweise von Satz 2 (vgl. Nr. 2.2) gibt es eine Lösungsmannigfaltigkeit G_λ des Gleichungssystems (2), deren Dimension ≥ 1 ist, die $\mathfrak{Q}$ enthält, und auf der für keinen Wert von j zugleich $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch verschwinden. Auf G_λ gibt es daher eine analytische Kurve:

$$x_\mu(t) = t\,x'_\mu(t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$z_\nu(t) = \zeta_\nu + t\,z'_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

auf der für keinen Wert von j zugleich $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch Null sind. Da auf dieser Kurve das Gleichungssystem (2) erfüllt ist, folgen:
(a) $(x(t))_n$ liegt auf Δ.

(b) $$\zeta_\nu + t\,z'_\nu(t) = \frac{p_j(x(t))}{q_j(x(t))} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Also ist $\lim\limits_{t\to 0} z_\nu(t) = \zeta_\nu$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

2.4. Definition III. Es sei Q ein singulärer Bildpunkt der meromorphen Abbildung $A_k(\Delta)$. Wenn es eine analytische Kurve $\gamma = (x(t))_n$ gibt, welche Q im Sinne der Definition in Satz 3 erzeugt und auf der keine der $2k$ Funktionen $p_j(x), q_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ identisch verschwindet, heiße Q *von erster Art*. Falls auf jeder, den Punkt Q erzeugenden analytischen Kurve eine dieser $2k$ Funktionen identisch verschwindet, heiße Q *von zweiter Art*.

§ 3. Anfänge von analytischen Kurven.

3.1. Definition IV. Δ sei eine analytische Mannigfaltigkeit, definiert in einer Umgebung von O durch die Gleichungen

(1) $$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

$\Gamma(r)$ (r positiv ganz) bezeichne ein System von n Polynomen von t

(2) $$x_\lambda = a_{\lambda 1}t + a_{\lambda 2}t^2 + \cdots + a_{\lambda r}t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem ganzzahligen $\varrho \geq r$ gebe es ein System von Polynomen

(3) $$y_\lambda^{(\varrho)} = a_{\lambda r+1}^{(\varrho)} + a_{\lambda r+2}^{(\varrho)}t + \cdots + a_{\lambda\varrho}^{(\varrho)}t^{\varrho-r-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

derart, daß durch Einsetzen der Polynome

(4) $$x_\lambda = a_{\lambda 1}t + a_{\lambda 2}t^2 + \cdots + a_{\lambda r}t^r + t^{r+1}y_\lambda^{(\varrho)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

in die Funktionen $\varphi_\nu(x)_n$ Potenzreihen von t entstehen, die mindestens durch $t^{\varrho+1}$ teilbar sind.

Dann heiße $\Gamma(r)$ *Anfang einer analytischen Kurve auf* Δ.

3.2. Die analytische Kurve γ liege auf Δ und habe die Gleichungen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda \mu} t^\mu + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Für jeden Wert von r ($r \geq 1$) bestimmt das System von n Polynomen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den Anfang einer analytischen Kurve auf Δ.

3.3. Die Rechtfertigung der Definition IV liegt in dem folgenden Satz:

Satz 4. *Es sei Δ eine analytische Mannigfaltigkeit. $\Gamma(r)$, $r \geq 1$, sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ und habe die Gleichungen (2). Dann gibt es eine analytische Kurve γ auf Δ, deren Entwicklung folgendermaßen beschrieben werden kann:*

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r-1} t^{r-1} + x_\lambda^* t^r, \tag{5}$$

$$x_\lambda^* = a_{\lambda r} + \tau \varepsilon_{\lambda 1} + \tau^2 \varepsilon_{\lambda 2} + \cdots + \tau^\mu \varepsilon_{\lambda \mu} + \cdots, \tag{6}$$

$$t = \varepsilon_1 \tau + \varepsilon_2 \tau^2 + \cdots + \varepsilon_\mu \tau^\mu + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Dabei sind (6) *und* (7) *konvergente Potenzreihen von τ. Es ist $t \not\equiv 0$.*

Beweis. 1. Wir setzen die Entwicklungen (5) in die Funktionen (1) ein:

$$\varphi_\nu'(t, (x^*)_n) = t^{\sigma_\nu} \psi_\nu(t, (x^*)_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Dabei sei σ_ν so gewählt, daß ψ_ν für $t = 0$ nicht identisch verschwindet.

$$\psi_\nu(t, (x^*)_n) = \psi_{\nu 0}(x^*)_n + \psi_{\nu 1}(x^*)_n \cdot t + \cdots \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{9}$$

Die Funktionen $\psi_{\nu 0}(x^*)_n$ verschwinden für $\{x_\lambda^* = a_{\lambda r}, \lambda = 1, 2, \ldots, n\}$. Setzen wir nämlich

$$x_\lambda^* = a_{\lambda r} + a_{\lambda r+1}^{(\varrho)} t + \cdots + a_{\lambda \varrho}^{(\varrho)} t^\varrho \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

in die Funktionen (8) ein, so beginnen nach Definition IV die entstehenden t-Entwicklungen mindestens mit $t^{\varrho+1}$, also mit einer beliebig hohen Potenz von t, wenn nur ϱ hinreichend groß gewählt wird. Dieselbe Eigenschaft haben auch die Funktionen (9), woraus ihr Verschwinden für $\{x_\lambda^* = a_{\lambda r}, \lambda = 1, 2, \ldots, n, t = 0\}$ folgt.

2. Wir setzen

$$y_\lambda^* = x_\lambda^* - a_{\lambda r} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

in die Funktionen (9) ein und erhalten die Funktionen

$$\psi_\nu(t, (y^*)_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{12}$$

welche den Relationen

$$\psi_\nu(0, (0)_n) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{13}$$

genügen. Auf die Funktionen (12) wenden wir im Punkte $\{t = 0, (y^*)_n = (0)_n\}$ den Weierstrassschen Vorbereitungssatz an, nachdem wir, falls erforderlich,

die Variablen $(y^*)_n$ einer linearen Transformation unterworfen haben, die also t nicht berührt. Das ist möglich, weil ψ_ν für $t=0$ nicht identisch verschwindet. Wir sehen jedoch davon ab, für die neuen Variablen neue Bezeichnungen einzuführen. Es ist

$$(14) \qquad \psi_\nu\left(t, (y^*)_n\right) = \psi'_\nu\left(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}\right) \cdot \psi''_\nu\left(t, (y^*)_n\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

wobei $\psi''_\nu\left(0, (0)_n\right) \neq 0$ und ψ'_ν ein ausgezeichnetes Pseudopolynom von y_n^* mit der Spitze im Punkte $\{t=0, (y^*)_{n-1}=(0)_{n-1}\}$ ist. Die t-Entwicklungen der Funktionen ψ'_ν beginnen mit einer beliebig hohen Potenz von t, wenn wir für die y_λ^* die folgenden Entwicklungen einsetzen:

$$(15) \qquad y_\lambda^* = t\, y_\lambda^{(\varrho)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

[vgl. Definition IV (3)] und dabei ϱ hinreichend groß wählen.

3. Es handelt sich um die Lösung des Gleichungssystems

$$(16) \qquad \psi'_\nu(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) Die Polynome ψ'_ν haben im Punkte $\{t=0, (y^*)_{n-1}=(0)_{n-1}\}$ einen gemeinsamen Teiler: $\delta\left(y_n^*/t, (y^*)_{n-1}\right)$. Dann sei $(y^*)_{n-1} = \left(y^*(t)\right)_{n-1}$ eine beliebige analytische Kurve durch den Punkt $(0)_{n-1}$. Setzen wir diese (konvergenten!) t-Entwicklungen in δ ein, so können wir aus der Gleichung

$$(17) \qquad \delta\left(y_n^*/t, (y^*(t))_{n-1}\right) = 0$$

y_n^* und t durch eine oder mehrere PUISEUX-Entwicklungen der Gestalten (6) und (7) berechnen, für welche überdies $t \not\equiv 0$ gilt. Damit ist in diesem Falle Satz 4 bewiesen.

(b) Die Polynome ψ'_ν haben keinen gemeinsamen Teiler. Dann bilden wir das KRONECKERsche Resultantensystem der ψ'_ν bezüglich der Variablen y_n^* und erhalten ein Funktionensystem

$$(18) \qquad \chi_\nu\left(t, (y^*)_{n-1}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N_1).$$

Die Funktionen χ_ν sind Linearkombinationen der ψ'_ν mit Koeffizienten, die Polynome der Variablen y_n^* und der Koeffizienten der Polynome ψ'_ν sind (vgl. [6], S. 56). Setzen wir also in die Funktionen χ_ν für $(y^*)_{n-1}$ die Entwicklungen (15) (bei $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$) ein, so beginnen die entstehenden t-Entwicklungen mit beliebig hohen Potenzen von t, wenn nur ϱ hinreichend groß gewählt wird.

4. Es sei

$$\chi_\nu\left(t, (y^*)_{n-1}\right) = t^{\sigma_\nu} \chi'_\nu\left(t, (y^*)_{n-1}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N_1),$$

wobei σ_ν so bestimmt sei, daß χ'_ν für $t=0$ nicht identisch verschwindet. Auch die t-Entwicklungen der χ'_ν beginnen mit beliebig hohen Potenzen von t, wenn (15) eingesetzt wird und nur ϱ genügend groß ist. Daraus folgt, daß die Funktionen χ'_ν für $\{t=0, (y^*)_{n-1}=(0)_{n-1}\}$ verschwinden. Wir wenden

auf sie in diesem Punkte den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz an, wobei wir uns eine eventuell erforderliche lineare Transformation der $(y^*)_{n-1}$ schon ausgeführt denken.

$$(19)\qquad \begin{cases} \chi'_\nu(t,(y^*)_{n-1}) = \chi''_\nu(y^*_{n-1}/t,(y^*)_{n-2})\cdot\chi'''_\nu(t,(y^*)_{n-1}), \\ \chi'''_\nu(0,(0)_{n-1}) \neq 0 \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N_1). \end{cases}$$

Die t-Entwicklungen der Polynome χ''_ν beginnen mit beliebig hohen Potenzen von t, wenn (15) eingesetzt wird und ϱ genügend groß gewählt wurde.

5. Es bestehen wieder die in 3. genannten Möglichkeiten (a) und (b).

(a) Wenn die Polynome χ''_ν einen gemeinsamen Teiler $\delta(y^*_{n-1}/t,(y^*)_{n-2})$ haben, besitzen die Gln. (16) eine Lösungsmannigfaltigkeit, die durch zwei Gleichungen:

$$\Delta_1(y^*_n/t,(y^*)_{n-1}) = 0, \qquad \Delta_2(y^*_{n-1}/t,(y^*)_{n-2}) = 0$$

bestimmt werden kann. Setzen wir in sie für $(y^*)_{n-2}$ konvergente t-Entwicklungen $(y^*)_{n-2} = (y^*(t))_{n-2}$ ein, so können y^*_{n-1}, y^*_n und t durch PUISEUX-Entwicklungen (6) und (7) so bestimmt werden, daß die berechnete analytische Kurve auf der Mannigfaltigkeit von $n-2$-Dimension liegt. Damit ist in diesem Falle Satz 4 bewiesen.

(b) Wenn die Funktionen χ''_ν keinen gemeinsamen Teiler besitzen, wird für sie die Schlußweise, die soeben an den ψ'_ν durchgeführt wurde, wiederholt. Falls bei der fortschreitenden Elimination niemals Fall (a) vorkommt, kommen wir nach $n-1$ Schritten zu einem Gleichungssystem:

$$(20)\qquad \omega_\nu(y^*_1/t) = 0 \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N').$$

Dabei sind die ω_ν ausgezeichnete Pseudopolynome von y^*_1 mit der Spitze im Punkte $t=0$. Ersetzen wir y^*_1 in ω_ν durch die entsprechende Reihe (15), so beginnt die entstehende t-Entwicklung mit einer beliebig hohen Potenz von t, wenn nur ϱ groß genug ist. Das Resultantensystem der Polynome ω_ν ist ein System von Funktionen $\vartheta_\nu(t)$. Da diese Funktionen auch mit beliebig hohen Potenzen von t beginnen, sind sie $\equiv 0$. Daher haben die Polynome (20) einen gemeinsamen Teiler im Punkte $\{t=0,\ y^*_1=0\}$. Es gibt also eine analytische Kurve mit einer PUISEUX-Entwicklung, die allen Gln. (20) genügt, woraus sich eine solche bestimmen läßt, die das System (16) befriedigt. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 4. Formale singuläre Bildpunkte.

4.1. Definition V. $A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. $\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ; es sei $r \geq 1$. Setzen wir die Entwicklungen von $\Gamma(r)$ in die Funktionen $p_j(x)$, $q_j(x)$ ein, so entsteht

$$(1)\qquad \begin{cases} p'_j = t^{\alpha_j}(c_{j0} + c_{j1}t + \cdots), & c_{j0} \neq 0 \\ q'_j = t^{\beta_j}(d_{j0} + d_{j1}t + \cdots), & d_{j0} \neq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,k). \end{cases}$$

Wir setzen über $\Gamma(r)$ außerdem voraus, daß alle Zahlen α_j und $\beta_j \leq r$ seien. Dann definieren wir:

(a) Falls $\alpha_j > \beta_j$ ist, sei $\zeta_j = 0$,

(b) falls $\alpha_j = \beta_j$ ist, sei $\zeta_j = \frac{c_{j0}}{d_{j0}}$,

(c) falls $\alpha_j < \beta_j$ ist, sei $\zeta_j = \infty$.

Den Punkt mit den Koordinaten $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ bezeichnen wir als *formalen singulären Bildpunkt* und sagen: $(\zeta)_k$ *wird durch* $\Gamma(r)$ *erzeugt*. Die größte unter den Zahlen α_j, β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ werde *Exponent des formalen singulären Bildpunktes* $(\zeta)_k$ [*bezüglich* $\Gamma(r)$] genannt. Dieser Exponent ist $\leq r$. Wenn es erforderlich ist, den Unterschied der hier eingeführten Begriffe zu den später definierten Begriffen des formalen singulären Bildpunktes und des Exponenten 2. Art hervorzuheben, sollen die obigen Begriffe *von 1. Art* genannt werden.

4.2. Der Punkt Q sei ein singulärer Bildpunkt 1. Art von $A_k(\Delta)$ (vgl. Definition III). γ sei eine Q erzeugende Kurve. Auf γ sei keine Funktion p_j, q_j identisch Null. Setzen wir die Entwicklungen von γ

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda \mu} t^\mu + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

in die Funktionen p_j, q_j ein, so entstehen Potenzreihen

$$p_j(t) = t^{\mu_j}(c_{j0} + c_{j1} t + \cdots),$$
$$q_j(t) = t^{\nu_j}(d_{j0} + d_{j1} t + \cdots) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

für welche stets $c_{j0} d_{j0} \neq 0$ ist. Wie aus den Formeln in Satz 3 folgt, berechnen sich die Koordinaten von Q nach den Vorschriften (a), (b), (c) in Definition V. Die größte der Zahlen μ_j, ν_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ sei ϱ. Nach Abschnitt 3.2 bestimmt das System von n Polynomen

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ. Wird $r \geq \varrho$ gewählt, so ist Q formaler singulärer Bildpunkt und wird durch $\Gamma(r)$ erzeugt. Ein Exponent von Q ist ϱ. Daraus folgt

Satz 5. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Q sei ein singulärer Bildpunkt 1. Art von $A_k(\Delta)$. Dann ist Q formaler singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$ und besitzt als solcher einen (endlichen) Exponenten.*

Bemerkung. Die Zuordnung der Exponenten ist keineswegs eindeutig. Man ersetze in den Entwicklungen von γ t durch t^m, wenn m eine positive ganze Zahl ist; dadurch wird der Exponent mit m multipliziert.

4.3. Wir beweisen die Umkehrung von Satz 5:

Satz 6. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. $(\zeta)_k$ sei ein formaler singulärer Bildpunkt und werde durch $\Gamma(r)$ erzeugt (vgl. Definition V). Dann gibt es eine analytische Kurve γ durch den Punkt 0, die $(\zeta)_k$ im Sinne der Definition*

in Satz 3 erzeugt, so daß $(\zeta)_k$ singulärer Bildpunkt im Sinne der Definition II ist. $(\zeta)_k$ ist außerdem von 1. Art (vgl. Definition III).

Beweis. 1. Wir bestimmen zum Anfang $\Gamma(r)$ nach Satz 4 eine analytische Kurve γ auf Δ, deren Entwicklung durch die Formeln (5), (6), (7) von Nr. 3.3 gegeben wird. Setzen wir die Entwicklungen (5), (6) in eine Funktion $p_j(x)$ ein, so erhalten wir eine Entwicklung nach t und τ

$$p_j' = p_j(t, \tau), \tag{2}$$

die in der Umgebung von $t=0$, $\tau=0$ konvergiert. Entwickeln wir nach Potenzen von t, so wird

$$p_j'(t, \tau) = t^{\alpha_j}(c_{j0} + \tau c_{j0}^1 + \cdots) + t^{\alpha_j+1}(c_{j1} + \tau c_{j1}^1 + \cdots) + \cdots, \qquad c_{j0} \neq 0. \tag{3}$$

Dabei sind α_j und c_{j0} dieselben Zahlen, die nach Einsetzen der Entwicklungen von $\Gamma(r)$ in p_j an diesen Stellen stehen, denn es ist $\alpha_j \leq r$ (vgl. Definition V), und die auf t^r folgenden höheren Glieder der Entwicklungen (5), (6) können die Koeffizienten der t-Potenzen mit einem Exponenten $\leq r$ in der Entwicklung (3) nicht mehr beeinflussen. Dann sei nach (7)

$$t = \varepsilon_\varrho \tau^\varrho + \varepsilon_{\varrho+1} \tau^{\varrho+1} + \cdots, \qquad \varepsilon_\varrho \neq 0. \tag{4}$$

Setzen wir auch noch (4) in (3) ein, so erhalten wir

$$\bar{p}_j(\tau) = \tau^{\alpha_j'}(c_{j0}' + \tau c_{j1}' + \cdots), \qquad c_{j0}' \neq 0. \tag{5}$$

Dabei ist offenbar

$$\alpha_j' = \varrho \alpha_j, \qquad c_{j0}' = c_{j0} \varepsilon_\varrho^{\alpha_j}. \tag{6}$$

Entsprechend berechnen sich die Zahlen β_j' und d_{j0}' durch Einsetzen von (5), (6), (7) in die Funktion $q_j(x)$.

$$\begin{cases} \bar{q}_j(\tau) = \tau^{\beta_j'}(d_{j0}' + \tau d_{j1}' + \cdots), \qquad d_{j0}' \neq 0, \\ \beta_j' = \varrho \beta_j, \qquad d_{j0}' = d_{j0} \varepsilon_\varrho^{\beta_j}. \end{cases} \tag{7}$$

Da alle Zahlen α_j', β_j' $(j = 1, 2, \ldots, k)$ endlich sind, verschwindet keine Funktion $\bar{p}_j(\tau)$, $\bar{q}_j(\tau)$ identisch.

2. Wir beachten jetzt die drei Fälle in Definition V:

(a) Aus $\alpha_j > \beta_j$ folgt $\alpha_j' > \beta_j'$. Dann ist nach Definition II

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{p_j(x(\tau))}{q_j(x(\tau))} = 0 \text{ und nach Definition V } \zeta_j = 0.$$

(b) Aus $\alpha_j = \beta_j$ folgt $\alpha_j' = \beta_j'$. Dann ist nach Definition II

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{p_j(x(\tau))}{q_j(x(\tau))} = \frac{c_{j0}'}{d_{j0}'} = \frac{c_{j0}}{d_{j0}}, \text{ und nach Definition V ist } \zeta_j = \frac{c_{j0}}{d_{j0}}.$$

(c) Aus $\alpha_j < \beta_j$ folgt $\alpha_j' < \beta_j'$. Dann ist nach Definition II

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{p_j(x(\tau))}{q_j(x(\tau))} = \infty, \text{ und nach Definition V ist } \zeta_j = \infty.$$

Die Kurve γ erzeugt also den singulären Bildpunkt $(\zeta)_k$.

4.4. Aufgabe. Es sei Δ eine (nicht notwendig irreduzible) analytische Mannigfaltigkeit mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x_n) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N, \qquad \varphi_\nu \text{ analytisch in } 0. \tag{8}$$

r sei eine positive ganze Zahl ≥ 1. Es sind die Anfänge $\Gamma(r)$ der auf Δ liegenden analytischen Kurven zu berechnen.

§ 5. Ein Eliminationssatz.

5.1. Die folgenden Überlegungen beruhen auf einem Eliminationssatz der Algebra.

Hilfssatz. *Es sei*

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{1}$$

ein Gleichungssystem der folgenden Art: Die Funktionen F_m seien Polynome der $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit Koeffizienten aus einem Ring R, der den Körper der komplexen Zahlen umfasse und homomorphe Abbildungen auf den Körper der komplexen Zahlen zulasse. Dann gibt es ein „Ausnahmeideal" $\mathfrak{i}$ in R und ein „Resultantenideal" $\mathfrak{r}$ in R mit folgenden Eigenschaften: Es sei eine homomorphe Abbildung von R auf den Körper der komplexen Zahlen gegeben, welche $\mathfrak{r}$ auf 0 aber $\mathfrak{i}$ nicht auf 0 abbildet. Sie transformiere das System $\{F_m\}$ in das System $\{\overline{F}_m\}$. Dann besitzt $\{\overline{F}_m\}$ eine Nullstelle $(x^0)_k$ und diese kann — eventuell nach einer nicht ausgearteten homogenen linearen Transformation mit komplexen Koeffizienten $(y)_k = L(x)_k$ — durch Auflösen von lauter regulären Gleichungen (vgl. [7], S. 13) bestimmt werden. Das Ideal $\mathfrak{r}$ kann auch das Nullideal sein. Umgekehrt gilt: Es sei eine homomorphe Abbildung von R auf den Körper der komplexen Zahlen gegeben, die das System $\{F_m\}$ in das System $\{\overline{F}_m\}$ überführe. Das System $\{\overline{F}_m\}$ besitze eine Lösung $(x^0)_k$. Dann wird $\mathfrak{r}$ durch die Homomorphie auf 0 abgebildet.

Beweis. 1. Die nicht ausgeartete lineare Transformation mit komplexen Koeffizienten $(y)_k = L(x)_k$ überführe die Polynome F_m in Polynome F'_m, die regulär bezüglich y_k sind. Die Koeffizienten der höchsten Potenzen von y_k in den Polynomen F'_m sind Elemente von R:

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_A^{(1)}. \tag{2}$$

$\mathfrak{a}_1$ sei das Ideal mit der Basis (2). Wenn $R \to \overline{R}$ eine Homomorphie von R auf den Körper der komplexen Zahlen ist, die das Ideal $\mathfrak{a}_1$ nicht auf 0 abbildet, so werden die Polynome F'_m in Polynome $\overline{F}_m$ überführt, von denen wenigstens eines regulär bezüglich y_k ist.

2. Das KRONECKERsche Resultantensystem der $\{F'_m\}$ bezüglich y_k sei das System

$$G_m(y)_{k-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, M_1). \tag{3}$$

Die Homomorphie $R \to \overline{R}$ überführe $\{G_m\}$ in $\{\overline{G}_m\}$. Weil wenigstens in einem Polynom F'_m der höchste Koeffizient in y_k auf den höchsten Koeffizienten

des Polynomes $\overline{F}_m$ in y_k abgebildet wird, ist $\{\overline{G}_m\}$ Resultantensystem von $\{\overline{F}_m\}$ bezüglich y_k (vgl. [6], S. 56). Ist also $(y')_{k-1}$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\overline{G}_m(y)_{k-1}' = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, M_1), \tag{4}$$

so gibt es wenigstens eine Lösung $\{(y')_{k-1}, y_k'\}$ des Systems

$$\overline{F}_m(y)_k = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, M). \tag{5}$$

Die Umkehrung dazu reicht weiter:

Die Homomorphie $R \to \overline{R}$ überführe $\{F_m\}$ in $\{\overline{F}_m\}$ und $\{G_m\}$ in $\{\overline{G}_m\}$. Ist $(y')_k$ eine Lösung von (5), so erfüllt $(y')_{k-1}$ die Gln. (4).

3. Auf das System $\{G_m\}$ wenden wir die am System $\{F_m\}$ durchgeführten Rechnungen erneut an. Wir gelangen zu einem Resultantensystem $\{H_m(y)_{k-2}\}$ und einem Ideal $\mathfrak{a}_2$ usw. Es können bei fortschreitender Elimination der y_ν zwei Fälle eintreten:

(a) Ein Resultantensystem verschwindet identisch. Ist z.B. $\{H_m\}$ identisch Null, so gibt es zu beliebigem $(y')_{k-2}$ Zahlen y_{k-1}' und y_k', derart, daß $(y')_{k-1}$ (4) und $(y')_k$ (5) lösen. Das Verfahren bricht dann ab; $\mathfrak{r}$ ist das Nullideal.

(b) Nach Elimination aller k Variablen y_ν erhalten wir ein System von Elementen aus R:

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h. \tag{6}$$

Diese erzeugen das Resultantenideal $\mathfrak{r}$.

4. Im Verlaufe der Elimination seien Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ aufgetreten, die für die Regularität der Zwischensysteme $\{F_m\}$, $\{G_m\}, \ldots$ bestimmend sind. Das Ausnahmeideal $\mathfrak{i}$ sei gleich dem Durchschnittsideal: $\mathfrak{i} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$. Mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{r}$ gilt der Hilfssatz.

§ 6. Algebraische Berechnung der Anfänge analytischer Kurven.

6.1. Zur Lösung der in Abschnitt 4.4 formulierten Aufgabe machen wir den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten:

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + \cdots + a_{\lambda r} t^r + b_{\lambda r+1} t^{r+1} + b_{\lambda r+2} t^{r+2} + \cdots \quad (\lambda = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Für das System von Unbestimmten $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{n\nu}$ gebrauchen wir zur Abkürzung das Symbol $\mathfrak{a}_\nu$, entsprechend werde das System $b_{1\nu}, b_{2\nu}, \ldots, b_{n\nu}$ mit $\mathfrak{b}_\nu$ bezeichnet. Setzen wir die Entwicklungen (1) in die linken Seiten der Gleichungen von Δ

$$\varphi_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

ein, so erhalten wir (formale) Potenzreihen von t:

$$\begin{cases} \varphi_\nu^*(t) = P_{\nu 1}(\mathfrak{a}_1) \cdot t + P_{\nu 2}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)\, t^2 + \cdots + P_{\nu r}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)\, t^r + \\ + P_{\nu r+1}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1})\, t^{r+1} + \cdots + P_{\nu m}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m)\, t^m + \cdots. \end{cases} \tag{3}$$

$P_{\nu m}$ ist ein Polynom der Variablen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m$ mit komplexen Zahlenkoeffizienten. Mit T_m werde dasjenige Gleichungssystem bezeichnet,

das durch Nullsetzen der Koeffizienten von $t, t^2, \ldots, t^m$ entsteht:

$$T_m: \quad P_{\nu s} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

6.2. Um bestimmte Schlüsse nicht wiederholen zu müssen, werde eine Vereinbarung über die Bezeichnung getroffen. Es sei R der Ring der Polynome von $a_1, \ldots, a_r$ mit Koeffizienten aus dem Körper der komplexen Zahlen. Ist $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ ein Primideal des Ringes R, so sei $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta} = R/\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$. Ersetzen wir die linken Seiten der Gleichungen von T_m durch ihre Restklassen mod $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$, so entstehe das System $T_m(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$. Ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$, so bedeutet die Substitution $a_1 = a_1^0, a_2 = a_2^0, \ldots, a_r = a_r^0$ eine relationstreue Spezialisierung der allgemeinen Nullstelle von $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ und bewirkt eine Homomorphie des Ringes $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ auf den Körper der komplexen Zahlen. Wenden wir diese Homomorphie auf ein Ideal $\mathfrak{i}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ in $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ oder auf das System $T_m(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$ an, so werde das Ergebnis durch Überstreichen gekennzeichnet, also $\bar{\mathfrak{i}}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ bzw. $\bar{T}_m(\alpha, \beta, \ldots, \vartheta)$.

6.3. Wir fassen das System T_r ins Auge. Die Lösungen von T_r erfüllen endlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten, von denen jede durch ein Primärideal des Ideals $(P_{\nu s}, s = 1, \ldots, m, \nu = 1, \ldots, N)$ im Ring R bestimmt wird. Die zugehörigen Primideale seien $\mathfrak{p}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, h$. Nun sei $m > r$ eine fest gewählte positive ganze Zahl. Das System T_m enthält außer den Gleichungen von T_r noch Gleichungen in den Variablen $a_1, \ldots, a_r$, $b_{r+1}, \ldots, b_m$. Ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0, b_{r+1}^0, \ldots, b_m^0\}$ eine Lösung von T_m, so ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ Nullstelle wenigstens eines Ideals $\mathfrak{p}_\alpha$. Auf das System $T_m(\alpha)$ (vgl. 6.2) wenden wir den Hilfssatz des § 5 an, indem $b_{r+1}, \ldots, b_m$ die Rolle der dort mit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bezeichneten Variablen übernehmen. Es gibt danach im Ring R_α (vgl. 6.2) ein Resultantenideal $\mathfrak{r}_m^{(\alpha)}$ und ein Ausnahmeideal $\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ und gilt für diese sowohl $\bar{\mathfrak{r}}_m^{(\alpha)} = 0$ wie $\bar{\mathfrak{i}}_m^{(\alpha)} \neq 0$, so gibt es ein Lösungssystem $\{b_{r+1}^0, \ldots, b_m^0\}$ von $\bar{T}_m(\alpha)$ (vgl. 6.2).

(b) Ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0, b_{r+1}^0, \ldots, b_m^0\}$ eine Lösung von T_m und $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$, so gilt für diese $\bar{\mathfrak{r}}_m^{(\alpha)} = 0$.

6.4. Lassen wir jetzt m von $r+1$ an wachsen, so erhalten wir Folgen von Resultantenidealen und von Ausnahmeidealen:

$$\mathfrak{r}_{r+1}^{(\alpha)}, \qquad \mathfrak{r}_{r+2}^{(\alpha)}, \ldots, \tag{5}$$

$$\mathfrak{i}_{r+1}^{(\alpha)}, \qquad \mathfrak{i}_{r+2}^{(\alpha)}, \ldots. \tag{6}$$

Dann sei $\mathfrak{q}_m^{(\alpha)}$ das Vereinigungsideal

$$\mathfrak{q}_m^{(\alpha)} = \mathfrak{r}_{r+1}^{(\alpha)} \cup \mathfrak{r}_{r+2}^{(\alpha)} \cup \ldots \cup \mathfrak{r}_m^{(\alpha)}.$$

Die Ideale $\mathfrak{q}_m^{(\alpha)}$ bilden eine Teilerkette im Ring R_α. Nun gilt in R_α der Teilerkettensatz (vgl. [5], S. 23, 26). Es gibt also eine Zahl M derart, daß

$$\mathfrak{q}_m^{(\alpha)} = \mathfrak{q}_M^{(\alpha)} \quad \text{für} \quad m \geq M. \tag{7}$$

Wir setzen $\mathfrak{q}_M^{(\alpha)} = \mathfrak{q}_\alpha$ und erhalten folgende Ergebnisse:

(a) Ist $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ und gilt für diese $\bar{q}_\alpha = 0$ und $\bar{i}_m^{(\alpha)} \neq 0$ für alle $m \geq r+1$, so besitzt jedes System $T_m(\alpha)$ $(m \geq r+1)$ eine Lösung

$$\{b_{r+1}^{(m)}, \ldots, b_m^{(m)}\}. \tag{8}$$

Denken wir an die Herkunft der Systeme $\overline{T}_m(\alpha)$, so können wir dieses Resultat nach Definition IV folgendermaßen formulieren: Unter den angegebenen Voraussetzungen bestimmt $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ.

(b) Wenn $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist und sich für jeden Wert von m $(m \geq r+1)$ eine Lösung (8) des Systems $\overline{T}_m(\alpha)$ bestimmen läßt, so gilt $\bar{q}_\alpha = 0$; d.h. nach Definition IV: Wenn $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ bestimmt und eine Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist, so gilt für diese $\bar{q}_\alpha = 0$.

(c) $\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ und werde durch $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ bestimmt. Dann ist dieses System Nullstelle wenigstens eines Ideals $\mathfrak{p}_\alpha$.

6.5. Betrachten wir jetzt eines der Ausnahmeideale $\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$. Nach dem 2. Isomorphiesatz (vgl. [7], S. 24) gibt es ein Ideal $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ in R, so daß der Restklassenring $R/\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ isomorph ist dem Restklassenring $R_\alpha/\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$. Ferner ist $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ echter Teiler von $\mathfrak{p}_\alpha$. Das Ideal $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ ist Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen, bestimmt daher endlich viele Primideale. Da die Dimension von $\mathfrak{j}_m^{(\alpha)}$ kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist, ist auch die Dimension jedes der erwähnten Primideale kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_\alpha$. Für jeden Wert von $m \geq r+1$ erhalten wir so endlich viele Primideale in R. Wir numerieren sie fortlaufend $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ $(\beta = 1, 2, \ldots)$ und merken uns, daß die Dimension jedes Ideals $\mathfrak{p}_{\sigma\beta}$ kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_\alpha$ ist.

6.6. Mit jedem Ideal $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ wiederholen wir die Überlegungen, die in 6.3 bis 6.5 mit $\mathfrak{p}_\alpha$ vorgenommen wurden. Das Ergebnis ist: Es gibt im Ring $R_{\alpha\beta}$ ein Ideal $\mathfrak{q}_{\alpha\beta}$ und abzählbar unendlich viele Ideale $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta)}$ $(m \geq r+1)$, welche die Eigenschaften (a) und (b) in 6.4 besitzen (mit $\mathfrak{q}_{\alpha\beta}$ an Stelle von $\mathfrak{q}_\alpha$ und $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta)}$ an Stelle von $\mathfrak{i}_m^{(\alpha)}$). (c) werde durch folgendes Ergebnis ersetzt:

(c') $\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ und werde durch $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$ bestimmt. Dies System sei Nullstelle von $\mathfrak{p}_\alpha$, und es gelte für ein Ausnahmeideal $\bar{\mathfrak{i}}_m^{(\alpha)} = 0$; dann ist es Nullstelle wenigstens eines Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$.

Durch die Ausnahmeideale $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta)}$ werden wie in 6.5 Primideale $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\gamma}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots)$ in R bestimmt. Die Dimension jedes Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\gamma}$ ist kleiner als die Dimension von $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$. Jedes Ideal $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\gamma}$ wird denselben Rechnungen unterworfen; so wird weiter geschlossen. Da sich bei jedem Schritt, der die Hinzufügung eines neuen Index bedeutet, die Dimension der Ideale $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}\ldots$ um wenigstens 1 erniedrigt, kommen wir nach endlich vielen Schritten dieser Art auf Primideale $\mathfrak{p}_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$, deren Dimension 0 ist, die also ein Basissystem aus n r linearen Polynomen besitzen mit einer einzigen Nullstelle $\{a_1^0, \ldots, a_r^0\}$. $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ ist dann isomorph dem Körper der komplexen Zahlen, und zwar wird bei dieser Isomorphie ein Element $f(a_1, \ldots, a_r)$ von $R_{\alpha\beta\ldots\vartheta}$ auf die Zahl $f(a_1^0, \ldots, a_r^0)$

abgebildet. Die Gleichungen von $T_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ haben dann linke Seiten, die Polynome von $\mathfrak{b}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{b}_m$ mit komplexen Koeffizienten sind. Das Ideal $\mathfrak{r}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ ist entweder das Null- oder das Einsideal; das Ideal $\mathfrak{i}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ ist stets das Einsideal. Wenn für jeden Wert von $m \geq r+1$ $\mathfrak{r}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ das Nullideal ist, bestimmt $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ. Wenn wenigstens für einen Wert von m $\mathfrak{r}_m^{(\alpha\beta\cdots\vartheta)}$ das Einsideal ist, gibt es keinen Anfang $\Gamma(r)$ mit diesen Koeffizienten.

6.7. Wir fassen die Ergebnisse der Rechnungen 6.1 bis 6.6 zusammen. Die Menge $\mathfrak{M}^{(r)}$ der Anfänge $\Gamma(r)$ von analytischen Kurven auf Δ wird von abzählbar unendlich vielen Teilmengen $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ überdeckt. $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ wird durch ein Primideal $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ des Ringes R, ein Ideal $\mathfrak{q}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ des Ringes $R^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = R/\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ und abzählbar unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$, des Ringes R folgendermaßen gekennzeichnet: $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ sei die Menge derjenigen Anfänge von analytischen Kurven $\Gamma(r)$ auf Δ, die Nullstellen von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ dagegen keine Nullstellen eines der Ideale: $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$, bestimmen. Es gilt:

(a) Das System $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ sei eine Nullstelle von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ und keine Nullstelle der Ideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Erfüllt es außerdem $\bar{\mathfrak{q}}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = 0$, so bestimmt es den Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ, der dann zu $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ gehört.

(b) Wenn $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ ist und den Anfang einer analytischen Kurve $\Gamma(r)$ auf Δ bestimmt, so gilt $\bar{\mathfrak{q}}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = 0$.

(c) Jeder Anfang einer analytischen Kurve $\Gamma(r)$ auf Δ gehört zu einer Teilmenge $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$.

(d) Die Dimension des Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$ ist kleiner als die Dimension des Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$.

6.8. Für die späteren Untersuchungen ist es nötig, jede Menge $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ noch einmal aufzuteilen. Es gibt im Ring R ein Ideal $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ derart, daß $R^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}/\mathfrak{q}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ isomorph ist dem Restklassenring $R/\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$. Das Ideal $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ werde in Primärkomponenten zerlegt, zu denen die Primideale $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ ($\beta = 1, 2, \ldots$) gehören sollen. $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ sei die Menge derjenigen Anfänge $\Gamma(r)$, die Nullstellen von $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$, dagegen keine Nullstellen eines der Primideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$ ($j = 1, 2, \ldots$) bestimmen. Die Eigenschaften (a), (b), (c) sind nun folgendermaßen zu formulieren:

(a) Ist das System $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$, dagegen keine Nullstelle eines der Ideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$, $j = 1, 2, \ldots$, so bestimmt es einen Anfang $\Gamma(r)$ auf Δ aus $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$.

(b) Wenn das System $\{\mathfrak{a}_1^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ eine Nullstelle von $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ ist und den Anfang einer analytischen Kurve $\Gamma(r)$ auf Δ bestimmt, so ist es Nullstelle eines der Ideale $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$.

(c) Jeder Anfang $\Gamma(r)$ einer analytischen Kurve auf Δ gehört zu einer Menge $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$.

Auch die Menge der $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ ist abzählbar. Es kann vorkommen, daß eine dieser Mengen leer ist, und zwar ist das dann der Fall, wenn $\mathfrak{t}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\beta)$ Teiler eines der Ideale $\mathfrak{p}^r_{\alpha_1\ldots\alpha_s j}$ ($j = 1, 2, \ldots$) ist.

§ 7. Algebraische Berechnung der formalen singulären Bildpunkte.

7.1. Nach Definition V können wir durch Anfänge analytischer Kurven auf Δ vom Typ $\Gamma(r)$ formale singuläre Bildpunkte mit einem Exponenten $\leq r$ erzeugen. Dazu gehören (bei geeignetem r) auch alle singulären Bildpunkte von 1. Art (vgl. Definition III und Satz 5). Wir setzen die Polynome

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

in die Funktionen $p_j(x)$ und $q_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ein und erhalten Potenzreihen von t:

$$\left\{ \begin{aligned} p_j'(t) = {} & t\, g_{j1}(a_1) + t^2 g_{j2}(a_1, a_2) + \cdots + t^i g_{ji}(a_1, a_2, \ldots, a_i) + \cdots + \\ & + t^r g_{jr}(a_1, a_2, \ldots, a_r) + \cdots, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_j'(t) = {} & t\, h_{j1}(a_1) + t^2 h_{j2}(a_1, a_2) + \cdots + t^i h_{ji}(a_1, a_2, \ldots, a_i) + \cdots + \\ & + t^r h_{jr}(a_1, a_2, \ldots, a_r) + \cdots. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Dabei sind g_{ji} und h_{ji} Polynome der durch $a_1, a_2, \ldots, a_i$ bezeichneten Variablen vom Grade $\leq i$.

7.2. Wir berechnen die formalen singulären Bildpunkte mit dem Exponenten r. Derartige Punkte können auf mehrfache Weise gewonnen werden. Jede Möglichkeit wird durch zwei Folgen von k Indizes folgendermaßen gekennzeichnet: $A(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$. Dabei gilt

1. $1 \leq \mu_i \leq r$, $1 \leq \nu_i \leq r$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.
2. Wenigstens eine der Zahlen μ_i oder ν_i ist gleich r.
3. $g_{j1} = 0, g_{j2} = 0, \ldots, g_{j\mu_j - 1} = 0, g_{j\mu_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.
4. $h_{j1} = 0, h_{j2} = 0, \ldots, h_{j\nu_j - 1} = 0, h_{j\nu_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

7.3. Wir fassen die Anfänge analytischer Kurven ins Auge, die zu $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ gehören, und bezeichnen die Menge derjenigen unter ihnen, die formale singuläre Bildpunkte vom Typ $A(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ ergeben, mit $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$. Zur Berechnung dieser Menge dienen die folgenden Bestimmungsgleichungen:

(a) Ist $g^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)\, \varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ eine Basis des Primideals $\mathfrak{k}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$, so bilden wir die Gleichungen

$$g^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)\, \varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots). \tag{4a}$$

$$g_{j1} = 0, \; g_{j2} = 0, \ldots, g_{j\mu_j - 1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{4b}$$

$$h_{j1} = 0, \; h_{j2} = 0, \ldots, h_{j\nu_j - 1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{4c}$$

Die Gln. (4a, b, c) bestimmen endlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten. Die zugehörigen Primideale seien $\mathfrak{q}_\nu$.

7.4. Es werden drei Fälle unterschieden:

1. Das Primideal $\mathfrak{q}_\gamma$ enthält eine der Funktionen $g_{j\mu_j}$, $h_{j\nu_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$.

2. Das Primideal $\mathfrak{q}_\gamma$ enthält eines der abzählbar unendlich vielen Primideale $\mathfrak{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s j}$ $(j=1, 2, \ldots)$; vgl. 6.7.

3. $\mathfrak{q}_\gamma$ erfüllt weder 1. noch 2.

In den ersten beiden Fällen ist $\mathfrak{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\beta)(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ leer.

7.5. Es werde Fall 3 vorausgesetzt. Entsprechend der Definition V des formalen singulären Bildpunktes setzen wir für $j=1, 2, \ldots, k$

(5a) wenn $\mu_j > \nu_j$ ist: $\zeta_j = 0$;

(5b) wenn $\mu_j = \nu_j$ ist: $\zeta_j = \dfrac{g_{j\mu_j}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)}{h_{j\nu_j}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)}$;

(5c) wenn $\mu_j < \nu_j$ ist: $\zeta_j = \infty$.

Es sei M die zum Primideal $\mathfrak{q}_\gamma$ gehörende irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit. Die Gln. (5) bestimmen eine rationale Abbildung

$$\zeta_j = S_j(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r) \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{6}$$

der irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit M. Diese Abbildung bildet M auf eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit M' im $(\zeta)_k$-Raum ab (vgl. [6], S. 140). Wir behaupten:

7.6. *Alle Punkte von M' sind singuläre Bildpunkte.*

Beweis. (a) Wir nennen einen Punkt $\{\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ von M einen gewöhnlichen Punkt, wenn er

1. keine Nullstelle einer Funktion $g_{j\mu_j}, h_{j\nu_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$,

2. keine Nullstelle eines Ideals $\mathfrak{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s j}$ $(j=1, 2, \ldots)$ ist.

(b) Es sei $\{\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0\}$ ein gewöhnlicher Punkt von M. Dann ist $\zeta_j^0 = S_j(\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_r^0)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ ein formaler singulärer Bildpunkt, also nach Satz 6 auch ein singulärer Bildpunkt im Sinne von Definition I.

(c) Wenn M ein einzelner Punkt ist, ist M auch gewöhnlicher Punkt. Wir setzen voraus, daß M kein einzelner Punkt sei und beweisen, daß jeder Punkt von M Grenzpunkt von gewöhnlichen Punkten von M ist. Zunächst beweisen wir diese Behauptung für die endlichen Punkte von M.

P sei ein endlicher Punkt von M und nicht Grenzpunkt von gewöhnlichen Punkten. Es gibt dann eine Umgebung $U(P)$ von P auf M, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U(P)}$ frei von gewöhnlichen Punkten ist. Die Dimension von M sei d. Die Ideale $\mathfrak{q}_\gamma \cup g_{j\mu_j}$, $\mathfrak{q}_\gamma \cup h_{j\nu_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ und $\mathfrak{q}_\gamma \cup \mathfrak{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s j}$ $(j=1, 2, \ldots,)$ bestimmen abzählbar unendlich viele algebraische Mannigfaltigkeiten M_ν, $\nu=1, 2, \ldots$, mit Dimensionen $\leq d-1$, die auf M liegen und alle nicht gewöhnlichen Punkte enthalten. Es sei $M_\nu^* = M_\nu \cap \overline{U(P)}$ $(\nu=1\ 2\ \ldots,)$; M_ν^* ist abgeschlossen in $\overline{U(P)}$. Nach der Definition von $U(P)$ ist dann

$$\overline{U(P)} = \bigcup_\nu M_\nu^*. \tag{6}$$

Wir beweisen: M_ν^* ist nirgends dicht in $\overline{U(P)}$ (vgl. [4], S. 46). Nach Satz 14, loc. cit., genügt es zu beweisen, daß $\overline{U(P)} - M_\nu^*$ dicht in $\overline{U(P)}$ ist. Ist i das zu M_ν gehörende Primideal, so ist i echter Teiler von $\mathfrak{q}_\gamma$. Es gibt also ein Polynom q, welches zu i und nicht zu $\mathfrak{q}_\gamma$ gehört. Nach dem Satz von RITT ist jeder Punkt von M mit $q = 0$ Grenzpunkt yon solchen Punkten von M, in denen $q \neq 0$ ist; d.h. jeder Punkt von M, der zu M_ν gehört, ist Grenzpunkt von solchen Punkten von M, die nicht in M_ν liegen; d.h. $M - M_\nu$ ist dicht in M. Hieraus folgt, daß $\overline{U(P)} - M_\nu^*$ dicht in $\overline{U(P)}$ ist. Also ist M_ν^* nirgends dicht in $\overline{U(P)}$. Die Formel (6) ergibt einen unmittelbaren Widerspruch zum BAIREschen Dichtigkeitssatz (vgl. [4], S. 108). Damit ist bewiesen, daß jeder endliche Punkt von M Grenzpunkt von gewöhnlichen Punkten von M ist. Hieraus folgt dieselbe Behauptung auch für die unendlich fernen Punkte von M (im Raum der Funktionentheorie).

(d) Aus (b) und (c) folgt nun, daß jeder Punkt von M' Grenzpunkt von singulären Bildpunkten ist (vgl. [6], S. 140). Da nach Satz 1 die Menge der singulären Bildpunkte kompakt ist, ist jeder Punkt von M' singulärer Bildpunkt, wie behauptet.

7.7. Die Anzahl der Mengen $\mathfrak{M}^\nu_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ ist abzählbar. Da jede solche Menge endlich viele Primideale $\mathfrak{q}_\gamma$ bestimmt, ist auch die Anzahl der letzteren abzählbar. Es gibt also abzählbar unendlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten $W_\nu^{(r)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Jeder Punkt von $W_\nu^{(r)}$ ist singulärer Bildpunkt.

(b) Jeder formale singuläre Bildpunkt mit dem Exponenten r liegt auf wenigstens einem $W_\nu^{(r)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Lassen wir r alle möglichen Werte ≥ 1 annehmen, so ist die Vereinigungsmenge aller $W_\nu^{(r)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r = 1, 2, \ldots)$ wieder abzählbar. Diese Mannigfaltigkeiten $W_\nu^{(r)}$ enthalten alle (formalen oder im Sinne von Definition II) singulären Bildpunkte 1. Art.

7.8. Wir bestimmen die singulären Bildpunkte 2. Art (vgl. Definition III, Nr. 2.4). Die erzeugenden Kurven derartiger singulärer Bildpunkte bringen eine oder mehrere der Funktionen $p_j(x)$ oder $q_j(x)$ zum identischen Verschwinden, jedoch für keinen Wert von j gleichzeitig p_j und q_j.

Definition VI. $A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung der analytischen Mannigfaltigkeit Δ mit den Gleichungen

$$q_\nu(x)_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{7}$$

$i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ und $h_1, h_2, \ldots, h_\tau$ seien Systeme von verschiedenen positiven ganzen Zahlen, die ≥ 1 und $\leq k$ sind; es gelte auch $i_\mu \neq h_\nu$ für alle μ und ν. Die Gln. (7) und

$$\begin{cases} p_{i_1}(x)_n = 0, & p_{i_2}(x)_n = 0, \ldots, & p_{i_\sigma}(x)_n = 0, \\ q_{h_1}(x)_n = 0, & q_{h_2}(x)_n = 0, \ldots, & q_{h_\tau}(x)_n = 0 \end{cases} \tag{8}$$

bestimmen in der Umgebung des Punktes 0 eine analytische Mannigfaltigkeit Δ_1. Die Vereinigungsmenge derjenigen isolierten, in O irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten von Δ_1, auf denen für keinen Wert von j, $j=1, 2, \ldots, k$, gleichzeitig $p_j(x)$ und $q_j(x)$ identisch verschwinden, sei Δ^*. $\Gamma^*(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ^* (vgl. Definition IV, Nr. 3.1). Es sei $r \geq 1$. Setzen wir die Entwicklungen von $\Gamma^*(r)$ in die Funktionen $p_j(x)$ für $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ und in die Funktionen $q_j(x)$ für $j \neq h_1, h_2, \ldots, h_\tau$ ein, so entstehen:

$$(9) \quad \begin{cases} p_j' = t^{\alpha_j}(c_{j0} + t\,c_{j1} + \cdots), & c_{j0} \neq 0,\ 1 \leq j \leq k,\ j \neq i_1, i_2, \ldots, i_\sigma, \\ q_j' = t^{\beta_j}(d_{j0} + t\,d_{j1} + \cdots), & d_{j0} \neq 0,\ 1 \leq j \leq k,\ j \neq h_1, h_2, \ldots, h_\tau. \end{cases}$$

Wir setzen über $\Gamma^*(r)$ außerdem voraus, daß alle Zahlen α_j und $\beta_j \leq r$ seien. Dann definieren wir:

$$\zeta_{i_1} = 0, \quad \zeta_{i_2} = 0, \ldots, \quad \zeta_{i_\sigma} = 0,$$
$$\zeta_{h_1} = \infty, \quad \zeta_{h_2} = \infty, \ldots, \quad \zeta_{h_\tau} = \infty.$$

Für $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_\sigma, h_1, h_2, \ldots, h_\tau$ werde ζ_j nach den Vorschriften (a), (b), (c) in Definition V (Nr. 4.1) berechnet.

Den Punkt mit den Koordinaten $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ bezeichnen wir als *formalen singulären Bildpunkt 2. Art* und sagen: $(\zeta)_k$ *wird durch* $\Gamma^*(r)$ *erzeugt*. Die größte unter den Zahlen α_j, β_j in den Formeln (9) werde *Exponent 2. Art* genannt. Diese Zahl ist $\leq r$.

An die Stelle der Sätze 5 und 6 treten die folgenden Sätze, die genau so bewiesen werden:

Satz 7. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Q sei ein singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(\Delta)$ (vgl. Definition III, Nr. 2.4). Es gebe eine Q erzeugende analytische Kurve, welche außer den Gln. von Δ (7) noch die Gln. (8) erfülle. Dann ist Q formaler singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(\Delta)$ und besitzt als solcher einen (endlichen) Exponenten 2. Art.*

Satz 8. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. $Q = (\zeta)_k$ sei ein formaler singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(\Delta)$ und werde durch $\Gamma^*(r)$ erzeugt (vgl. Definition VI). Dann gibt es eine analytische Kurve γ durch den Punkt 0, die Q gemäß der Definition in Satz 3, Nr. 2.3 erzeugt. Auf γ gelten überdies die Gln. (8). Q ist singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$ im Sinne der Definition II, Nr. 1.3.*

Wir wenden die Rechnungen des § 6 anstatt auf Δ auf Δ^* an und bestimmen die formalen singulären Bildpunkte 2. Art unter Berücksichtigung der Definition VI wie in den Nr. 1 bis 7 dieses Paragraphen. Dabei ist der Begriff des Exponenten 2. Art zu benutzen. Als Ergebnis erhalten wir:

Es gibt abzählbar unendlich viele irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten, die alle singulären Bildpunkte 2. Art von $A_k(\Delta)$ enthalten und aus lauter singulären Bildpunkten von $A_k(\Delta)$ bestehen.

Fassen wir dieses Ergebnis mit dem von Nr. 7.7 zusammen, so erhalten wir:

Die Menge der singulären Bildpunkte der meromorphen Abbildung $A_k(\Delta)$ erfüllt eine abzählbar unendliche Menge von irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Im nächsten Paragraphen beweisen wir, daß nur endlich viele darunter isoliert sind.

§ 8. Beweis des Hauptsatzes und Folgerungen.

8.1. Die irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeiten der singulären Bildpunkte seien

$$B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots. \tag{1}$$

Aus dieser Reihe streichen wir alle diejenigen weg, die ganz zu einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit dieser Reihe gehören. Es wird also B_i gestrichen, wenn es eine Mannigfaltigkeit B_j gibt, welche B_i ganz enthält. Die dann entstehende Reihe sei

$$B_{a_1}, B_{a_2}, \ldots B_{a_m}, \ldots. \tag{2}$$

8.2. *Die Reihe* (2) *enthält nur endlich viele Elemente.*

Um einen indirekten Beweis zu führen, nehmen wir das Gegenteil an. Dann gibt es einen Punkt Q im $(\zeta)_k$-Raum, derart, daß jede beliebige Umgebung von Q durch unendlich viele Mannigfaltigkeiten der Reihe (2) geschnitten wird. Der Punkt Q ist als Häufungspunkt von singulären Bildpunkten nach Satz 1 (Nr. 2.1) selbst singulärer Bildpunkt. Nach Satz 2 (Nr. 2.2) gibt es eine Umgebung $U(Q)$ von Q derart, daß die singulären Bildpunkte, die zu $U(Q)$ gehören, endlich viele in Q irreduzible analytische Mannigfaltigkeiten

$$M_1, M_2, \ldots, M_s \tag{3}$$

erfüllen. Wir setzen voraus, daß keine der Mannigfaltigkeiten M_i ganz zu einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit dieser Reihe gehöre. Die Dimension von M_i sei d_i. Wir stellen die Behauptung auf:

8.3. *Jede Mannigfaltigkeit M_i liegt auf wenigstens einer algebraischen Mannigfaltigkeit B_{a_m}.*

Beweis. (a) Der Beweis ist indirekt, ähnlich wie der in 7.6 (c). Es sei $U_1(Q)$ eine Umgebung von Q, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U_1(Q)}$ ganz in $U(Q)$ liegt. Es sei

$$\overline{M_i} = \overline{U_1(Q)} \cap M_i, \qquad D_{i\,m} = \overline{U_1(Q)} \cap M_i \cap B_{a_m}.$$

(b) Weil jeder auf $\overline{M_i}$ liegende singuläre Bildpunkt wenigstens einer algebraischen Mannigfaltigkeit B_{a_m} angehört, ist

$$\overline{M_i} = \bigcup_m D_{i\,m}. \tag{4}$$

Wir beweisen, daß jede Menge D_{im} in $\overline{M}_i$ nirgends dicht ist, und zeigen, daß $\overline{M}_i - D_{im}$ in $\overline{M}_i$ dicht ist. Da die in Q irreduzible analytische Mannigfaltigkeit M_i nicht zu B_{a_m} gehört, gibt es im Primideal, das durch B_{a_m} bestimmt wird, wenigstens ein Polynom p, welches auf M_i nicht identisch verschwindet. Jeder Punkt von M_i, in dem $p = 0$ gilt, ist Grenzpunkt von solchen Punkten von M_i, in denen $p \neq 0$ ist. Dies folgt aus den Stetigkeitssätzen über analytische Mannigfaltigkeiten (vgl. [3], S. 111). Da also D_{im} nirgends dicht in M_i ist, ergibt Formel (4) einen Widerspruch zum BAIRE-schen Dichtigkeitssatz. Damit ist die Behauptung bewiesen.

8.4. M_i gehöre zu $B_{(i)}$. Die Dimension von $B_{(i)}$ sei δ_i. Die irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit $B_{(i)}$ hat auch in jedem ihrer Punkte die Dimension δ_i (vgl. [7], S. 154). Da M_i in $B_{(i)}$ liegt, muß $\delta_i \geq d_i$ sein. Wäre nun $\delta_i > d_i$, so würde $B_{(i)}$ in der Umgebung von Q durch δ_i-dimensionale analytische Mannigfaltigkeiten darstellbar sein. Da $B_{(i)}$ aus lauter singulären Bildpunkten besteht, gäbe es also in der Reihe (3) eine Mannigfaltigkeit der Dimension δ_i, welche M_i ganz enthält, im Widerspruch zu den Eigenschaften der Reihe (3).

8.5. M_i kann nicht gleichzeitig auf zwei verschiedenen algebraischen Mannigfaltigkeiten $B_{(i_1)}$ und $B_{(i_2)}$ liegen. Nach 8.4 sind nämlich $B_{(i_1)}$ und $B_{(i_2)}$ beide d_i-dimensional. Da sie beide irreduzibel sind, ist ihr Durchschnitt $\leq d_i - 1$ dimensional. Dieser Durchschnitt müßte die d_i-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit M_i enthalten, was unmöglich ist.

8.6. Es können also höchstens so viele algebraische Mannigfaltigkeiten der Reihe (2) in die Umgebung $U(Q)$ hineinreichen, wie es analytische Mannigfaltigkeiten (3) gibt, also höchstens s. Das ist ein Widerspruch zur Annahme unserer indirekten Schlußweise (vgl. Nr. 8.2). Damit ist bewiesen, daß die Anzahl der Elemente in der Reihe (2) endlich ist.

Satz 9. *Die Menge der singulären Bildpunkte der meromorphen Abbildung $A_k(\Delta)$ im Punkte 0 erfüllt eine algebraische Mannigfaltigkeit.*

8.7. Jede Mannigfaltigkeit (2) wurde aus einem System $\mathfrak{M}^{\nu}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ (oder einem System dieser Art für singuläre Bildpunkte 2. Art, vgl. Nr. 7.8) gewonnen. Daher folgt:

Hauptsatz. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung der analytischen Mannigfaltigkeit Δ. Es gibt endlich viele Systeme von Polynomen*

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda r} t^r \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

mit zugehörigen algebraischen Gleichungssystemen

$$A_\mu(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M) \tag{6}$$

derart, daß jeder singuläre Bildpunkt von $A_k(\Delta)$ im Punkte 0 folgendermaßen gewonnen wird: Durch Einsetzen von (5) in die Gleichungen von $A_k(\Delta)$

$$z_j = \frac{p_j(x)}{q_j(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

entstehen Funktionen $z_j = p_j'(t)/q_j'(t)$, $j = 1, \ldots, k$, *wobei* p_j' *und* q_j' *nicht gleichzeitig identisch verschwinden. Falls* $p_j'(t) \not\equiv 0$, $q_j'(t) \not\equiv 0$ *ist, sei:*

$$p_j'(t) = t^{\mu_j}\left(c_{\mu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) + t\, c_{\mu_j+1}^{(j)} + \cdots\right), \qquad c_{\mu_j}^{(j)} \not\equiv 0,$$

$$q_j'(t) = t^{\nu_j}\left(d_{\nu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr}) + t\, d_{\nu_j+1}^{(j)} + \cdots\right), \qquad d_{\nu_j}^{(j)} \not\equiv 0.$$

Für $j = 1, 2, \ldots, k$ *werde*

$$\zeta_j = \begin{cases} 0 & \text{für } p_j' \equiv 0 \text{ oder für } \mu_j > \nu_j \\ \dfrac{c_{\mu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr})}{d_{\mu_j}^{(j)}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nr})} & \text{für } \mu_j = \nu_j \\ \infty & \text{für } q_j' \equiv 0 \text{ oder für } \nu_j > \mu_j \end{cases} \tag{7}$$

gesetzt. Durch diese Definition wird eine rationale Abbildung der algebraischen Mannigfaltigkeit (6) *bestimmt, welche diese auf eine algebraische Mannigfaltigkeit, die aus lauter singulären Bildpunkten von* $A_k(\Delta)$ *besteht, abbildet.*

Folgerung. Es gibt eine positive ganze Zahl m mit folgender Eigenschaft: Alle singulären Bildpunkte von $A_k(\Delta)$ haben einen Exponenten (1. oder 2. Art, vgl. Definitionen V und VI) $\leq m$ oder sind Häufungspunkte von singulären Bildpunkten von $A_k(\Delta)$ mit dieser Eigenschaft.

8.8. Definition VII. Es sei $A_k(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung der analytischen Mannigfaltigkeit Δ mit den Gleichungen

$$\varphi_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Durch Entwicklung von $\varphi_\nu(x)$ nach homogenen Polynomen der (x) entstehe die Reihe

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_{\nu 1}(x) + \varphi_{\nu 2}(x) + \cdots + \varphi_{\nu s}(x) + \cdots. \tag{9}$$

Es sei $\Phi_{\nu s}(x)$ die s-te Partialsumme dieser Reihe:

$$\Phi_{\nu s}(x) = \varphi_{\nu 1}(x) + \varphi_{\nu 2}(x) + \cdots + \varphi_{\nu s}(x). \tag{10}$$

Sind $z_j = p_j/q_j$ die Abbildungsgleichungen von $A_k(\Delta)$, so entwickeln wir $p_j(x)$ und $q_j(x)$ in die Diagonalreihen

$$p_j(x) = p_{j1}(x) + p_{j2}(x) + \cdots + p_{jr}(x) + \cdots \tag{11}$$

$$q_j(x) = q_{j1}(x) + q_{j2}(x) + \cdots + q_{jr}(x) + \cdots. \tag{12}$$

$A_k(r, s)$ sei die rationale Abbildung

$$z_j = \frac{P_{jr}(x)}{Q_{jr}(x)} = \frac{p_{j1}(x) + p_{j2}(x) + \cdots + p_{jr}(x)}{q_{j1}(x) + q_{j2}(x) + \cdots + q_{jr}(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{13}$$

der algebraischen Mannigfaltigkeit Δ_s mit den Gleichungen

$$\Phi_{\nu s}(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{14}$$

$A_{kr}(\Delta)$ sei die rationale Abbildung (13) der analytischen Mannigfaltigkeit Δ.

8.9. Satz 10. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Zu jeder positiven ganzen Zahl r gibt es eine positive ganze Zahl s_0, derart, daß die singulären Bildpunkte mit dem Exponenten 1. Art (vgl. Definition V, Nr. 4.1) r der Abbildung $A_k(r, s)$ für $s \geq s_0$ auch singuläre Bildpunkte der Abbildung $A_k(\Delta)$ sind (vgl. Definition VII).*

Beweis. In § 7 haben wir die Menge der singulären Bildpunkte von $A_k(\Delta)$ mit dem Exponenten r in Teilmengen $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ eingeteilt. Streichen wir von diesen diejenigen weg, welche ganz auf der abgeschlossenen Hülle einer anderen Menge dieser Art liegen, so bleiben nur endlich viele übrig. Zur Aufstellung der Gleichungen jeder solchen Teilmenge genügen endliche Abschnitte der Reihen (9), (11) und (12), wie sich insbesondere aus den Überlegungen in den Nr. 6.4 und 7.3 ergibt. Die längsten Partialsummen, die zur Berechnung irgendeiner der endlich vielen $\mathfrak{M}^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\beta)$ $(\mu_1, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ gebraucht werden, seien $\Phi_{\nu s_0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Berechnen wir sodann nach den Methoden der §§ 6, 7 die Gleichungen für die singulären Bildpunkte mit dem Exponenten 1. Art r der Abbildung $A_k(r, s)$ bei $s \geq s_0$, so erhalten wir Systeme, welche die Gleichungen der singulären Bildpunkte mit dem Exponenten r der Abbildung $A_k(\Delta)$ enthalten. Daraus folgt die Behauptung. Genau so beweist man die Verallgemeinerung:

Satz 11. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung. Zu jeder positiven ganzen Zahl r gibt es positive ganze Zahlen r_0 $(r_0 \geq r)$, s_0 derart, daß die singulären Bildpunkte mit dem Exponenten r (1. oder 2. Art, vgl. Definitionen V und VI) der rationalen Abbildung $A_k(r, s)$ (vgl. Definition VII) für $r \geq r_0$ und $s \geq s_0$ auch singuläre Bildpunkte der Abbildung $A_k(\Delta)$ sind.*

Folgerung. Der Punkt Q sei singulärer Bildpunkt einer Folge von Abbildungen $A_k(r_m, s_m)$ $(m = 1, 2, \ldots; \lim\limits_{m \to \infty} r_m = \infty, \lim\limits_{m \to \infty} s_m = \infty)$ und habe für jede dieser Abbildungen einen Exponenten (1. oder 2. Art) $\leq r_0$. Dann ist Q singulärer Bildpunkt von $A_k(\Delta)$.

8.10. Es werden die Abbildungen $A_{kr}(\Delta)$ untersucht (vgl. Definition VII).

Satz 12. *$A_k(\Delta)$ sei eine meromorphe Abbildung; $A_{kr}(\Delta)$ seien die in Definition VII eingeführten rationalen Abbildungen von Δ.*

(a) *Jeder singuläre Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ von $A_k(\Delta)$ ist singulärer Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ für jede Abbildung $A_{kr}(\Delta)$, wenn $r \geq \varrho$ ist.*

(b) *Jeder singuläre Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ der Abbildung $A_{kr}(\Delta)$ ist für $r \geq \varrho$ singulärer Bildpunkt mit dem Exponenten 1. Art ϱ von $A_k(\Delta)$.*

(c) Es gibt eine positive ganze Zahl m mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $M_r(m)$ die abgeschlossene Hülle der Menge der singulären Bildpunkte der Abbildung $A_{kr}(\Delta)$ mit Exponenten 1. Art $\leq m$. Es sei $r \geq m$. Die Menge $M_r(m)$ stimmt überein mit der abgeschlossenen Hülle der Menge der singulären Bildpunkte 1. Art von $A_k(\Delta)$.

Beweis. (a) und (b) folgen aus Definition V. (c) ergibt sich aus (a) und (b) und der Folgerung aus dem Hauptsatz (vgl. 8.7).

8.11. Satz 13. *Es sei Δ eine Vollumgebung U von 0.*

(a) *Jeder singuläre Bildpunkt von $A_k(U)$ ist von 1. Art.*

(b) *Es gibt eine positive ganze Zahl m mit der folgenden Eigenschaft: $M_r(m)$ sei die abgeschlossene Hülle der Menge der singulären Bildpunkte der Abbildung $A_{k,r}(U)$ mit Exponenten 1. Art $\leq m$. Es sei $r \geq m$. $M_r(m)$ stimmt überein mit der Menge der singulären Bildpunkte der Abbildung $A_k(U)$.*

Beweis. Zu (a): Q sei ein singulärer Bildpunkt 2. Art von $A_k(U)$. Ein Exponent 2. Art von Q sei e.

$$x_\lambda = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda e} t^e + a_{\lambda e+1} t^{e+1} + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

sei eine Q erzeugende Kurve. Dann wird Q auch durch das System von Polynomen

$$x_\lambda^* = a_{\lambda 1} t + a_{\lambda 2} t^2 + \cdots + a_{\lambda e} t^e + b_{\lambda e+1} t^{e+1} + \cdots + b_{\lambda N} t^N \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

bei beliebigem N und beliebigen $b_{\lambda\nu}$ erzeugt. Wir wählen die Unbestimmten so, daß keine Funktion $p_j(x^*(t)), q_j(x^*(t))$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ identisch verschwindet. Q ist also doch von 1. Art im Widerspruch zu der Annahme.

(b) folgt aus (a) und Satz 12.

§ 9. Singuläre Bildpunkte einer meromorphen Abbildung im projektiven Raum.

9.1. Als Bildraum werde der projektive $(z)_k$-Raum genommen. Die meromorphe Abbildung B_k habe die Gleichungen

$$z_j = \varrho f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k+1). \tag{1}$$

Als Unbestimmtheitspunkt von B_k wird ein Punkt (x^0) bezeichnet, in dem alle Funktionen f_j verschwinden.

Δ sei eine analytische Mannigfaltigkeit im $(x)_n$-Raum. Auf keiner der im Punkte O irreduziblen Teilmannigfaltigkeiten von Δ sollen alle Funktionen f_j identisch Null sein. Dann werde die meromorphe Abbildung B_k auf Δ untersucht. Die Definition des singulären Bildpunktes von $B_k(\Delta)$ geschieht wie in Definition II. Die Sätze 1 und 2 in § 2 gelten ungeändert. Im Beweise von Satz 2 tritt an die Stelle des Gleichungssystems (2) das folgende:

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x)_n = 0 & (\nu = 1, 2, \ldots, N;\ \text{vgl. Nr. 1.1}) \\ f_i(x)_n z_j - f_j(x)_n z_i = 0 & (i, j = 1, 2, \ldots, k+1). \end{cases} \tag{2}$$

Im Anschluß an die Sätze 1 und 2 läßt sich im vorliegenden Fall des projektiven $(z)_k$-Raumes ein besonders einfacher Beweis des Satzes 9 gewinnen. Die Menge der singulären Bildpunkte ist nämlich eine kompakte „analytische Menge" im projektiven Raum im Sinne der Definition von H. KNESER (vgl. [8], S. 382). Hieraus folgt nach einem Satze von CHOW, für den KNESER in der zitierten Arbeit einen vereinfachten Beweis angibt, unmittelbar Satz 9.

9.2. Ein singulärer Bildpunkt heiße von 1. Art, wenn es eine Q erzeugende analytische Kurve gibt, auf der keine Funktion f_j identisch verschwindet, andernfalls von 2. Art. Die Definition der formalen singulären Bildpunkte 1. Art (Definition V, Nr. 4.1) ist in der folgenden Weise abzuändern:

$\Gamma(r)$ sei Anfang einer analytischen Kurve auf Δ. Setzen wir die Entwicklungen von $\Gamma(r)$ in die Funktionen $f_j(x)_n$ $(j=1,\ldots,k+1)$ ein, so entstehe

$$f_j = t^{\gamma_j}(c_{j0} + c_{j1}t + \cdots), \quad c_{j0} \neq 0 \quad (j=1,\ldots,k+1). \tag{3}$$

Die größte der Zahlen γ_j sei γ, und es sei $\gamma \leq r$. Die kleinste Zahl γ_j werde mit δ bezeichnet.

(a) Wenn $\gamma_j > \delta$ ist, werde $\zeta_j = 0$ gesetzt.

(b) Wenn $\gamma_j = \delta$ ist, werde $\zeta_j = c_{j0}$ gesetzt.

Dann heiße der Punkt mit den Koordinaten ζ_j $(j=1,\ldots,k+1)$ formaler singulärer Bildpunkt. Die Zahl γ werde Exponent von (ζ) genannt. Die Sätze des § 8 sind auch im vorliegenden Fall richtig. Die Formulierung des Hauptsatzes ist so abzuändern, daß die soeben angegebene Definition des formalen singulären Bildpunktes im projektiven Raum berücksichtigt wird.

Literatur.

[1] AUTONNE: Sur les poles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes. Acta math., Stockh. **21**, 249—264 (1897). — [2] BLUMENTHAL: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. 2. Teil. Math. Ann. **58**, 497—527 (1904). — [3] OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II, 1. Teil, 1929; 2. Teil, 1932. Berlin u. Leipzig. — [4] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie, Bd. 1. Berlin 1935. — [5] WAERDEN, VAN DER: Moderne Algebra, Bd. II. Berlin 1931. — [6] WAERDEN, VAN DER: Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin 1939. — [7] GRÖBNER: Moderne algebraische Geometrie. Wien u. Innsbruck 1949. — [8] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. **4**, 382—391 (1951). — [9] THIMM: Über algebraische Relationen zwischen meromorphen Funktionen in abgeschlossenen Räumen. Diss. Königsberg 1939.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

PRASAD, B. N., and U. N. SINGH
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 481—482 (1953)

Corrigenda and Addenda.

On the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series. Math. Zeitschr. vol. 56, pp. 280—288.

By

B. N. PRASAD and U. N. SINGH.

1. On page 283, line 9: Add $o(1)$ on the right hand side of the inequality and in line 13 add $o(n)$.

2. On page 283 formula (3.4): Read

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\cot\tfrac{1}{2}t\,\lambda_n(t)\,dg(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(P_1 + P_2 + P_3),$$

where δ is positive and small.

On page 284: In the evaluation of P_2 take δ as the upper limit of the integral instead of π. As integration by parts shows, under the hypothesis of the theorem the integral $\int_{1/n}^{\delta} \cot\tfrac{1}{2}t\,|dg(t)|$ exists for small δ and large n. Hence $|P_2/n|$ can be made arbitrarily small by first choosing δ sufficiently small and then choosing n sufficiently large.

Finally, $P_3 = o(n)$ for a fixed δ. This is proved by applying the lemma of page 282 after making

$$\int_{\delta}^{\pi} \cot\tfrac{1}{2}t\,\lambda_n(t)\,dg(t) = \int_0^{\pi} \lambda_n(t)\,d\beta(t),$$

where $\beta(t)$ is an even and continuous function of bounded variation which vanishes for $0 \leq t \leq \delta$.

Corresponding modifications should be made in the analysis at the bottom of page 284 and the top of page 285.

3. On page 285, in formula (4.1): $-$ should be replaced by $+$.

4. Corrections corresponding to 2 should be made in the analysis of § 5.

In formula (5.3) the integral denoted by I should be broken up into two parts: $\int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} = I + I_1$, where δ is small. The estimates of I and I_1 will proceed as those of P_2 and P_3 respectively.

5. The example considered by SINGH and referred to in § 2 is the series $\sum_{1}^{\infty} \cos n x$ which corresponds to the periodic function (with period 2π)

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{for} \quad 0 < x < 2\pi, \quad f(0) = 0.$$

University of Allahabad (India).

(Eingegangen am 11. Februar 1953.)